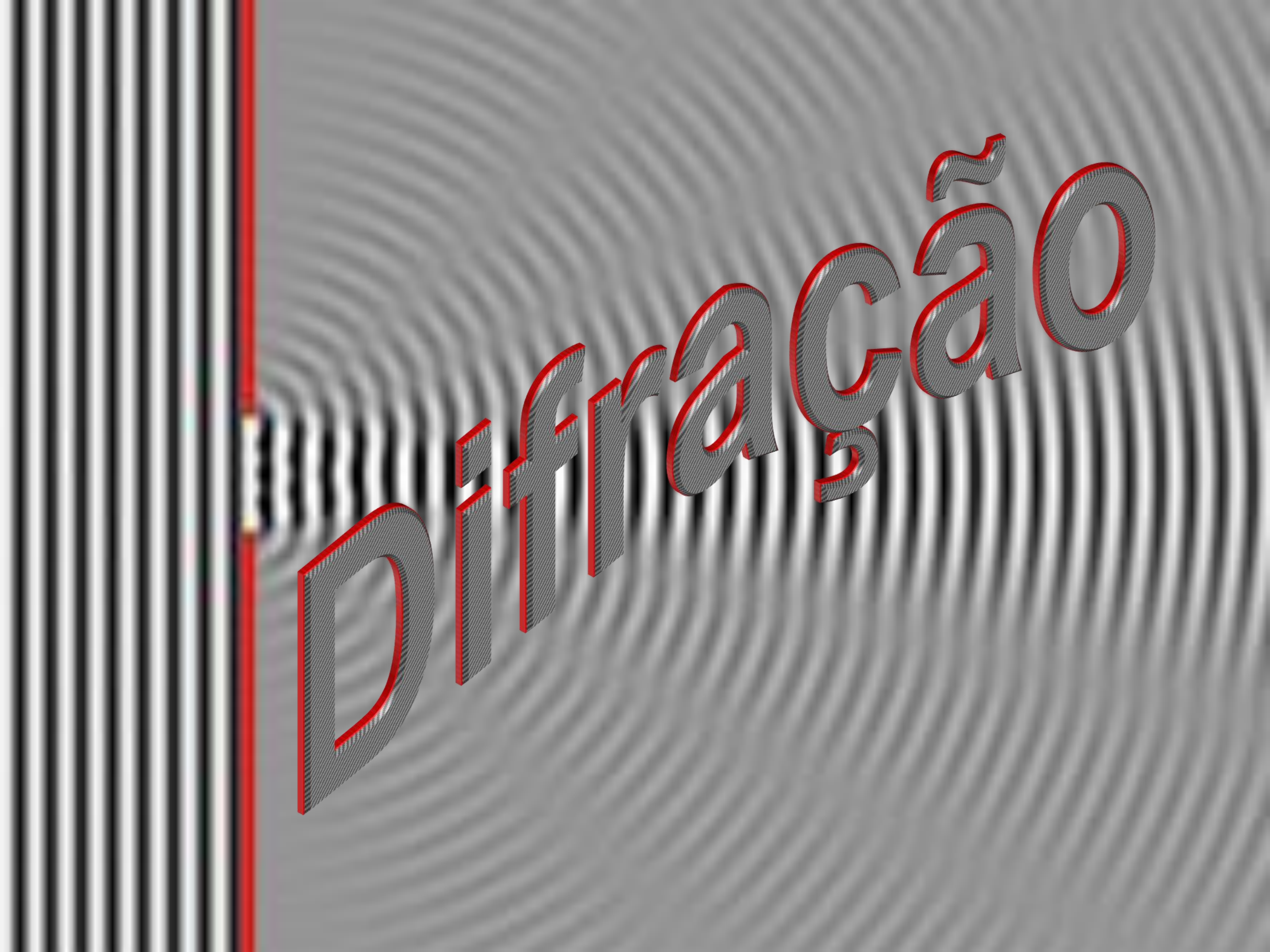
Difração

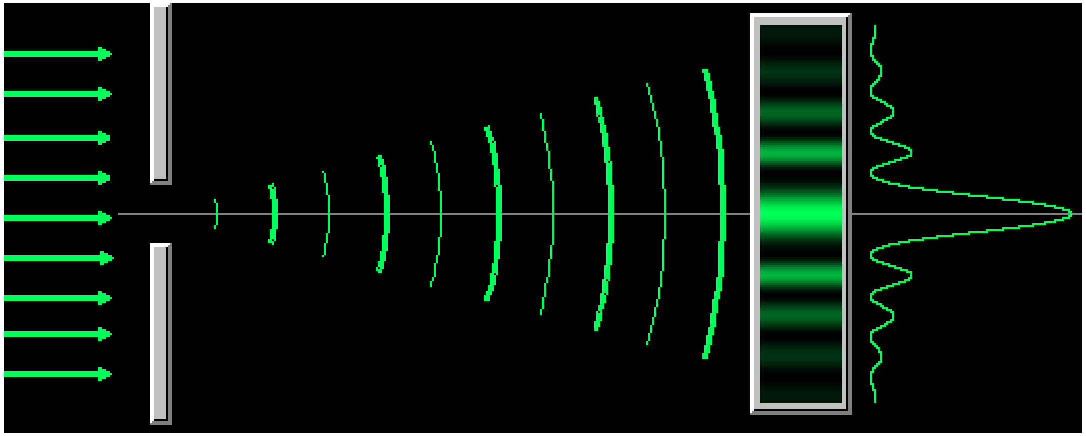


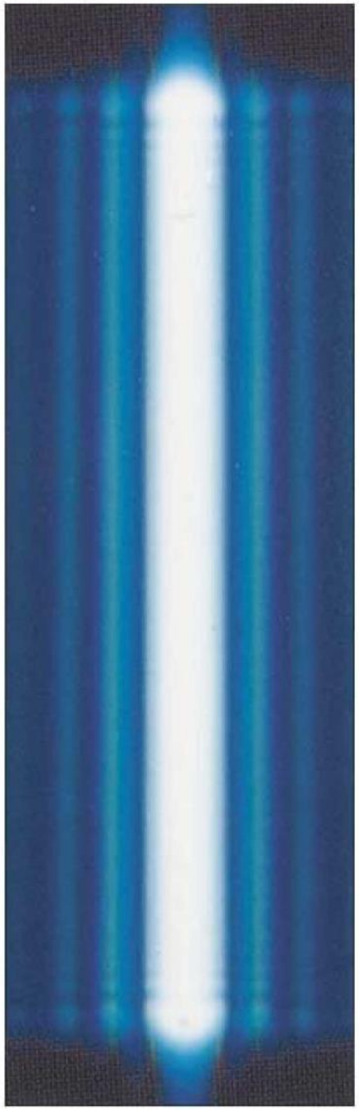
INTRODUÇÃO

Esta figura aparece quando a luz passa por uma fenda vertical estreita.

O motivo: o fenômeno denominado Difração

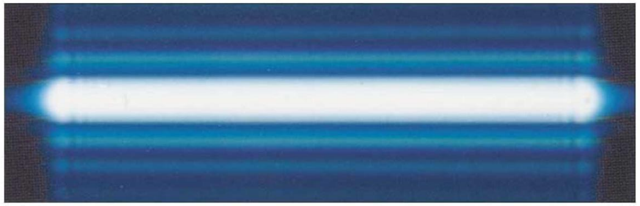
A difração faz com que feixes luminosos se alarguem perpendicularmente à maior dimensão da fenda, produzindo uma figura de interferência constituída por um máximo central e máximos secundários (ou laterais) menos intensos, separados por mínimos.



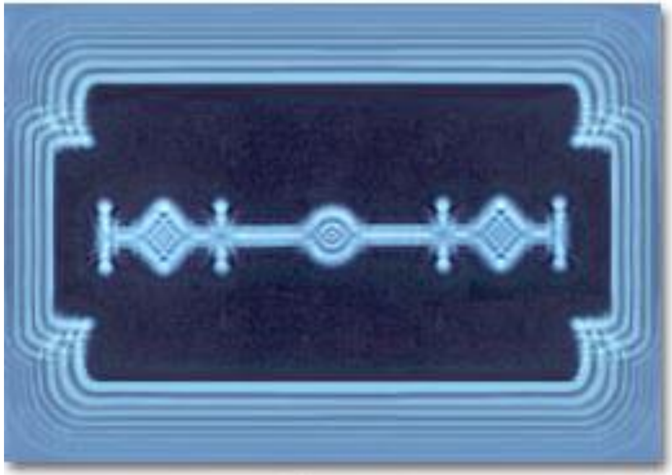


A DIFRAÇÃO E A TEORIA ONDULATÓRIA DA LUZ

A difração é um **fenômeno essencialmente ondulatório**, ou seja, acontece porque a luz se comporta como uma onda.

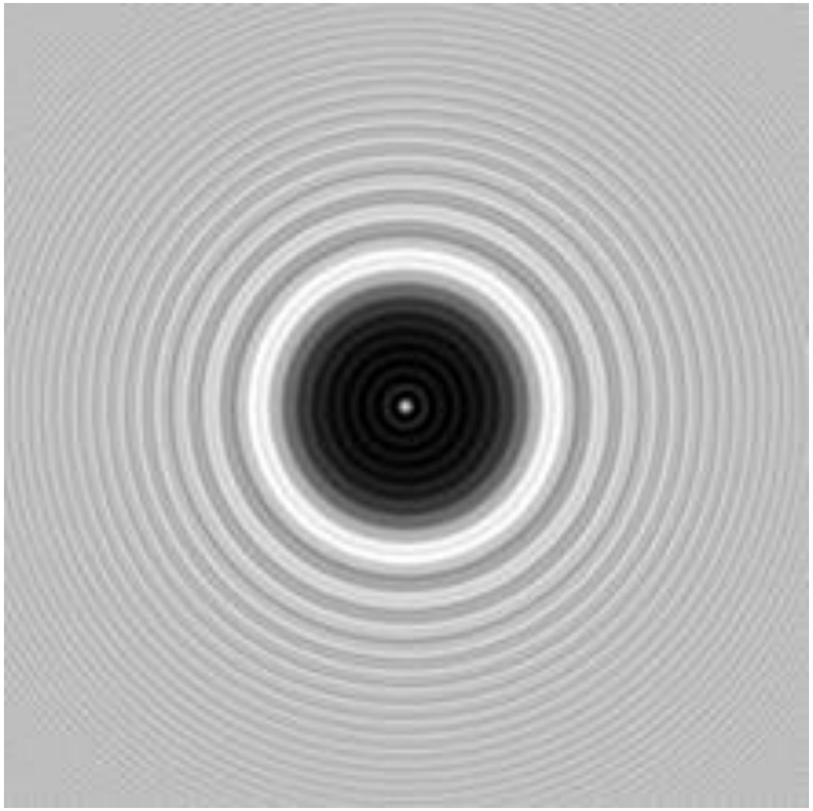


A difração pode ser definida, sem muito rigor, como o **alargamento de um feixe** luminoso ao passar por uma fenda estreita. Mas, **algo mais acontece**, já que a difração, além de alargar um feixe luminoso, produz uma série de franjas claras e escuras que constituem a chamada **figura de difração.**



Na figura se observa a difração produzida por uma lâmina de barbear iluminada com luz monocromática.
Observe as linhas alternadamente claras e escuras paralelas às bordas da lâmina.

O PONTO CLARO DE FRESNEL



Fotografia da figura de difração produzida por um disco.
Observe os anéis de difração concêntricos e o ponto claro de Fresnel no centro.
Este experimento é praticamente igual ao que foi realizado pela comissão julgadora para testar a teoria de Fresnel, pois tanto a esfera usada pela comissão como o disco usado para obter esta foto possuem uma seção reta com uma borda circular.

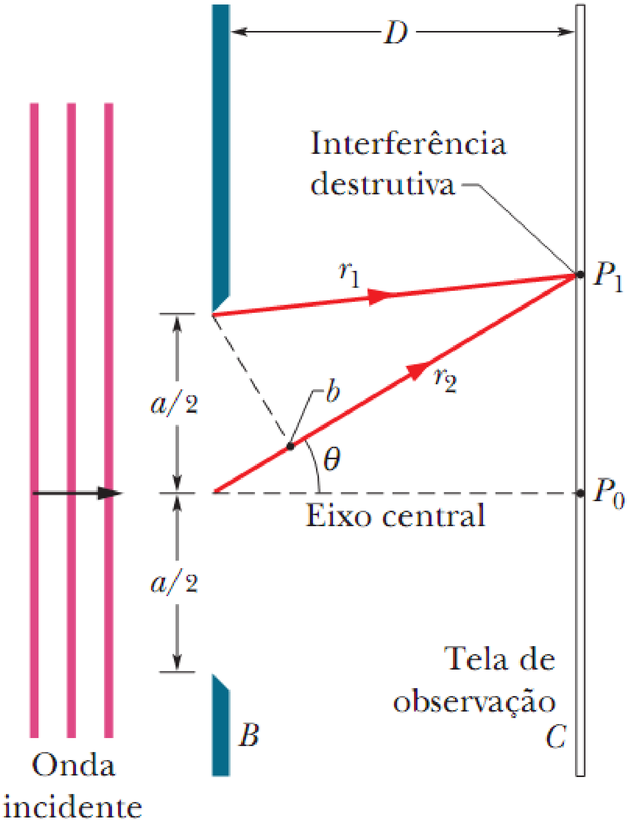
Pode ser observado em esferas também. As ondas luminosas são desviadas ao passarem pela borda da esfera, produzindo um ponto claro no centro da sombra, conhecido como Ponto Claro de Fresnel.
Vamos analisar primeiro, detalhadamente, o fenômeno de difração numa fenda...

