GABARITO EXERCICIOS OBRIGATORIOS LISTA 6 FÍSICA IV
Estrutura atômica 9 (edição do Halliday)

Capítulo 39 e 40

39.15 Um elétron está confinado em um poço de potencial unidimensional infinito com 100 pm de largura; o elétron se encontra no estado fundamental. Qual é a probabilidade de o elétron ser detectado em uma região de largura Δx = 5,0 pm no entorno do ponto (a) x = 25 pm, (b) x = 50 pm, e (c) x = 90 pm? (Sugestão: A largura Δx da região é tão pequena que a densidade de probabilidade pode ser considerada constante no interior da região.)

39-15

PENSE A probabilidade de detectar um elétron em uma região é dada por $P = \int |\psi|^2\, dx$, na qual a integral se estende a toda a região.

EXPRESSE Se a largura Δx da região é pequena, a probabilidade é dada aproximadamente por $P = |\psi|^2\, \Delta x$, em que ψ é o valor da função de onda no centro da região. No caso de um elétron confinado em um poço de potencial infinito de largura L, a densidade de probabilidade do estado fundamental é

$$|\psi|^2 = \frac{2}{L}\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi x}{L}\right)$$

e, portanto,

$$P = \left(\frac{2\Delta x}{L}\right)\operatorname{sen}^2\left(\frac{\pi x}{L}\right).$$

ANALISE (a) Para L = 100 pm, x = 25 pm e Δx = 5,0 pm, temos:

$$P = \left[\frac{2(5{,}0\,\text{pm})}{100\,\text{pm}}\right]\operatorname{sen}^2\left[\frac{\pi(25\,\text{pm})}{100\,\text{pm}}\right] = 0{,}050.$$

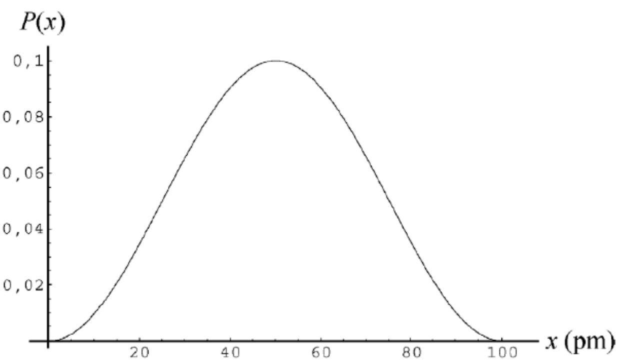
(b) Para L = 100 pm, x = 50 pm e Δx = 5,0 pm, temos:

$$P = \left[\frac{2(5{,}0\,\text{pm})}{100\,\text{pm}}\right]\operatorname{sen}^2\left[\frac{\pi(50\,\text{pm})}{100\,\text{pm}}\right] = 0{,}10.$$

(c) Para L = 100 pm, x = 90 pm e Δx = 5,0 pm, temos:

$$P = \left[\frac{2(5{,}0\,\text{pm})}{100\,\text{pm}}\right]\operatorname{sen}^2\left[\frac{\pi(90\,\text{pm})}{100\,\text{pm}}\right] = 0{,}0095.$$

APRENDA A figura a seguir mostra a probabilidade em função de x. Como era de se esperar, a probabilidade de que o elétron seja detectado é máxima no centro do poço, ou seja, no ponto $x = L/2$ = 50 pm.



39.27 Um elétron está confinado em um curral retangular, de dimensões $L_x = L$ e $L_y = 2L$. (a) Quantas frequências diferentes o elétron é capaz de emitir ou absorver ao sofrer uma transição entre dois níveis que estão entre os cinco de menor energia? Que múltiplo de $h^2/8mL^2$, em que m é a massa do elétron, corresponde (b) à menor, (c) à segunda menor, (d) à terceira menor, (e) à maior, (f) à segunda maior e (g) à terceira maior frequência?

