GABARITO EXERCICIOS OBRIGATORIOS LISTA 3 FÍSICA IV
Difração (9 edição do Halliday)

Capítulo 36

36-15

PENSE A intensidade relativa das franjas de difração produzidas por uma fenda depende da razão a/λ, sendo a a largura da fenda e λ o comprimento de onda.

EXPRESSE A intensidade das franjas claras é dada por

$$I = I_m \frac{\text{sen}^2 \alpha}{\alpha^2}$$

na qual I_m é a intensidade máxima e $\alpha = (\pi a/\lambda)$ sen θ. O ângulo θ é medido em relação à direção perpendicular ao plano da fenda.

ANALISE (a) Para que $I = I_m/2$, devemos ter

$$\text{sen}^2 \alpha = \frac{1}{2}\alpha^2.$$

(b) Para fazer a verificação pedida, calculamos sen^2 α e $\alpha^2/2$ para $\alpha = 1{,}39$ rad e comparamos os resultados. Para ter certeza de que 1,39 está mais próximo do valor correto de α do que qualquer outro valor com três algarismos significativos, podemos repetir a comparação para 1,38 e 1,40 rad.

(c) Como $\alpha = (\pi a/\lambda)$ sen θ,

$$\theta = \text{sen}^{-1}\left(\frac{\alpha\lambda}{\pi a}\right).$$

Como $\alpha/\pi = 1{,}39/\pi = 0{,}442$,

$$\theta = \text{sen}^{-1}\left(\frac{0{,}442\lambda}{a}\right).$$

A distância angular entre os dois pontos de meia intensidade, um de cada lado do máximo central, é

$$\Delta\theta = 2\theta = 2\,\text{sen}^{-1}\left(\frac{0{,}442\lambda}{a}\right).$$

(d) Para $a/\lambda = 1{,}0$,

$$\Delta\theta = 2\,\text{sen}^{-1}(0{,}442/1{,}0) = 0{,}916\,\text{rad} = 52{,}5^\circ.$$

(e) Para $a/\lambda = 5{,}0$,

$$\Delta\theta = 2\,\text{sen}^{-1}(0{,}442/5{,}0) = 0{,}177\,\text{rad} = 10{,}1^\circ.$$

(f) Para $a/\lambda = 10$,

$$\Delta\theta = 2\,\text{sen}^{-1}(0{,}442/10) = 0{,}0884\,\text{rad} = 5{,}06^\circ.$$

APRENDA Como mostra a Fig. 36-8, quanto mais larga é a fenda em relação ao comprimento de onda, mais estreito é o máximo de difração central.

36-21

PENSE Podemos usar o critério de Rayleigh para estimar a distância pedida.

EXPRESSE Se L é a distância entre o observador e os objetos, a menor distância D que pode ser resolvida é $D = L\theta_R$, na qual θ_R é expresso em radianos.

ANALISE (a) Na aproximação de pequenos ângulos, $\theta_R = 1{,}22\lambda/d$, em que λ é o comprimento de onda e d é o diâmetro da abertura. Assim,

$$D = \frac{1{,}22\,L\lambda}{d} = \frac{1{,}22\left(8{,}0\times10^{10}\text{ m}\right)\left(550\times10^{-9}\text{ m}\right)}{5{,}0\times10^{-3}\text{ m}} = 1{,}1\times10^{7}\text{ m} = 1{,}1\times10^{4}\text{ km}.$$

Como esta distância é maior que o diâmetro de Marte, o planeta não pode ser visto como um disco de tamanho finito a olho nu.

(b) Nesse caso, $d = 5{,}1$ m e

$$D = \frac{1{,}22\left(8{,}0\times10^{10}\text{ m}\right)\left(550\times10^{-9}\text{ m}\right)}{5{,}1\text{ m}} = 1{,}1\times10^{4}\text{ m} = 11\text{ km}.$$

APRENDA De acordo com o critério de Rayleigh, para que dois objetos possam ser resolvidos, a distância angular entre os objetos, do ponto de vista do observador, deve ser maior que $\theta_R = 1{,}22\lambda/d$.

36-43

PENSE No caso de fendas relativamente largas, as franjas de interferência produzidas em um experimento de dupla fenda não têm a mesma intensidade por causa de efeitos de difração.

EXPRESSE A posição angular θ das franjas claras de interferência é dada por d sen $\theta = m\lambda$, na qual d é a distância entre as fendas, λ é o comprimento de onda e m é um número inteiro. O primeiro mínimo de difração acontece para um ângulo θ_1 dado por a sen $\theta_1 = \lambda$, sendo a a largura das fendas. Como o máximo central da figura de difração vai de $-\theta_1$ a $+\theta_1$, precisamos determinar o número de valores de m para os quais $-\theta_1 < \theta < +\theta_1$, ou seja, o número de valores de m para os quais

$$-\text{sen}\,\theta_1 < \text{sen}\,\theta < +\text{sen}\,\theta_1.$$

Fazendo sen $\theta = m\lambda/d$ e sen $\theta_1 = \lambda/a$ nessa desigualdade fornecida e multiplicando por d/λ, obtemos a seguinte desigualdade:

$$-d/a < m < +d/a$$

A intensidade da luz na tela é dada por

$$I = I_m\left(\cos^2\beta\right)\left(\frac{\text{sen}\,\alpha}{\alpha}\right)^2$$

em que $\alpha = (\pi a/\lambda)$ sen θ, $\beta = (\pi d/\lambda)$ sen θ e I_m é a intensidade máxima.