DIFRAÇÃO POR UMA FENDA: OS MÍNIMOS

Vamos supor uma fenda, de largura a, iluminada por um feixe de luz monocromático com frente de onda plana (figura)

Dividimos mentalmente a fenda em duas regiões da mesma largura *a/2.*

Estendemos até P_1 um raio luminoso r_1 proveniente da extremidade superior da região de cima e um raio luminoso r_2 proveniente da extremidade superior da região de baixo.



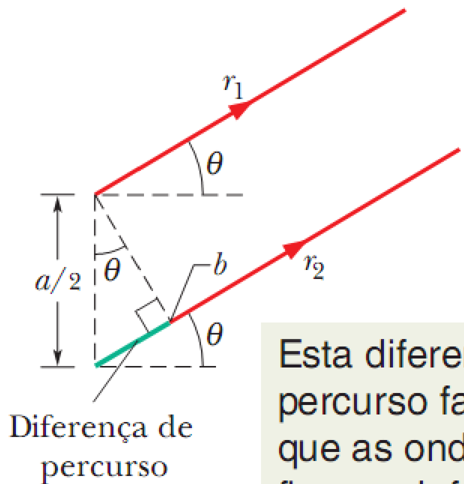
Os raios provenientes destas extremidades sofrem interferência no ponto P_1 da tela de observação C.

Vamos considerar que a distância D desde a fenda até a tela de observação é muito maior que a largura da fenda, ou seja:

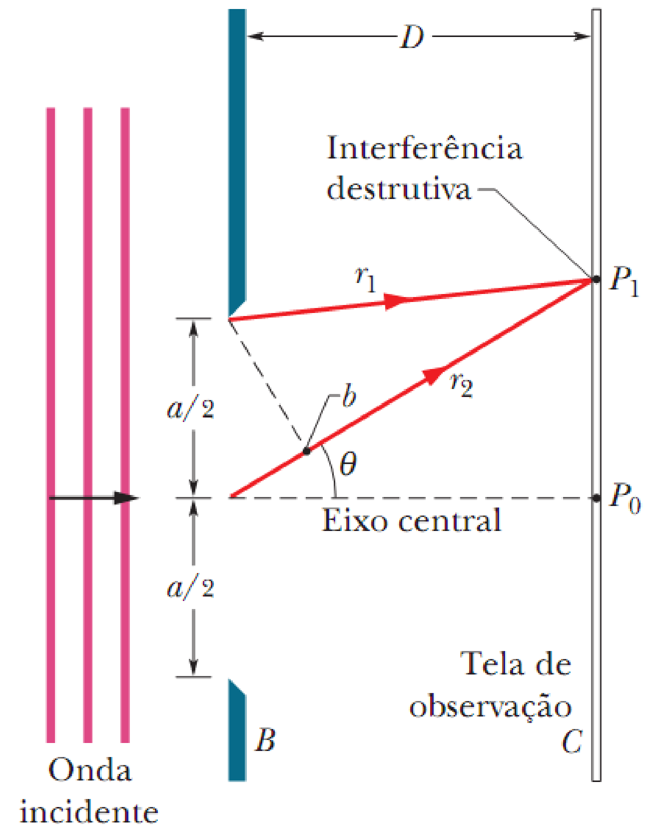
$$D>>a$$

Nesse caso podemos supor que r_1 e r_2 são paralelos e simplificar as contas, vejamos...

DIFRAÇÃO POR UMA FENDA: OS MÍNIMOS



Esta diferença de percurso faz com que as ondas fiquem defasadas, o que causa interferência.



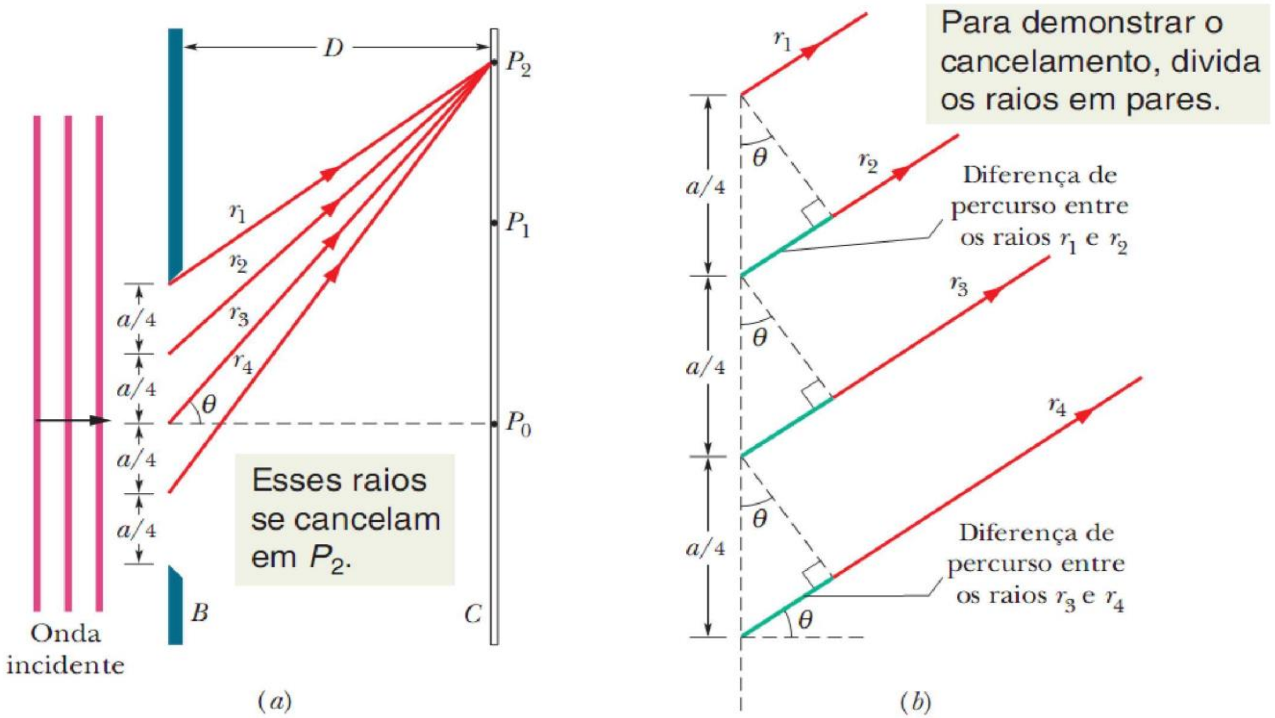
No caso onde D>>a, para que haja interferência destrutiva no ponto P_1 devemos ter:

$$\frac{a}{2}\,\mathrm{sen}\,\theta = \frac{\lambda}{2}$$

$$a\,\mathrm{sen}\,\theta = \lambda \qquad \text{(primeiro mínimo)}$$

DIFRAÇÃO POR UMA FENDA: OS MÍNIMOS

A posição da segunda franja escura pode ser determinada da mesma forma, exceto pelo fato de que agora, dividimos a fenda em quatro regiões de mesma largura, como mostra a figura



$$\frac{a}{4}\,\text{sen}\,\theta = \frac{\lambda}{2}$$

$$a\,\text{sen}\,\theta = m\lambda \qquad \text{para } m = 1, 2, 3, \ldots \quad \text{(mínimos; franjas escuras)}$$

$\rightarrow$ $a\,\text{sen}\,\theta = 2\lambda$

DIFRAÇÃO POR UMA FENDA: OS MÍNIMOS

Exemplo: Figura de difração de uma fenda iluminada com luz branca

Uma fenda de largura *"a"* é iluminada com luz branca. a) Para qual valor de *"a"* o **primeiro mínimo** para a luz vermelha, com λ = 650 nm, aparece em θ **= 15°?**

A difração ocorre separadamente para cada comprimento de onda presente na luz que passa pela fenda, com as localizações dos mínimos para cada comprimento de onda dadas pela equação: $a\,\mathrm{sen}\,\theta = m\lambda$.

Solução: Fazendo *m* = 1 na equação (já que se trata do primeiro mínimo) e usando os valores conhecidos de θ e λ, temos:

$$a = \frac{m\lambda}{\mathrm{sen}\,\theta} = \frac{(1)(650\ \mathrm{nm})}{\mathrm{sen}\ 15^\circ}$$

$$= 2511\ \mathrm{nm} \approx 2{,}5\ \mu\mathrm{m}. \qquad \text{(Resposta)}$$

DIFRAÇÃO POR UMA FENDA: OS MÍNIMOS

Exemplo: Figura de difração de uma fenda iluminada com luz branca

O resultado mostra que: para que o espalhamento da luz incidente seja tão grande (± 15° até o primeiro mínimo), é preciso que a fenda seja muito estreita, da ordem de apenas quatro vezes o comprimento de onda. Observe, para efeito de comparação, que um cabelo humano tem entre 60 e 140 μm de diâmetro (comparado com 0,650 μm do comprimento de onda)

(b) Qual é o comprimento de onda λ da luz, cujo **primeiro máximo** secundário está em 15°, coincidindo assim com o primeiro mínimo para a luz vermelha?

Para qualquer comprimento de onda, o primeiro máximo secundário de difração fica aproximadamente a meio caminho entre o primeiro e o segundo mínimo (fato que decorre de observar a figura de difração).

Aqui cabe o estudante tentar responder por que não é possível utilizar o mesmo procedimento apresentado no slide 6, modificando a condição de mínimo para máximo...

DIFRAÇÃO POR UMA FENDA: OS MÍNIMOS

Exemplo: Figura de difração de uma fenda iluminada com luz branca

Solução: As posições do primeiro e segundo mínimos são dadas pela equação:

$$a \ \text{sen}\,\theta = m\lambda \qquad \text{com } m = 1 \text{ e } m = 2$$

Isso significa que a posição *aproximada* do primeiro máximo secundário pode ser obtida fazendo *m* = 1,5 nessa equação. Então:

$$a \ \text{sen}\ \theta = 1{,}5\lambda'$$

Esse comprimento de onda corresponde a uma luz violeta. Demonstre que o primeiro máximo secundário para uma luz com um comprimento de onda de 430 nm sempre coincide com o primeiro mínimo para uma luz com um comprimento de onda de 650 nm, qualquer que seja a largura da fenda. Por outro lado, o ângulo θ, para o qual são observados esse máximo e esse mínimo, depende da largura da fenda. Quanto mais estreita a fenda, maior o valor de θ, e vice-versa.

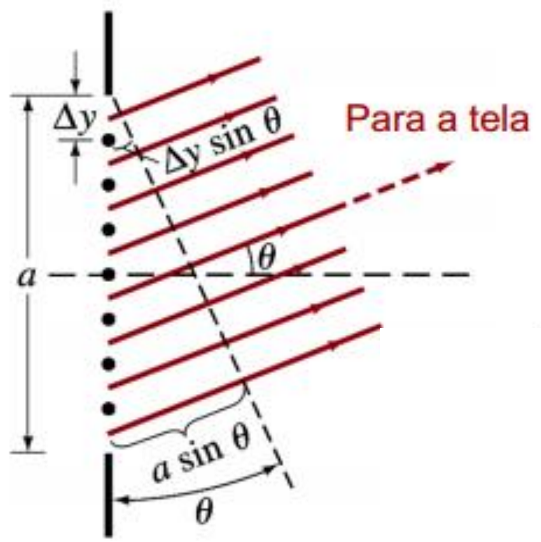
$$\lambda' = \frac{a \ \text{sen}\,\theta}{1{,}5} = \frac{(2511\ \text{nm})(\text{sen}\ 15°)}{1{,}5} = 430\ \text{nm}.$$

Até aqui falamos da posição, mas nada falamos da intensidade... vamos tentar calcular a intensidade das franjas...

MÉTODO QUALITATIVO

Vamos achar a intensidade das franjas. Para isso a fenda é dividida em N zonas.

Vamos superpor as ondas destas pequenas zonas que chegam a um ponto na tela sob um ângulo θ.



Vamos determinar a amplitude E_0 do campo elétrico resultante neste ponto.