39-27

PENSE Os níveis de energia de um elétron confinado em um curral retangular de dimensões L_x e L_y são dados pela Eq. 39-20:

$$E_{nx,ny} = \frac{h^2}{8m}\left[\frac{n_x^2}{L_x^2} + \frac{n_y^2}{L_y^2}\right].$$

EXPRESSE Para $L_x = L$ e $L_y = 2L$, temos:

$$E_{nx,ny} = \frac{h^2}{8m}\left[\frac{n_x^2}{L_x^2} + \frac{n_y^2}{L_y^2}\right] = \frac{h^2}{8mL^2}\left[n_x^2 + \frac{n_y^2}{4}\right].$$

Assim, em unidades de $h^2/8mL^2$, os níveis de energia são dados por $n_x^2 + n_y^2/4$. Os cinco primeiros níveis são $E_{11} = 1{,}25$, $E_{12} = 2{,}00$, $E_{13} = 3{,}25$, $E_{21} = 4{,}25$ e $E_{22} = E_{14} = 5{,}00$.

A frequência da luz emitida ou absorvida quando o elétron passa de um estado i para um estado f é $(E_f - E_i)/h$; em unidades de $h/8mL^2$, é a diferença entre os valores de $n_x^2 + n_y^2/4$ nos dois estados. As frequências possíveis são:

$$0{,}75(1,2 \to 1,1), 2{,}00(1,3 \to 1,1), 3{,}00(2,1 \to 1,1), 3{,}75(2,2 \to 1,1),$$
$$1{,}25(1,3 \to 1,2), 2{,}25(2,1 \to 1,2), 3{,}00(2,2 \to 1,2), 1{,}00(2,1 \to 1,3),$$
$$1{,}75(2,2 \to 1,3), 0{,}75(2,2 \to 2,1),$$

todas em unidades de $h/8mL^2$.

ANALISE (a) Esses resultados fornecidos mostram que o elétron é capaz de emitir ou absorver 8 frequências diferentes.

(b) A menor frequência, em unidades de $h/8mL^2$, é 0,75, que corresponde às transições 1,2 → 1,1 e 2,2 → 2,1.

(c) A segunda menor frequência, em unidades de $h/8mL^2$, é 1,00, que corresponde à transição 2,1 → 1,3.

(d) A terceira menor frequência, em unidades de $h/8mL^2$, é 1,25, que corresponde à transição 1,3 → 1,2.

(e) A maior frequência, em unidades de $h/8mL^2$, é 3,75, que corresponde à transição 2,2 → 1,1.

(f) A segunda maior frequência, em unidades de $h/8mL^2$, é 3,00, que corresponde às transições 2,2 → 1,2 ou 2,1 → 1,1.

(g) A terceira maior frequência, em unidades de $h/8mL^2$, é 2,25, que corresponde à transição 2,1 → 1,2.

APRENDA No caso geral, quando um elétron executa uma transição entre os níveis (n_x, n_y) e (n_x', n_y'), a frequência do fóton emitido ou absorvido é dada por

$$f = \frac{\Delta E}{h} = \frac{E_{n_x',n_y'} - E_{nx,ny}}{h} = \frac{h}{8mL^2}\left(n_x'^2 + \frac{n_y'^2}{4}\right) - \frac{h}{8mL^2}\left(n_x^2 + \frac{n_y^2}{4}\right)$$
$$= \frac{h}{8mL^2}\left[\left(n_x'^2 - n_x^2\right) + \frac{1}{4}\left(n_y'^2 - n_y^2\right)\right].$$

39.53 A equação de Schrödinger para os estados do átomo de hidrogênio nos quais o número quântico orbital ℓ é zero é

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\psi}{dr}\right)+\frac{8\pi^2 m}{h^2}[E-U(r)]\psi=0.$$

Verifique se a equação abaixo que descreve o estado fundamental do átomo de hidrogênio, é uma solução dessa equação.

$$\psi(r)=\frac{1}{\sqrt{\pi}a^{3/2}}e^{-r/a} \qquad \text{(estado fundamental)}$$

39-53

PENSE Os números quânticos do átomo de hidrogênio no estado fundamental são $n = 1$, $\lambda = 0$ e $m_\lambda = 0$.

EXPRESSE A função de onda proposta é

$$\psi=\frac{1}{\sqrt{\pi}a^{3/2}}e^{-r/a}$$

em que a é o raio de Bohr. Devemos provar que essa função é uma solução da equação de Schrödinger.