ANALISE (a) De acordo com os dados do problema,

$$d/a = (0{,}150\times10^{-3}\text{ m})/(30{,}0\times10^{-6}\text{ m}) = 5{,}00$$

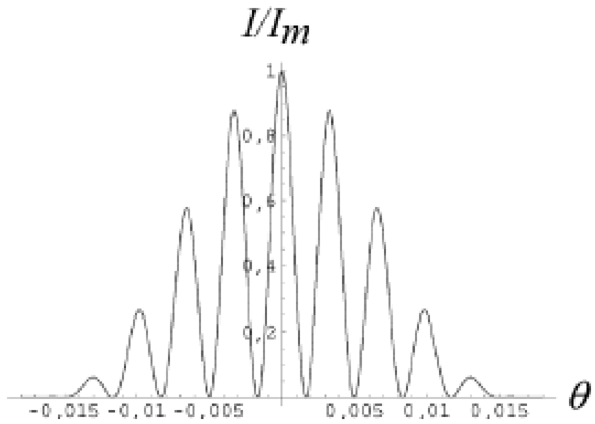
e, portanto, os valores de m que satisfazem a essa desigualdade fornecida são $m = -4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3$ e $+4$. Existem, portanto, 9 franjas claras no máximo central da figura de difração.

(b) No caso da terceira franja clara, d sen $\theta = 3\lambda$ e, portanto, $\beta = 3\pi$ rad e $\cos^2\beta = 1$. Além disso, $\alpha = 3\pi a/d = 3\pi/5{,}00 = 0{,}600\pi$ rad e

$$\left(\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha}\right)^2 = \left(\frac{\operatorname{sen}0{,}600\pi}{0{,}600\pi}\right)^2 = 0{,}255.$$

A razão entre as intensidades é, portanto, $I/I_m = 0{,}255$.

APRENDA A expressão da intensidade envolve dois fatores: (1) o fator de interferência $\cos^2\beta$, devido à interferência entre fendas separadas por uma distância d, e (2) o fator de difração $[(\operatorname{sen}\alpha)/\alpha]^2$, devido à difração causada por fendas de largura a. No limite $a \to 0$, $(\operatorname{sen}\alpha)/\alpha \to 1$ e obtemos a Eq. 35-22, que descreve a interferência entre duas fendas de largura desprezível separadas por uma distância d. Por outro lado, fazendo $d = 0$, $\cos^2\beta = 0$ e obtemos a Eq. 36-5, que descreve a difração de uma única fenda de largura a. A figura a seguir mostra um gráfico da intensidade relativa em função de θ.



36-49

PENSE Os máximos da figura produzida por uma rede de difração acontecem para os ângulos θ dados por d sen $\theta = m\lambda$, em que d é a distância entre as fendas, λ é o comprimento de onda e m é um número inteiro.

EXPRESSE A diferença entre os números de ordem de duas linhas vizinhas é sempre igual a um. Seja m o número de ordem da linha com sen $\theta = 0{,}2$ e seja $m + 1$ o número de ordem da linha com sen $\theta = 0{,}3$. Nesse caso,

$$0{,}2\,d = m\lambda, \quad 0{,}3\,d = (m+1)\lambda.$$

ANALISE (a) Subtraindo a primeira equação da segunda, obtemos $0{,}1d = \lambda$, ou

$$d = \lambda/0{,}1 = (600 \times 10^{-9}\text{ m})/0{,}1 = 6{,}0 \times 10^{-6}\text{ m}.$$

(b) Os mínimos da figura de difração de uma fenda acontecem para ângulos θ dados por a sen $\theta = m\lambda$, em que a é a largura da fenda. Como os máximos de interferência de quarta ordem estão ausentes, devem corresponder a um desses ângulos. Se a é a menor largura de fenda para a qual esta ordem está ausente, o ângulo é dado por a sen $\theta = \lambda$. Como o mesmo ângulo também é dado por d sen $\theta = 4\lambda$, temos:

$$a = d/4 = (6{,}0 \times 10^{-6}\text{ m})/4 = 1{,}5 \times 10^{-6}\text{ m}.$$

(c) Em primeiro lugar, fazemos $\theta = 90°$ e determinamos o maior valor de m para o qual $m\lambda < d$ sen θ. Esta é a maior ordem que é difratada em direção à tela. A condição pode ser escrita na forma $m < d/\lambda$ e como

$$d/\lambda = (6{,}0 \times 10^{-6}\text{ m})/(600 \times 10^{-9}\text{ m}) = 10{,}0.$$

A maior ordem que pode ser observada é a ordem $m = 9$. Como a quarta e a oitava ordens estão ausentes, as ordens observáveis são $m = 0, 1, 2, 3, 5, 6, 7$ e 9. O maior valor do número de ordem é, portanto, $m = 9$.

(d) De acordo com o resultado do item (c), o segundo maior valor do número de ordem é $m = 7$.

(e) De acordo com o resultado do item (c), o terceiro maior valor do número de ordem é $m = 6$.

APRENDA Os máximos de interferência acontecem para d sen $\theta = m\lambda$, enquanto os mínimos de difração acontecem para a sen $\theta = m'\lambda$. Assim, o máximo de interferência de ordem m pode coincidir com o mínimo de difração de ordem m'. Os valores de m para os quais isso acontece são dados por

$$\frac{d\,\text{sen}\,\theta}{a\,\text{sen}\,\theta} = \frac{m\lambda}{m'\lambda} \Rightarrow m = \left(\frac{d}{a}\right)m'.$$

Como $m = 4$ quando $m' = 1$, concluímos que $d/a = 4$. Assim, $m = 8$ corresponde ao segundo mínimo de difração ($m' = 2$).