Para isso precisamos das diferenças de fases entre os feixes de cada zona que é:

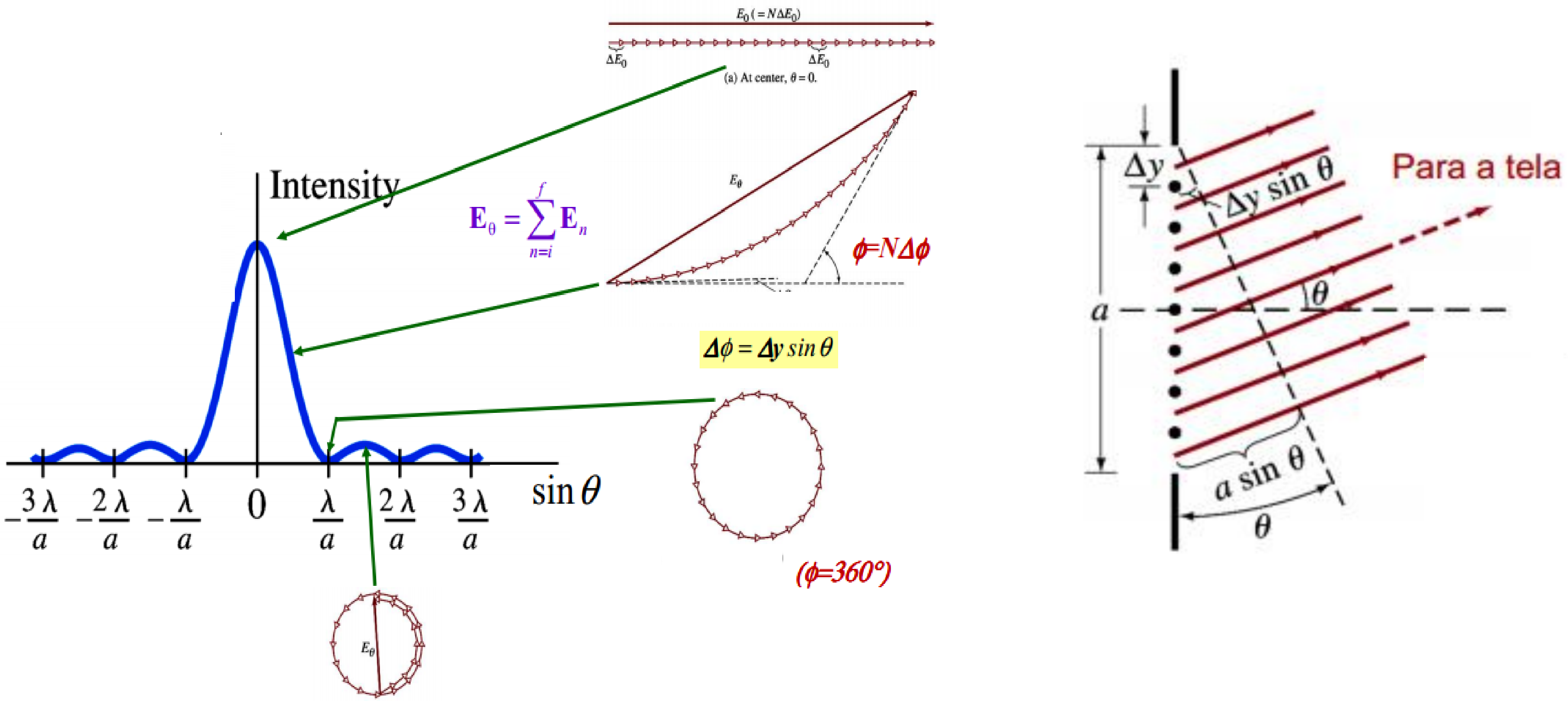
$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta L$$

MÉTODO QUALITATIVO

Considerando que o tamanho das zonas seja Δx teremos:

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta x \; sen \; \theta$$

Agora somamos os fasores (diagrama com N fasores) e obtemos o campo resultante nas diferentes posições na tela de observação...



Vamos obter a equação da intensidade em função de a, λ e θ...

MÉTODO QUANTITATIVO: EQUAÇÕES

O ângulo ϕ da figura é o ângulo entre os dois raios *R.* A linha tracejada, que é a bissetriz de ϕ, forma dois triângulos iguais.

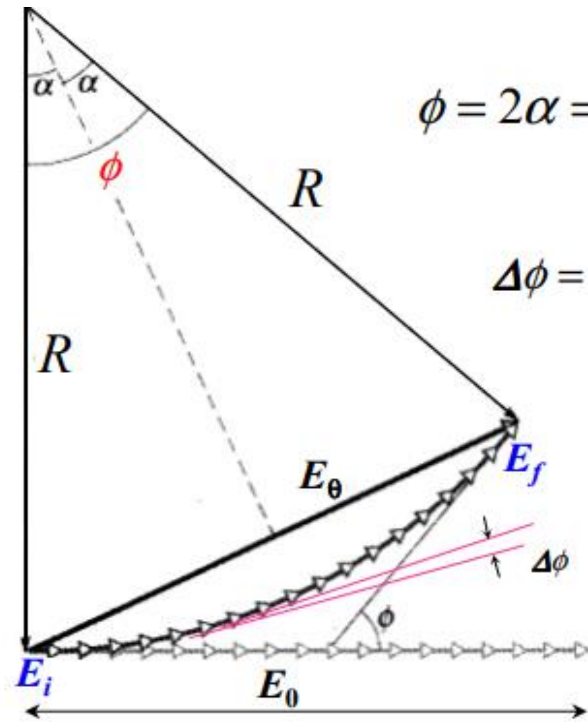
$$\operatorname{sen} \tfrac{1}{2}\phi = \frac{E_\theta}{2R}.$$

$$\phi = \frac{E_m}{R}.$$

$$E_\theta = \frac{E_m}{\frac{1}{2}\phi} \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}\phi$$

$$\frac{I(\theta)}{I_m} = \frac{E_\theta^2}{E_m^2}$$

$$I(\theta) = I_m \left(\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\alpha} \right)^2.$$



$$\phi = 2\alpha = \frac{2\pi}{\lambda} a \sin\theta$$

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta y \sin\theta$$

A diferença de fase ϕ entre os raios das zonas dos extremos da fenda será = a sen θ e como $\alpha = \phi/2$ substituindo obtemos a 2º equação:

$$\alpha = \tfrac{1}{2}\phi = \frac{\pi a}{\lambda} \operatorname{sen}\theta$$

MÉTODO QUANTITATIVO: EQUAÇÕES

Desta forma:

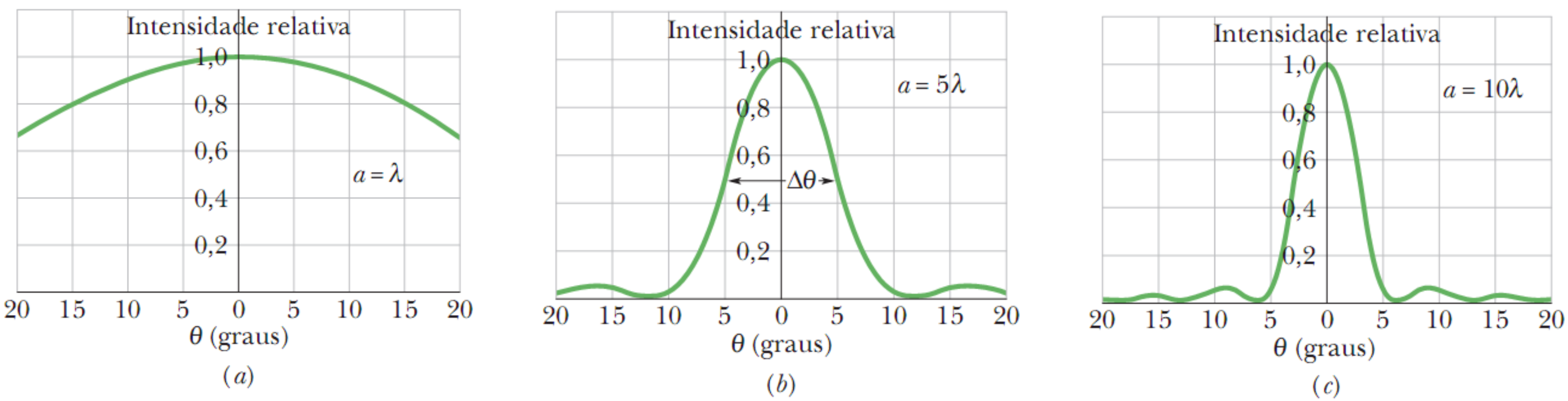
A intensidade é: $$I(\theta) = I_m\left(\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha}\right)^2$$ em que $$\alpha = \tfrac{1}{2}\phi = \frac{\pi a}{\lambda}\operatorname{sen}\theta$$

Os **mínimos** são dados por $\alpha = m\,\pi$ para m = 1,2,3,. . . ou seja:

$$m\pi = \frac{\pi a}{\lambda}\operatorname{sen}\theta \qquad \text{para } m = 1, 2, 3, \ldots$$

a sen $\theta = m\lambda$ para m = 1,2,3,.. . (mínimos; franjas escuras)

A largura dos picos de difração depende criticamente da relação a/λ...



Intensidade relativa da figura de difração de uma fenda para três valores da razão *a/λ*. Quanto maior e a fenda, mais estreito e o máximo central

MÉTODO QUANTITATIVO: EQUAÇÕES

UFPR UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

Resolver: Intensidades dos Máximos de Difração em uma Fenda

Determine as intensidades dos três primeiros máximos secundários de uma figura de difração, expressas como porcentagens da intensidade do máximo central.

Os máximos secundários estão aproximadamente a meio caminho entre os mínimos, cujas localizações são dadas pela equação (com $\alpha = m\pi$):

$$I(\theta) = I_m \left(\frac{\operatorname{sen} \alpha}{\alpha} \right)^2$$

Desta forma, as localizações dos máximos secundários são dadas (aproximadamente) por:

$\alpha = (m + \frac{1}{2})\pi$ para m=1,2,3,...,

em que α é medido em radianos.

MÉTODO QUANTITATIVO: EQUAÇÕES

Resolver: Intensidades dos Máximos de Difração em uma Fenda

Solução: Substituindo os valores aproximados de α para os máximos secundários na equação da intensidade, obtemos:

$$\frac{I}{I_m} = \left(\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha}\right)^2 = \left(\frac{\operatorname{sen}(m+\frac{1}{2})\pi}{(m+\frac{1}{2})\pi}\right)^2, \text{ para } m = 1, 2, 3, \ldots,$$

O primeiro máximo secundário corresponde a m=1 e sua intensidade relativa é:

$$\frac{I_1}{I_m} = \left(\frac{\operatorname{sen}(1+\frac{1}{2})\pi}{(1+\frac{1}{2})\pi}\right)^2 = \left(\frac{\operatorname{sen}1{,}5\pi}{1{,}5\pi}\right)^2$$

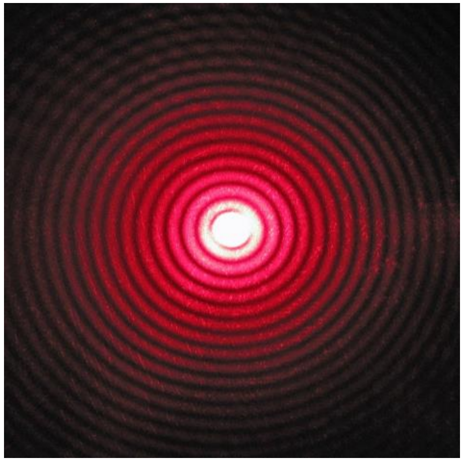
$$= 4{,}50 \times 10^{-2} \approx 4{,}5\%. \qquad \text{(Resposta)}$$

Para $m = 2$ e $m = 3$, obtemos:

$$\frac{I_2}{I_m} = 1{,}6\% \quad \text{e} \quad \frac{I_3}{I_m} = 0{,}83\%. \qquad \text{(Resposta)}$$

E se a fenda for circular (como a pupila do olho)....como fica?

DIFRAÇÃO POR UMA ABERTURA CIRCULAR

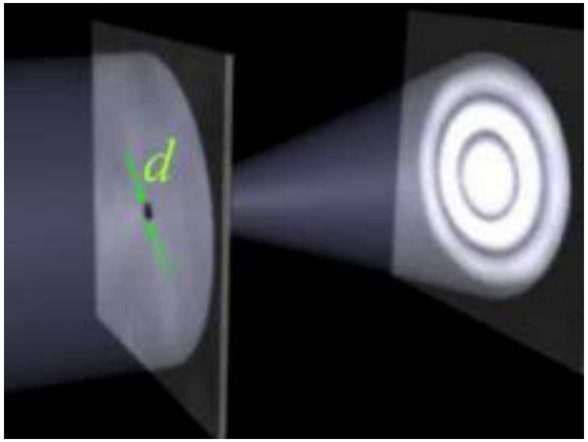


Figuras de difração de uma abertura circular. Observe o máximo central e os máximos secundários circulares.