ANALISE A derivada da função proposta é

$$\frac{d\psi}{dr}=-\frac{1}{\sqrt{\pi}a^{5/2}}e^{-r/a}$$

e, portanto,

$$r^2\frac{d\psi}{dr}=-\frac{r^2}{\sqrt{\pi}a^{5/2}}e^{-r/a}$$

e

$$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{d\psi}{dr}\right)=\frac{1}{\sqrt{\pi}a^{5/2}}\left[-\frac{2}{r}+\frac{1}{a}\right]e^{-r/a}=\frac{1}{a}\left[-\frac{2}{r}+\frac{1}{a}\right]\psi.$$

Como a energia do estado fundamental é dada por $E=-me^4/8\varepsilon_0^2h^2$ e o raio de Bohr é dado por $a=h^2\varepsilon_0/\pi me^2$, $E=-e^2/8\pi\varepsilon_0 a$. A energia potencial é dada por

$$U=-e^2/4\pi\varepsilon_0 r$$

e, portanto,

$$\frac{8\pi^2 m}{h^2}[E-U]\psi=\frac{8\pi^2 m}{h^2}\left[-\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 a}+\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}\right]\psi=\frac{8\pi^2 m}{h^2}\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{a}+\frac{2}{r}\right]\psi$$

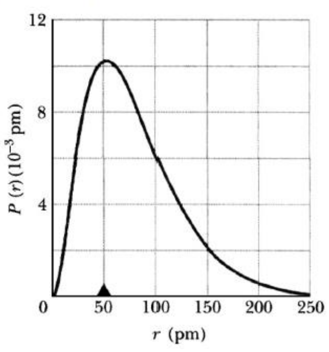
$$=\frac{\pi me^2}{h^2\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{a}+\frac{2}{r}\right]\psi=\frac{1}{a}\left[-\frac{1}{a}+\frac{2}{r}\right]\psi.$$

Como os dois termos da equação de Schrödinger se cancelam, está demonstrado que a função ψ proposta satisfaz a equação.

APRENDA A densidade de probabilidade radial do átomo de hidrogênio no estado fundamental é dada pela Eq. 39-44:

$$P(r)=|\psi|^2(4\pi r^2)=\frac{1}{\pi a^3}e^{-2r/a}(4\pi r^2)=\frac{4}{a^3}r^2e^{-2r/a}.$$

A figura a seguir mostra o gráfico de $P(r)$.



40.9 Um elétron de um átomo se encontra em um estado com $\ell = 3$. Determine (a) o módulo de $\vec{L}$ (em múltiplos de ħ), (b) o módulo de $\vec{\mu}$ (em múltiplos de μ_B), (c) o maior valor possível de m_ℓ, (d) o valor correspondente de L_z (em múltiplos de ħ), (e) o valor correspondente de $m_{orb,z}$ (em múltiplos de μ_B); (f) o valor do ângulo semiclássico θ entre as direções de L_z e $\vec{L}$, o valor de θ para (g) o segundo maior valor possível de m_ℓ e (h) o menor valor possível (isto é, o mais negativo) de m_ℓ.

40-9

PENSE Conhecendo o valor de λ, o número quântico orbital, podemos determinar o módulo do momento angular e do momento dipolar magnético orbital.

EXPRESSE O módulo do momento angular orbital é

$$L = \sqrt{\ell(\ell+1)}\hbar = \sqrt{3(3+1)}\hbar = \sqrt{12}\hbar\,.$$

Como $\vec{\mu}_{orb} = -\frac{e}{2m}\vec{L}$, o módulo de $\vec{\mu}_{orb}$ é

$$\mu_{orb} = \frac{e\hbar}{2m}\sqrt{\ell(\ell+1)} = \mu_B,$$

em que $\mu_B = e\hbar/2m$ é o magnéton de Bohr.

ANALISE (a) Para λ = 3, temos:

$$L = \sqrt{\ell(\ell+1)}\hbar = \sqrt{3(3+1)}\hbar = \sqrt{12}\hbar.$$

Assim, o módulo de $\vec{L}$, em múltiplos de $\hbar$, é $\sqrt{12} \approx 3{,}46$.