As fotografias foram superexpostas para tornar mais visíveis os máximos secundários, que são muito menos intensos que o máximo central

$$\operatorname{sen}\theta = 1{,}22\,\frac{\lambda}{d} \qquad \text{(primeiro mínimo; abertura circular)}$$

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{\lambda}{a} \qquad \text{(primeiro mínimo; fenda única)}$$

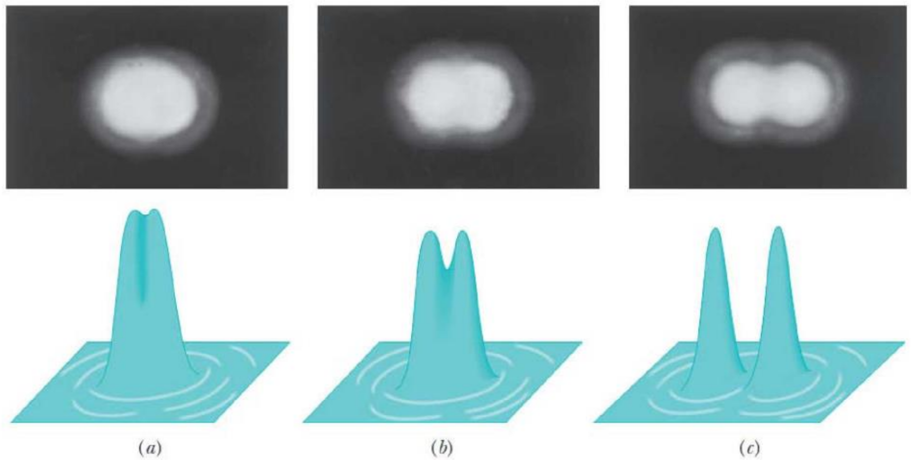


As equações são quase iguais, a não ser pelo fator 1,22 que decorre do tratamento matemático que neste caso (fenda circular) é mais complicado.

Uma questão mais interessante aqui é definir quando conseguimos distinguir duas fontes pontuais (tipo duas estrelas).

DIFRAÇÃO POR UMA ABERTURA CIRCULAR

Resolução



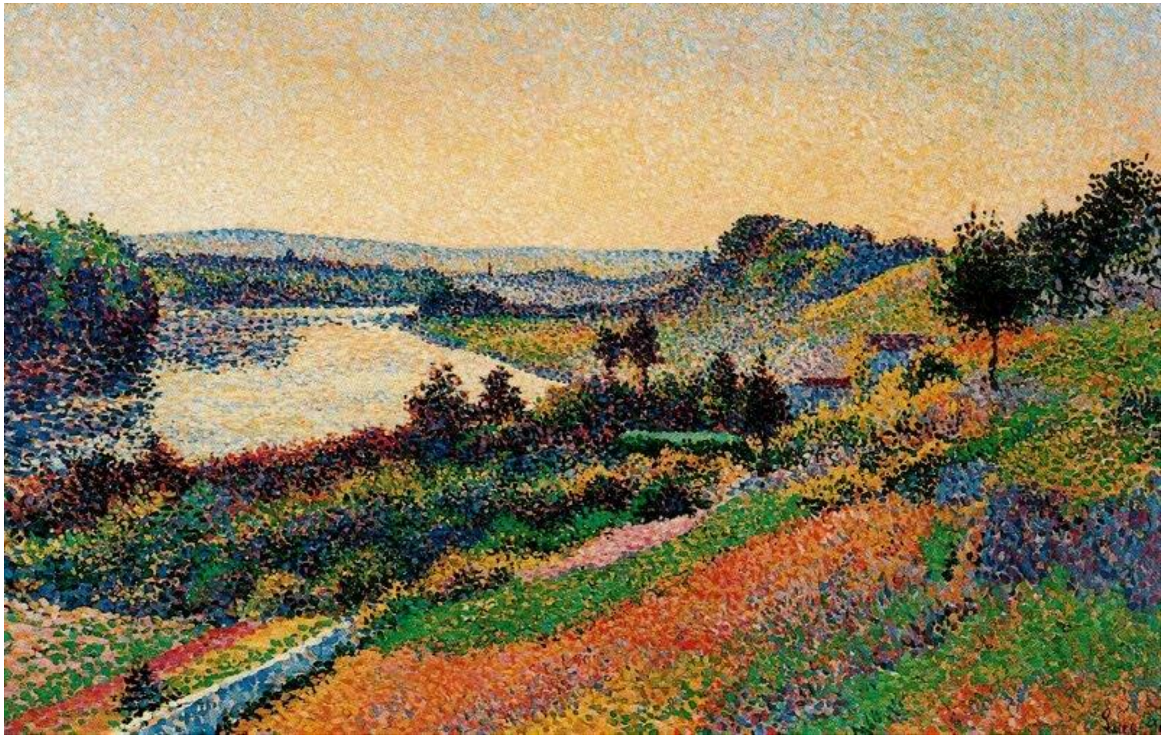
Em cima, imagens de duas fontes pontuais (estrelas) formadas por uma lente convergente. Embaixo, representações da intensidade das imagens. Em ***(a),*** a separação angular das fontes é pequena demais para que possam ser distinguidas; em *(b)* as fontes mal podem ser distinguidas; em (c), as fontes podem ser perfeitamente distinguidas. O critério de Rayleigh é satisfeito em *(b)*, com o máximo de uma das figuras de difração coincidindo com o mínimo da outra.

Dois objetos mal podem ser resolvidos quando a separação angular é:

$$\theta_R = 1{,}22\,\frac{\lambda}{d} \qquad \text{(critério de Rayleigh)}$$

DIFRAÇÃO POR UMA ABERTURA CIRCULAR

Resolução



A pintura pontilhista "*O Sena em Herblay*" de Maximilien Luce (1890), é formada por milhares de pontos coloridos.

Podemos ver os pontos e suas cores verdadeiras se examinamos a pintura de perto; À distância, porem, os pontos não podem ser resolvidos e as cores se misturam.

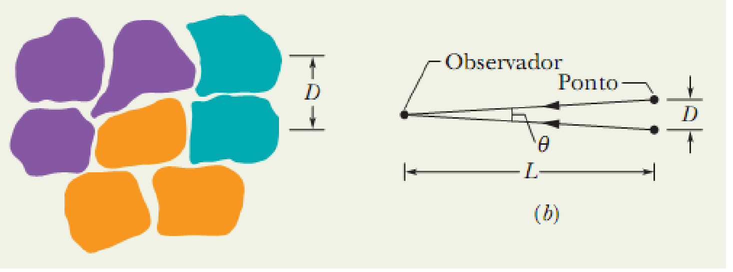
DIFRAÇÃO POR UMA ABERTURA CIRCULAR

UFPR
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

Exemplo: Pinturas Pontilhistas e a Difração da Pupila

A figura abaixo é uma vista ampliada dos pontos coloridos da pintura. Suponha que a distância média entre os centros dos pontos é D = 2,0 mm e que o diâmetro da pupila do olho do observador é d = 1,5 mm e que a menor separação angular entre os pontos que o olho pode resolver é dada pelo critério de Rayleigh.

Qual e a menor distância de observação na qual os pontos não podem ser resolvidos para nenhuma cor?



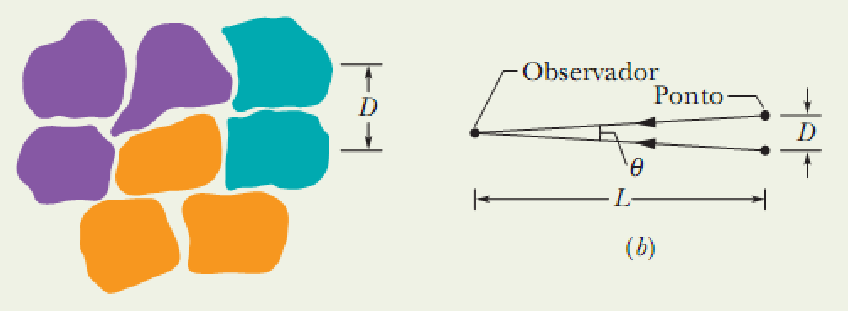
Considere dois pontos vizinhos que o observador é capaz de distinguir quando está próximo da pintura. Ao se afastar da pintura, o observador continua a distinguir os pontos até que a separação angular θ dos pontos seja igual ao ângulo dado pelo critério de Rayleigh:

$$\theta_R = 1{,}22\,\frac{\lambda}{d} \qquad \text{(critério de Rayleigh)}$$

DIFRAÇÃO POR UMA ABERTURA CIRCULAR

Exemplo: Pinturas Pontilhistas e a Difração da Pupila

Solução: a figura mostra, a separação angular θ dos pontos, a distancia *D* entre os centros dos pontos e a distancia *L* do observador.



Como a razão *D/L* é pequena, o angulo θ também é pequeno e podemos usar a seguinte aproximação:

$$\theta = \frac{D}{L}$$

Considerando que:

$$\theta_R = 1{,}22\frac{\lambda}{d}$$

obtemos:

$$L = \frac{Dd}{1{,}22\lambda}.$$

De acordo com a equação, quanto menor o valor de λ, maior o valor de *L*. Assim, quando o observador se afasta da pintura, os pontos vermelhos (a cor de maior comprimento de onda) se tornam indistinguíveis antes que os pontos azuis. Para calcular a menor distancia *L* na qual os pontos não podem ser resolvidos para *nenhuma* cor, fazemos λ = 400 nm (menor comprimento da luz visível, correspondente ao violeta). Substituindo os valores obtemos:

$$L = \frac{(2{,}0 \times 10^{-3}\ \text{m})(1{,}5 \times 10^{-3}\ \text{m})}{(1{,}22)(400 \times 10^{-9}\ \text{m})} = 6{,}1\ \text{m}.$$

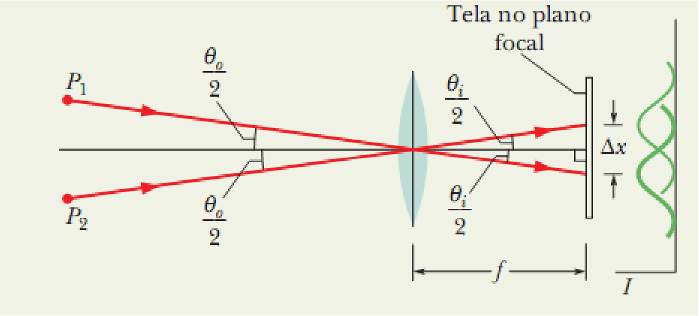
(Resposta)

CRITÉRIO DE RAYLEIGH

Exemplo: O Critério de Rayleigh para Resolver Dois Objetos Distantes

Uma lente convergente circular, de diâmetro *d* = 32 mm e distancia focal *f* = 24 cm, forma imagens de objetos pontuais distantes no plano focal da lente.

O comprimento de onda de luz considerada é λ = 550 nm.



(a) Considerando a difração introduzida pela lente, qual deve ser a separarão angular entre dois objetos pontuais distantes para que o critério de Rayleigh seja satisfeito?

Na figura a luz proveniente de dois objetos pontuais distantes, P_1 e P_2, passa por uma lente convergente e forma imagens em uma tela de observação no plano focal da lente.

Apenas um raio representativo de cada objeto é mostrado na figura.

As imagens não são pontos e sim figuras de difração, com intensidades como as representadas aproximadamente do lado direito em cor verde.

A separação angular dos objetos é θ_o e a separação angular das imagens é θ_i ; a distância entre os máximos centrais das imagens é Δx.

Exemplo: O Critério de Rayleigh para Resolver Dois Objetos Distantes

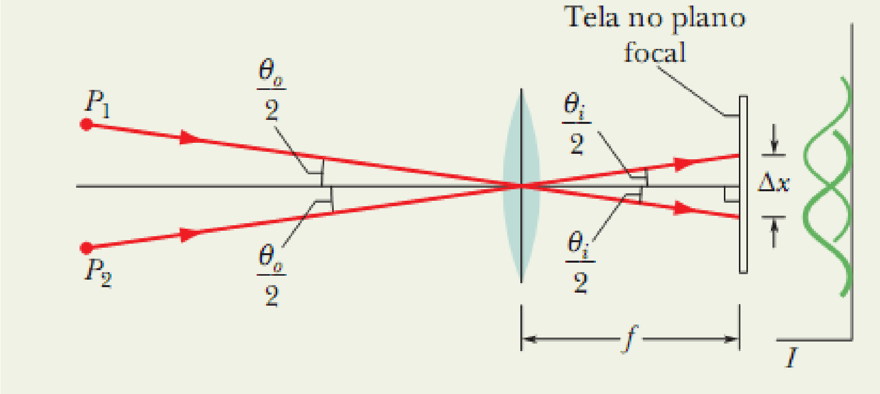
Solução: Substituindo os valores numéricos nas equações, temos:

$$\theta_o = \theta_i = \theta_R = 1{,}22\,\frac{\lambda}{d}$$

$$= \frac{(1{,}22)(550 \times 10^{-9}\ \text{m})}{32 \times 10^{-3}\ \text{m}} = 2{,}1 \times 10^{-5}\ \text{rad.}\quad \text{(Resposta)}$$

Para esta separação angular, o máximo central de cada uma das curvas de intensidade coincide com o primeiro mínimo da outra curva.

(b) Qual é a separação Δx dos centros das *imagens* no plano focal? (Ou seja, qual é a separação dos picos *centrais* das duas curvas?)



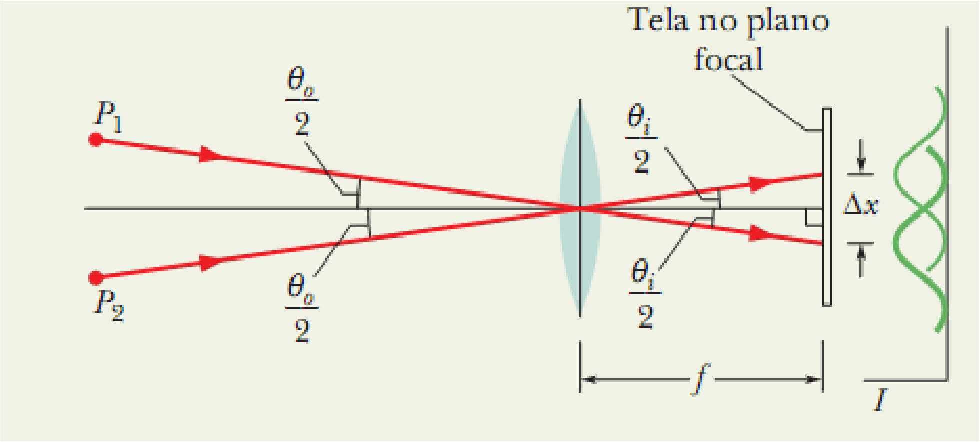
Exemplo: O Critério de Rayleigh para Resolver Dois Objetos Distantes

Solução:

Analisando o triângulo formado por um dos raios, o eixo central e a tela na figura, vemos que $tg(\theta_i/2) = \Delta x/2f$. Explicitando Δx e supondo que o angulo θ_i é suficientemente pequeno para que $tg\theta_i = \theta_i$, obtemos:

$$\Delta x = f\ \theta_i$$

onde θ_i é medido em radianos.



Substituindo f e θ_i por valores numéricos, temos:

$$\Delta x = (0{,}24\ \text{m})(2{,}1\ 10^{-5}\ \text{rad}) = 5{,}0\ \mu\text{m}.\ \text{(Resposta)}$$

DIFRAÇÃO EM DUAS FENDAS

UFPR UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

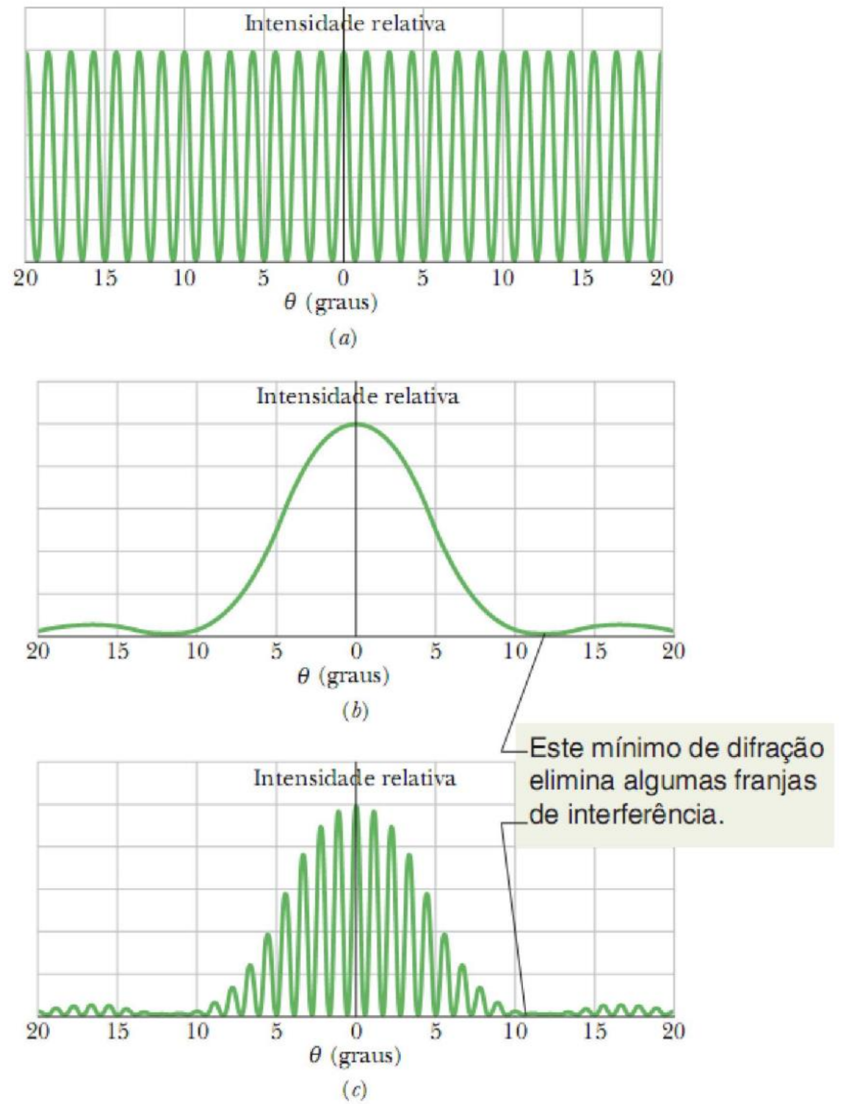
Difração por Duas Fendas

Teremos a superposição dos dois fenômenos: Interferência e difração...

(a) gráfico teórico da intensidade em um experimento de interferência com duas fendas infinitamente estreitas.

(b) Gráfico teórico da difração produzida por uma única fenda de largura finita.

(c) Gráfico teórico da intensidade em um experimento com duas fendas de largura finita.



DIFRAÇÃO EM DUAS FENDAS

Difração por Duas Fendas

A curva de (b) se comporta como uma envoltória, modulando a intensidade das franjas de (a).

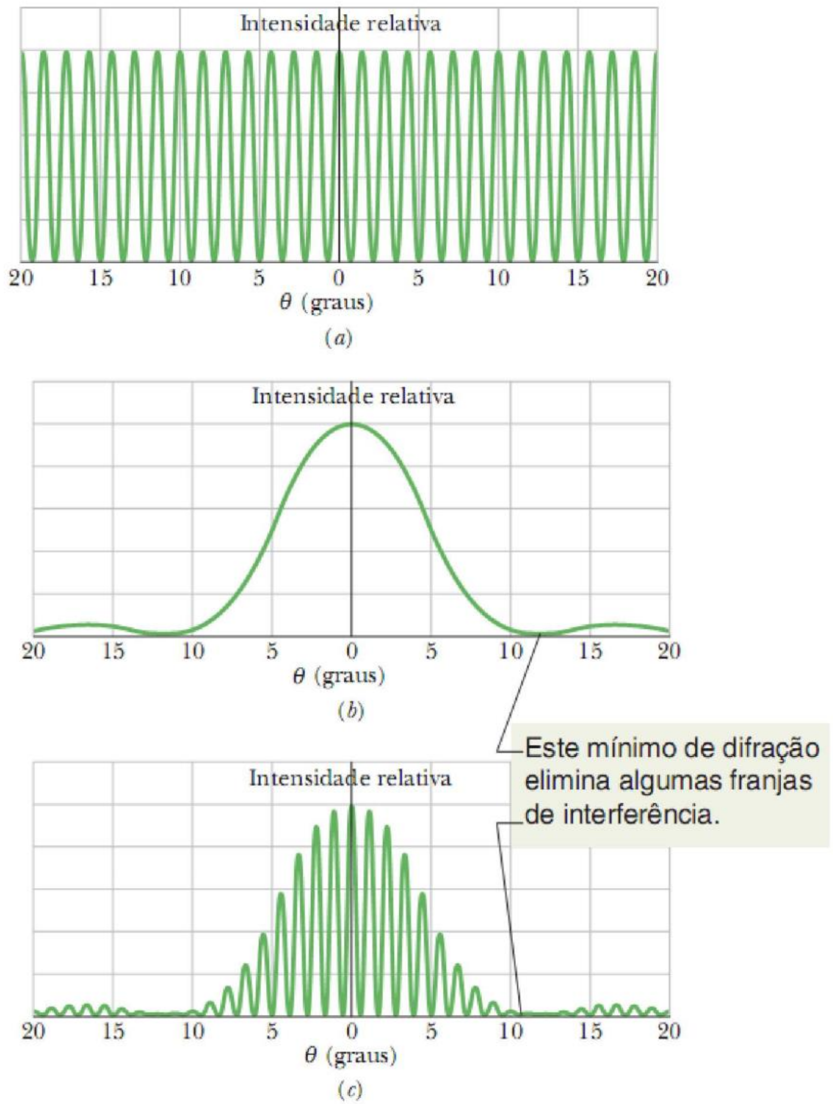
Observe que os primeiros mínimos da curva de difração de (b) eliminam as franjas de (a) que estariam presentes nas proximidades de 12º em (c).

A intensidade da figura de interferência e dada por

$$I(\theta) = I_m(\cos^2\beta)\left(\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\alpha}\right)^2$$

em que

$$\beta = \frac{\pi d}{\lambda}\operatorname{sen}\theta \quad \text{e} \quad \alpha = \frac{\pi a}{\lambda}\operatorname{sen}\theta$$

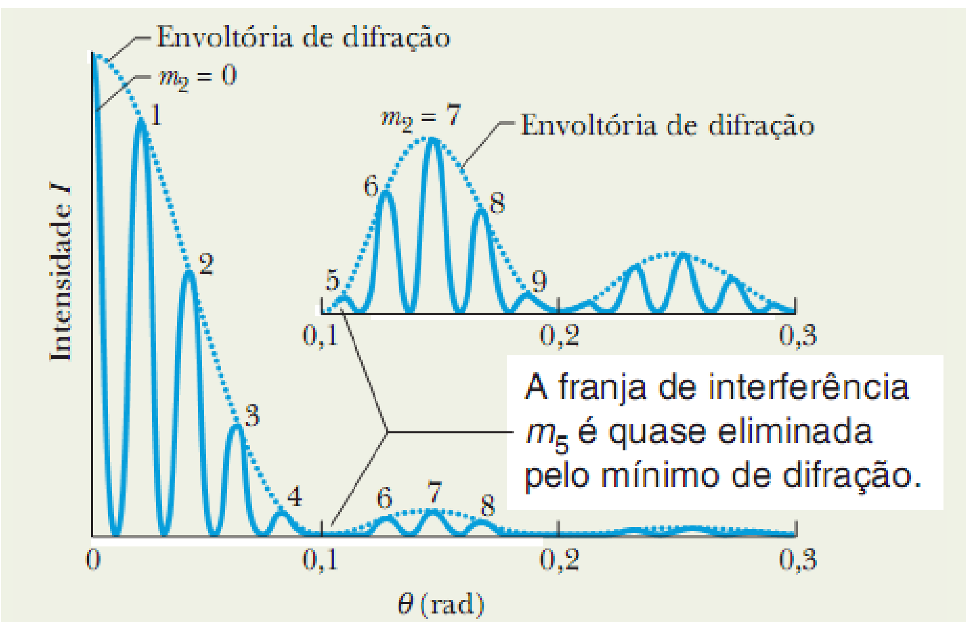


DIFRAÇÃO EM DUAS FENDAS

Exemplo: Experimento de Dupla Fenda Levando em Conta os Efeitos de Difração

Em um experimento de dupla fenda, o comprimento de onda λ da luz incidente é 0,405 μm, a distancia *d* entre as fendas e 19,44 μm e a largura *"a"* das fendas é 4,050 μm. Considere a interferência da luz que passa pelas duas fendas e também a difração da luz nas fendas.

(a) Quantas franjas claras podem ser observadas no pico central da envoltória de difração?



Na figura se observa a metade do gráfico de intensidade em um experimento de interferência de duas fendas; a envoltória de difração está indicada por uma linha pontilhada. A curva menor mostra (com a escala vertical expandida) o gráfico de intensidade para os dois primeiros picos secundários da envoltória de difração.