(b) O módulo do momento dipolar magnético orbital é

$$\mu_{orb} = \sqrt{\ell(\ell+1)}\mu_B = \sqrt{12}\mu_B.$$

Assim, o módulo de $\vec{\mu}_{orb}$, em múltiplos de $\hbar$, é $\sqrt{12} \approx 3{,}46$.

(c) O maior valor possível de m_ℓ é $m_\ell = \ell = 3$.

(d) Usamos a relação $L_z = m_\ell\hbar$ para calcular a componente z do momento angular orbital. O valor de L_z em múltiplos de $\hbar$ é $m_\ell = 3$.

(e) Usamos a relação $\mu_z = -m_\ell\mu_B$ para calcular o momento dipolar magnético orbital. O valor de μ_z em múltiplos de $\hbar$ é $-m_\ell = -3$.

(f) Usamos a relação $\cos\theta = m_\ell/\sqrt{\ell(\ell+1)}$ para calcular o ângulo entre o momento angular orbital e o eixo z. Para $\ell = 3$ e $m_\ell = 3$, obtemos $\cos\theta = 3/\sqrt{12} = \sqrt{3}/2$ ou $\theta = 30{,}0°$.

(g) Para $\ell = 3$ e $m_\ell = 2$, $\cos\theta = 2/\sqrt{12} = 1/\sqrt{3}$ ou $\theta = 54{,}7°$.

(h) Para $\ell = 3$ e $m_\ell = -3$, $\cos\theta = -3/\sqrt{12} = -\sqrt{3}/2$ ou $\theta = 150°$.

APRENDA Não é possível medir $\vec{L}$ e $\vec{\mu}_{orb}$, mas podemos medir a componente z desses vetores.

40.27 Dois dos três elétrons de um átomo de lítio têm números quânticos (n, ℓ, m_ℓ e μ_s) iguais a (1, 0, 0, + 1/2) e (1, 0, 0, –1/2). Que números quânticos são possíveis para o terceiro elétron se o átomo se encontra (a) no estado fundamental e (b) no primeiro estado excitado?

40-27

PENSE Os quatro números quânticos n, ℓ, m_ℓ e m_s especificam os estados quânticos dos elétrons de um átomo.

EXPRESSE Um átomo de lítio possui três elétrons. Os primeiros dois elétrons possuem números quânticos $(1, 0, 0, \pm 1/2)$. Todos os estados com número quântico principal $n = 1$ estão ocupados. Os estados de mais baixa energia que se seguem têm $n = 2$.

O número quântico orbital pode ter os valores $\ell = 0$ ou $\ell = 1$; os estados $\ell = 0$ têm menor energia. O número quântico magnético deve ser $m_\ell = 0$, já que essa é a única possibilidade para $\ell = 0$. O número quântico de spin pode ser $m_s = -\frac{1}{2}$ ou $+\frac{1}{2}$. Como não existe campo magnético externo, esses dois estados têm a mesma energia.

ANALISE (a) De acordo com a análise anterior, no estado fundamental, os números quânticos do terceiro elétron são

$$n = 2, \ell = 0, m_\ell = 0, m_s = -\tfrac{1}{2} \text{ ou } n = 2, \ell = 0, m_\ell = 0, m_s = +\tfrac{1}{2},$$

ou seja,

$$(n, \ell, m_\ell, m_s) = (2{,}0{,}0{,}+1/2) \text{ e } (2{,}0{,}0{,}-1/2).$$

(b) O estado de mais baixa energia que se segue é um estado com $n = 2$ e $\ell = 1$. Todos os estados com $n = 3$ têm uma energia maior. O número quântico magnético pode ser $m_\ell = -1$, 0, ou $+1$; o número quântico de spin pode ser $m_s = -\frac{1}{2}$ ou $+\frac{1}{2}$. Assim, (n, ℓ, m_ℓ, m_s) = (2,1,1,+1/2), (2,1,1,–1/2), (2,1,0,+1 / 2), (2,1,0,–1 / 2), (2,1,–1,+1 / 2) e (2,1,–1,–1 / 2).

APRENDA De acordo com o princípio de exclusão de Pauli, não pode haver dois elétrons no mesmo átomo com o mesmo conjunto de números quânticos.