DIFRAÇÃO EM DUAS FENDAS

Exemplo: Experimento de Dupla Fenda Levando em Conta os Efeitos de Difração

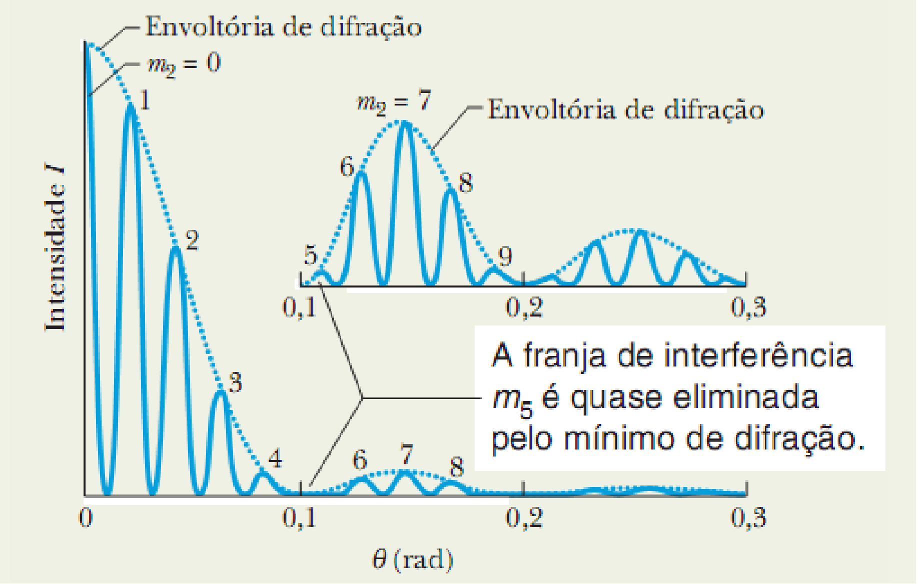
1. ***Difração nas fendas:*** Os limites do pico central são os primeiros mínimos da figura de difração produzida isoladamente por uma das fendas. A posição desses mínimos e dada pela equação: $a \text{ sen } \theta = m\lambda$.

   Vamos escrever esta equação na forma: $a \text{ sen } \theta = m_1\lambda$, onde o índice 1 mostra que se trata de difração por uma fenda.

   Para obter a localização dos primeiros mínimos, fazemos $m_1 = 1$.

   O resultado é o seguinte:

   $a \text{ sen } \theta = \lambda$ *(1er mínimo)*



DIFRAÇÃO EM DUAS FENDAS

Exemplo: Experimento de Dupla Fenda Levando em Conta os Efeitos de Difração

2. *Interferência nas duas fendas*: A posição das franjas claras em uma figura de interferência de duas fendas e dada por:

$$d \text{ sen } \theta = m_2 \lambda \text{ (máximos)}$$

Onde o índice 2 mostra que se trata de difração por duas fendas

Podemos determinar a posição do primeiro mínimo de difração dentro da figura de interferência de duas fendas dividindo as equações e explicitando m_2.
Fazendo isso e substituindo *d* e *a* por seus valores numéricos, obtemos

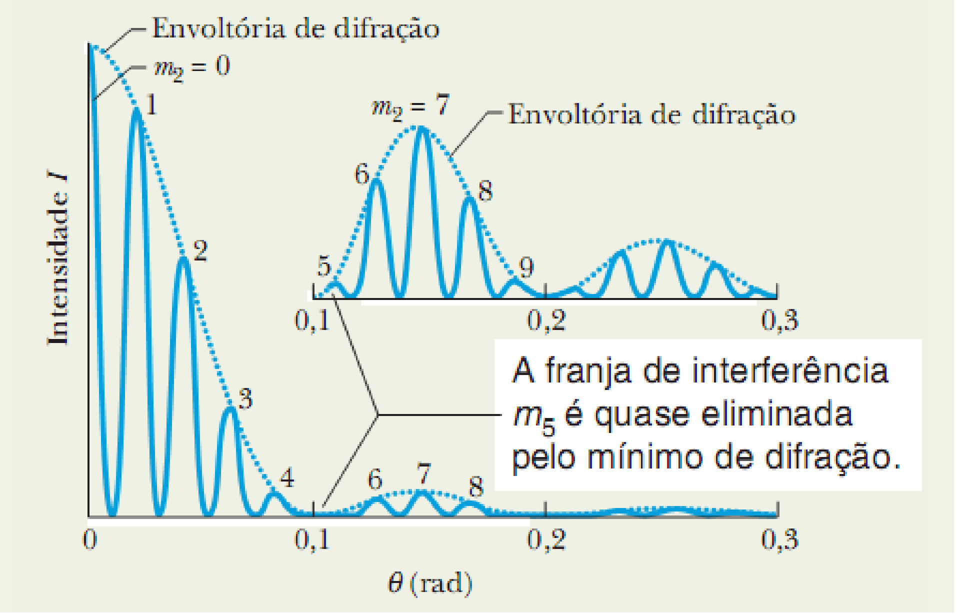
$$m_2 = \frac{d}{a} = \frac{19{,}44\ \mu\text{m}}{4{,}050\ \mu\text{m}} = 4{,}8.$$

DIFRAÇÃO EM DUAS FENDAS

Exemplo: Experimento de Dupla Fenda Levando em Conta os Efeitos de Difração

De acordo com esse resultado (4,8), a franja clara de interferência com $m_2 = 4$ pertence ao pico central da figura de difração, mas o mesmo não acontece com a franja clara com $m_2 = 5$. O pico central de difração inclui a franja de interferência central ($m_2 = 0$) e quatro franjas secundarias (ate $m_2 = 4$) de cada lado.

Assim, o pico central da figura de difração contem nove franjas de interferência. As franjas claras de um lado da franja central aparecem na figura abaixo



DIFRAÇÃO EM DUAS FENDAS

UFPR
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

Exemplo: Experimento de Dupla Fenda Levando em Conta os Efeitos de Difração

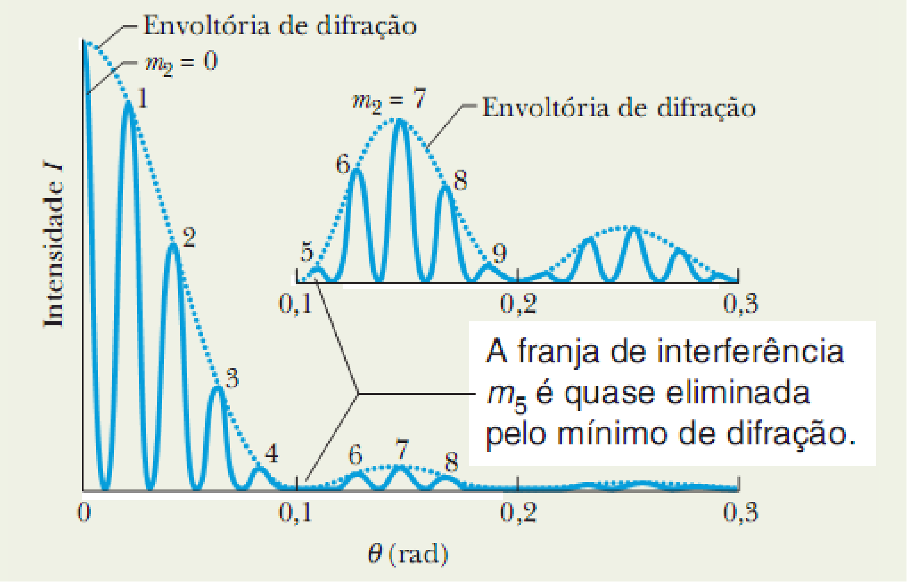
(b) Quantas franjas claras podem ser observadas em um dos dois primeiros máximos secundários da figura de difração?

Os limites externos dos primeiros máximos secundários são os segundos mínimos de difração, que correspondem às soluções da equação: $a \operatorname{sen}\theta = m_1 \lambda$ com $m_1 = 2$, *ou seja:* $a \operatorname{sen}\theta = 2\lambda$

Combinando esta equação com a equação: $d \operatorname{sen} \theta = m_2 \lambda,$

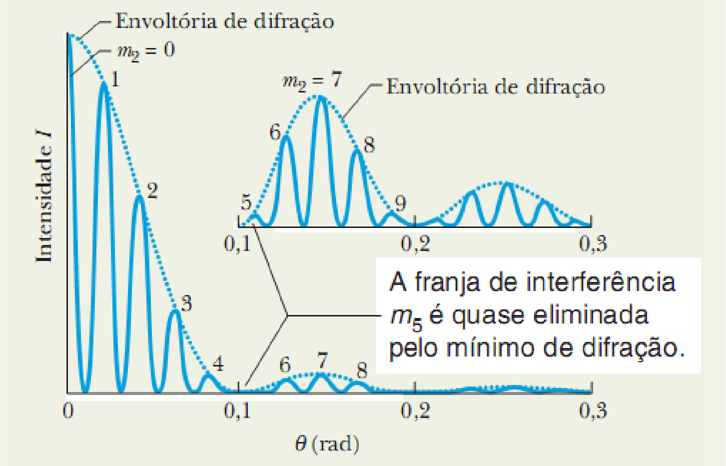
Obtemos:

$$m_2 = \frac{2d}{a} = \frac{(2)(19{,}44\ \mu\text{m})}{4{,}050\ \mu\text{m}} = 9{,}6.$$



Exemplo: Experimento de Dupla Fenda Levando em Conta os Efeitos de Difração

$$m_2 = \frac{2d}{a} = \frac{(2)(19{,}44\ \mu\text{m})}{4{,}050\ \mu\text{m}} = 9{,}6.$$

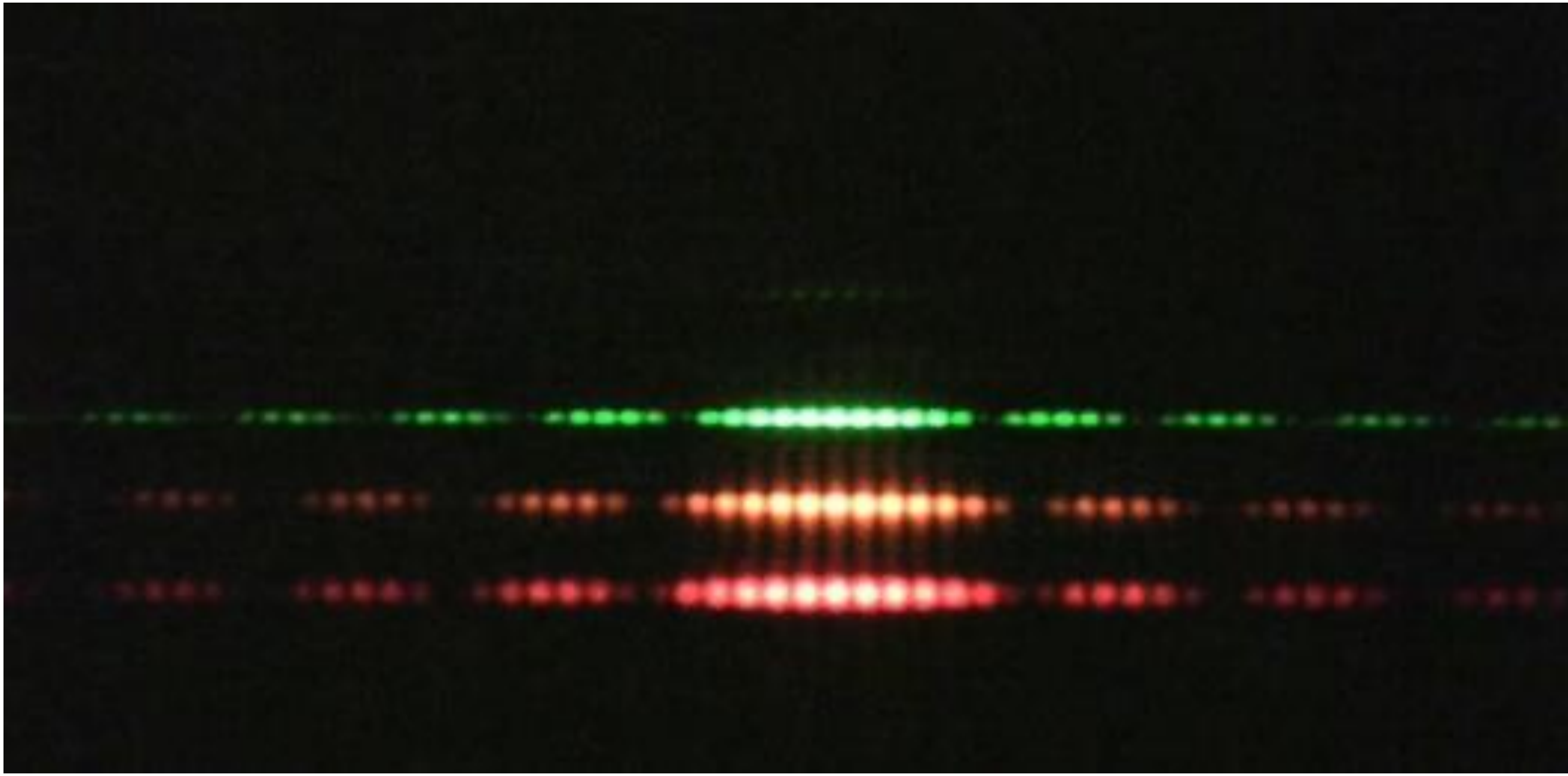


De acordo com este resultado, o segundo mínimo de difração ocorre pouco antes que apareça a franja clara de interferência com $m_2 = 10$ (ver resultado acima).

Dentro de um dos dois primeiros máximos secundários de difração temos as franjas de interferência correspondentes a $m_2 = 5$ ate $m_2 = 9$, ou seja, um total de cinco franjas claras (veja a figura).

DIFRAÇÃO EM DUAS FENDAS

Exemplo: Experimento de Dupla Fenda Levando em Conta os Efeitos de Difração

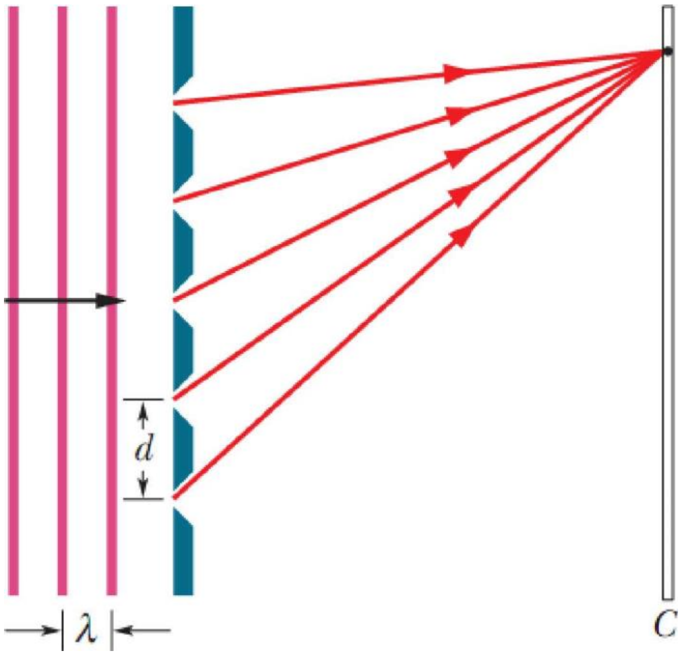


Vamos ver agora as chamadas "redes de difração"....

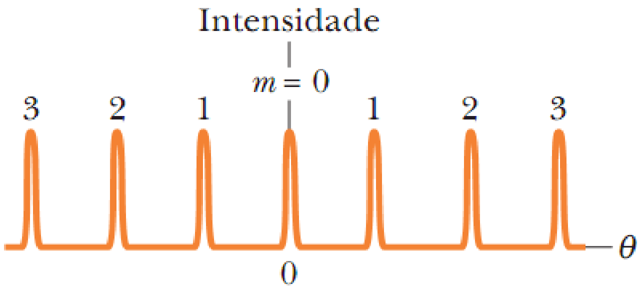
REDES DE DIFRAÇÃO

Uma rede de difração é um arranjo semelhante ao do experimento de dupla fenda, exceto pelo fato de que o número de fendas pode chegar a milhares por milimetro.

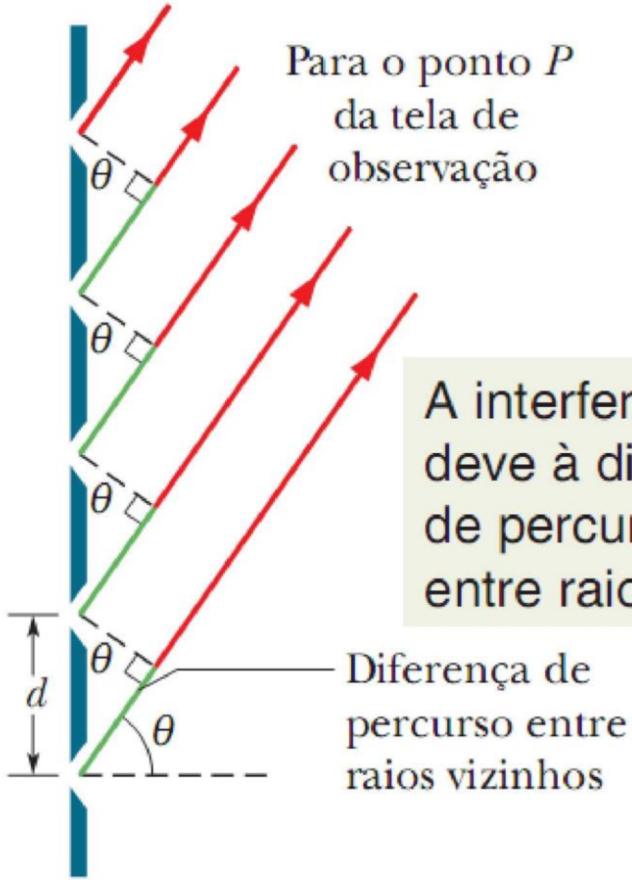
Na figura é apresentada uma rede de difração simplificada, com apenas cinco fendas, que produz uma figura de interferência em uma tela de observação distante.



Quando incide um feixe de luz monocromática em uma rede de difração e aumentamos gradualmente o número de fendas de dois para um número grande *N*, a curva de intensidade muda da figura de interferência típica de um experimento de dupla fenda, para uma figura muito mais complexa e depois para uma figura simples como a que aparece ao lado



REDES DE DIFRAÇÃO



A interferência se deve à diferença de percurso entre raios vizinhos.

Na figura se observam os raios que vão das ranhuras de uma rede de difração até um ponto distante *P* (*eles* são aproximadamente paralelos).

A diferença de percurso entre raios vizinhos é $d\ \mathrm{sen}\theta$, onde θ é o ângulo indicado na figura (as ranhuras se estendem para dentro e para fora do quadro), portanto:

$$d \,\mathrm{sen}\, \theta = m\lambda, \qquad \text{para } m = 0, 1, 2, \ldots \qquad \text{(máximos; linhas)}$$

REDES DE DIFRAÇÃO

A equação

$$d \operatorname{sen} \theta = m\lambda, \qquad \text{para } m = 0, 1, 2, \ldots \quad \text{(máximos; linhas)}$$

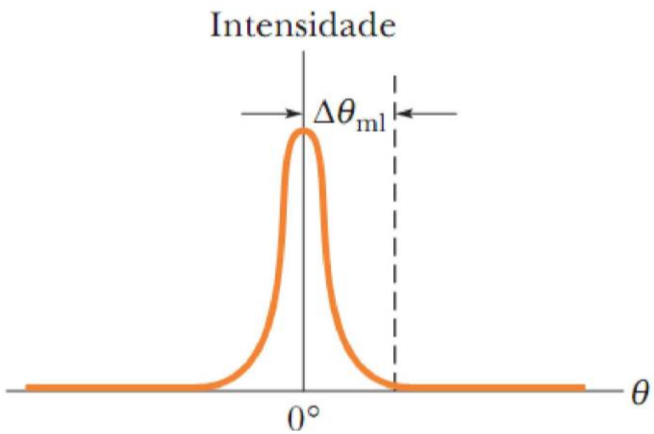
exemplifica uma das utilidades mais comuns das redes de difração...com elas é possível identificar o comprimento de onda da luz...para isso é suficiente conhecer o espaçamento da rede (distância d), o máximo que estamos olhando (m) e medir o ângulo θ.

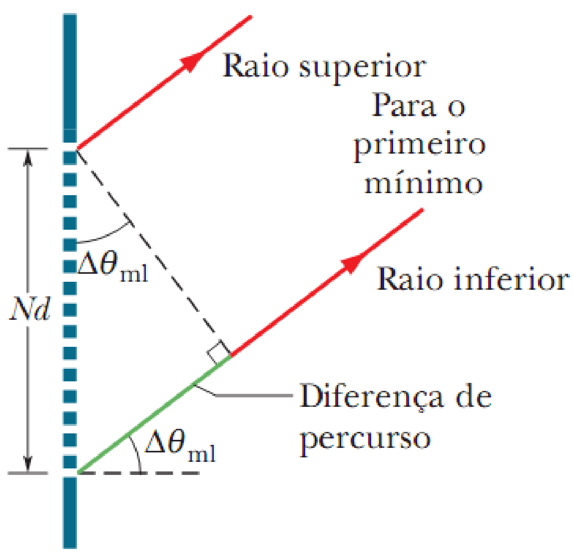
Elas também permitem decompor um feixe de luz nas suas componentes (por que não é possível fazer isso com duas fendas?)

Vamos a ver a relação entre o número de ranhuras de uma rede de difração e a largura das franjas ...

Redes de Difração: Largura das Linhas

A capacidade de uma rede de difração de resolver (separar) linhas de diferentes comprimentos de onda depende da largura das linhas!





A meia largura de linha $\Delta\theta_{ml}$ da linha central é medida entre o centro da linha e o mínimo mais próximo em um gráfico de intensidade em função de θ

No caso da difração por uma fenda a diferença de fase entre raios vizinhos é "a sen θ".

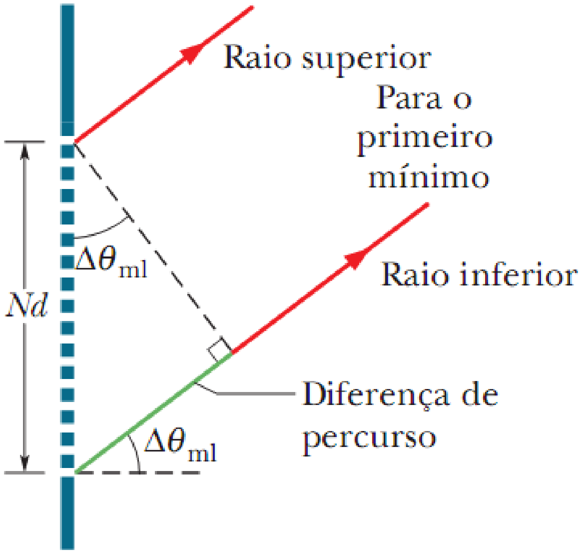
Para uma rede com N ranhuras (N>>1), cada uma separada da ranhura vizinha por uma distância d, a distância entre as ranhuras situadas nas extremidades da rede é ≈ Nd (figura) e, portanto, a diferença de percurso entre os raios que partem das extremidades da rede é $Nd \text{ sen } \Delta\theta_{ml}$. Assim, o primeiro mínimo acontece para :

$$Nd \,\text{sen}\, \Delta\theta_{ml} = \lambda$$

Redes de Difração: Largura das Linhas

Como vimos, a diferença de percurso entre os raios que passam pelas ranhuras das extremidades é *Nd* sen $\Delta\theta_{ml}$, em que $\Delta\theta_{ml}$ é o ângulo correspondente ao primeiro mínimo (O ângulo aparece aqui exagerado para tornar o desenho mais claro).

Como $\Delta\theta_{ml}$ é pequeno (máximo central) $\text{sen}(\Delta\theta_{ml}) \approx \Delta\theta_{ml}$ (em radianos).



Portanto, a meia largura central será:

$$\Delta\theta_{ml} = \frac{\lambda}{Nd} \qquad \text{(meia largura da linha central)}$$

e para outros máximos (sem demonstração) será:

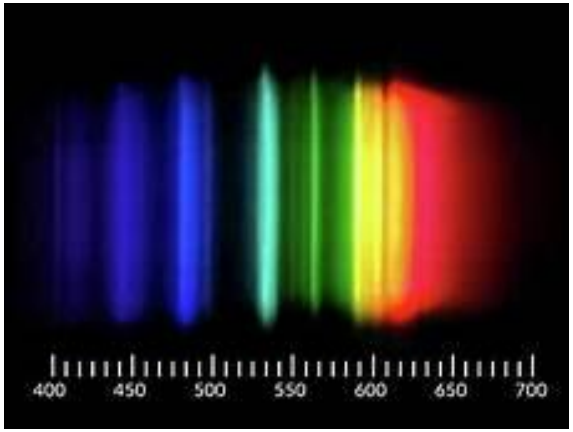
$$\Delta\theta_{ml} = \frac{\lambda}{Nd\cos\theta} \qquad \text{(meia largura da linha em } \theta\text{)}$$

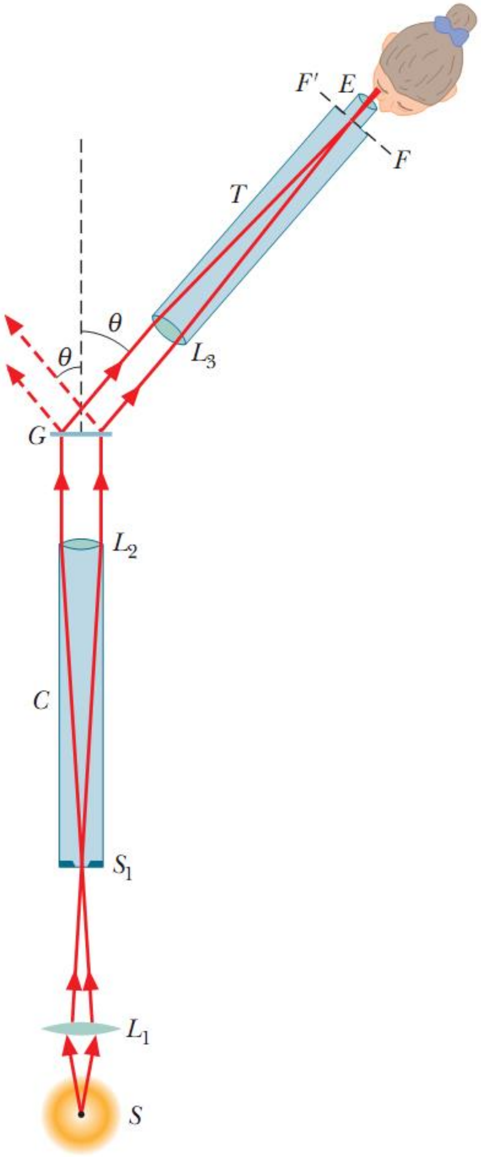
REDES DE DIFRAÇÃO

Redes de Difração: Espectroscópio

Na figura é apresentado um tipo simples de espectroscópio, baseado em uma rede de difração, usado para analisar os comprimentos de onda emitidos pela fonte *S*

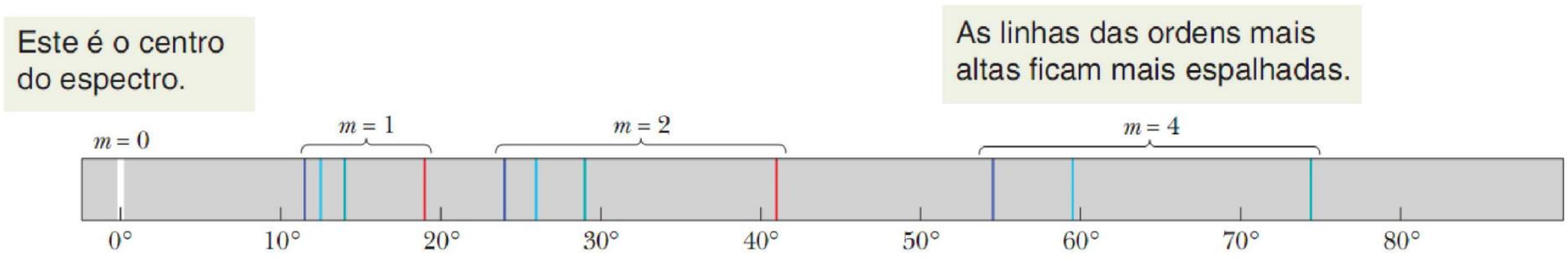
A luz da fonte S é focalizada pela lente L_1 em uma fenda S_1 que está no plano focal da lente L_2. A luz que emerge do tubo C (conhecido como colimador) é uma onda plana que incide perpendicularmente na rede G, onde é difratada, produzindo uma figura de difração simétrica em relação ao eixo do colimador.



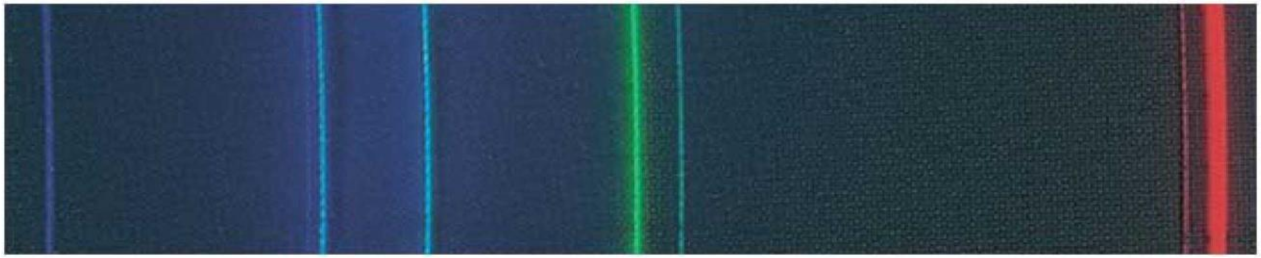


Redes de Difração: Espectroscópio

Exemplo do hidrogênio. Na figura abaixo são apresentadas as linhas de emissão de ordem, zero, um, dois e quatro do hidrogênio na faixa da luz visível. Observe que as linhas são mais afastadas para grandes ângulos (são também mais largas e menos intensas, embora isso não seja mostrado na figura) e a linha central é branca (mistura de todas)



Na figura abaixo é apresentado o caso do cádmio. Linhas de emissão do cadmio na faixa da luz visível, observadas através de um espectroscópio



Redes de Difração: Dispersão

Uma rede de difração espalha as linhas de difração associadas aos vários comprimentos de onda. Esse espalhamento, conhecido como **dispersão**, é definido através da equação

$$D = \frac{\Delta\theta}{\Delta\lambda} \qquad \text{(definição de dispersão)}$$

em que $\Delta\theta$ é a separação angular entre duas linhas cujos comprimentos de onda diferem de $\Delta\lambda$.

A dispersão de uma rede de difração e dada por

$$D = \frac{m}{d\cos\theta}$$

Assim, para conseguir uma grande dispersão, devemos usar uma rede de difração com um pequeno espaçamento d entre as ranhuras, e trabalhar com grandes valores de m.

Observe que a dispersão não depende do número N de ranhuras da rede. A unidade de dispersão do SI é o grau por metro ou o radiano por metro.

UFPR UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

Redes de Difração: Resolução

Para que seja possível resolver linhas cujos comprimentos de onda são muito próximos, é preciso que as linhas sejam suficientemente estreitas. Em outras palavras, a rede de difração deve ter uma **alta resolução**, *R*, definida através da equação

$$R = \frac{\lambda_{med}}{\Delta\lambda} \qquad \text{(definição de resolução)}$$

A resolução de uma rede de difração é dada por $R = Nm$

Onde N é o número de ranhuras e m é o número de ordem da linha de difração (m=1, 2, 3,...)

As demonstrações das equações de resolução e dispersão são dadas a seguir...

UFPR UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

Redes de Difração: Dispersão e Resolução - Demonstrações

A posição das linhas (máx) na figura de difração de uma rede é dada por:

$$d \operatorname{sen} \theta = m\lambda$$

$$\Downarrow$$

$$d(\cos\theta)\, d\theta = m\, d\lambda$$

$$d(\cos\theta)\, \Delta\theta = m\, \Delta\lambda$$

$$\frac{\Delta\theta}{\Delta\lambda} = \frac{m}{d\cos\theta}$$

Além disso, se $\Delta\theta$ é o menor ângulo que permite que duas linhas sejam resolvidas, esse ângulo, de acordo com o critério de Rayleigh, deve ser igual a meia largura de uma das linhas, que é dada por

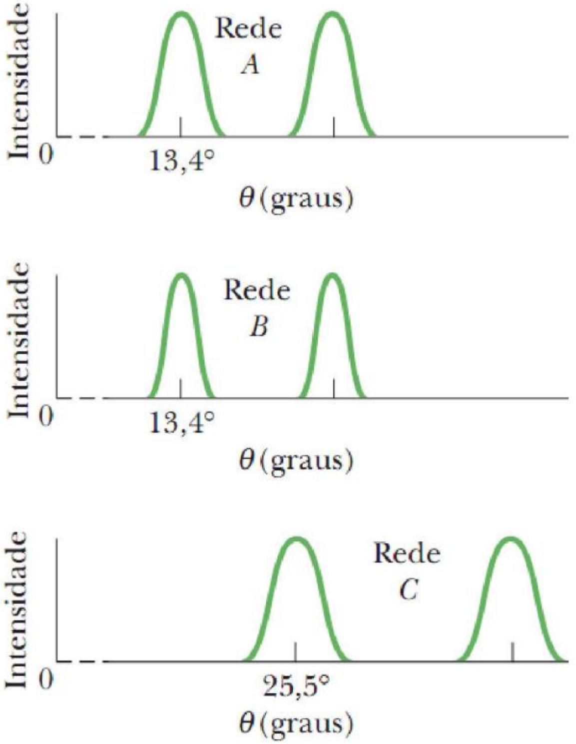
$$\Delta\theta_{\mathrm{ml}} = \frac{\lambda}{Nd\cos\theta} \rightarrow \frac{\lambda}{N} = m\,\Delta\lambda \rightarrow R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = Nm$$

UFPR UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

Redes de Difração: Comparação entre Dispersão e Resolução

Na figura são apresentados os gráficos de intensidade observados quando uma luz com dois comprimentos de onda é usada para iluminar as redes de difração cujas propriedades aparecem na Tabela abaixo.

A rede de maior resolução é a rede *B (picos mais estreitos)* e a de maior dispersão é a rede *C (picos mais espalhados).*



Parâmetros de Três Redes de Difração[a]

Rede	N	d (nm)	θ	D (°/μm)	R
A	10 000	2540	13,4°	23,2	10 000
B	20 000	2540	13,4°	23,2	20 000
C	10 000	1360	25,5°	46,3	10 000

[a]Os dados são para λ = 589 nm e m = 1.

UFPR
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

Exemplo: Dispersão e Resolução de uma Rede de Difração

Uma rede de difração tem $1{,}26\ 10^4$ ranhuras uniformemente espaçadas em uma região de largura w = 25,4 mm. A rede é iluminada perpendicularmente pela luz amarela de uma lâmpada de vapor de sódio. Essa luz contem duas linhas de emissão muito próximas (conhecidas como dubleto do sódio) de comprimentos de onda 589,00 nm e 589,59 nm.

(a) Qual e o ângulo correspondente ao máximo de primeira ordem (de cada lado do centro da figura de difração) para o comprimento de onda de 589,00 nm?

Exemplo: Dispersão e Resolução de uma Rede de Difração

Solução: O espaçamento das ranhuras, ***d,*** é dado por:

$$d = \frac{w}{N} = \frac{25{,}4 \times 10^{-3}\ \text{m}}{1{,}26 \times 10^{4}}$$
$$= 2{,}016 \times 10^{-6}\ \text{m} = 2016\ \text{nm}.$$

Como estamos interessados no máximo de primeira ordem, ***m*** **=** 1. Substituindo ***d*** e ***m*** por seus valores na equação, obtemos:

$$\theta = \operatorname{sen}^{-1}\frac{m\lambda}{d} = \operatorname{sen}^{-1}\frac{(1)(589{,}00\ \text{nm})}{2016\ \text{nm}}$$
$$= 16{,}99° \approx 17{,}0°. \qquad \text{(Resposta)}$$

(b) Usando a dispersão da rede, calcule a separação angular das duas linhas de primeira ordem.

UFPR
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

Exemplo: Dispersão e Resolução de uma Rede de Difração

Solução:

No caso que estamos examinando, as linhas estão tão próximas que o erro não é muito grande quando usamos o valor do angulo $\boldsymbol{\theta}$ **=** 16,99° calculado no item (a) para uma das linhas.

Nesse caso, temos:

$$D = \frac{m}{d\cos\theta} = \frac{1}{(2016\ \text{nm})(\cos 16{,}99°)}$$
$$= 5{,}187 \times 10^{-4}\ \text{rad/nm}.$$

De acordo com a equação, com $\Delta\lambda$ em nanômetros, temos:

$$\Delta\theta = D\,\Delta\lambda = (5{,}187 \times 10^{-4}\ \text{rad/nm})(589{,}59 - 589{,}00)$$
$$= 3{,}06 \times 10^{-4}\ \text{rad} = 0{,}0175°. \qquad \text{(Resposta)}$$

Como vimos, que este resultado depende do espaçamento d das ranhuras, mas é independente do número de ranhuras.

Exemplo: Dispersão e Resolução de uma Rede de Difração

(c) Qual é o menor número de ranhuras que uma rede pode ter sem que se torne impossível distinguir as linhas de primeira ordem do dubleto do sódio?

Solução: Fazendo $\Delta\lambda$ igual a diferença entre os comprimentos de onda das duas linhas do dubleto do sódio, 0,59 nm, e $\lambda_{méd}$ = (589,00 + 589,59)/2 = 589,30, temos:

$$N = \frac{R}{m} = \frac{\lambda_{\text{méd}}}{m\,\Delta\lambda} = \frac{589{,}30\text{ nm}}{(1)(0{,}59\text{ nm})} = 999\text{ ranhuras.} \qquad \text{(Resposta)}$$

DIFRAÇÃO DE RAIOS X

Os raios X são ondas eletromagnéticas com um comprimento de onda da ordem de 1 Å (1×10^{-10} m). Para efeito de comparação, o comprimento de onda no centro do espectro visível é 550 nm (5500×10^{-10} m).

Uma rede de difração comum não pode ser usada para separar raios X de diferentes comprimentos de onda.

Para λ = 1 Å (0,1 nm) e d = 3000 nm, por exemplo, o máximo de primeira ordem ocorre para:

$$\theta = \operatorname{sen}^{-1}\frac{m\lambda}{d} = \operatorname{sen}^{-1}\frac{(1)(0{,}1\ \text{nm})}{3000\ \text{nm}} = 0{,}0019°.$$

Esse resultado mostra que o primeiro máximo está próximo demais do máximo principal para que as duas linhas possam ser resolvidas.

O ideal seria usar uma rede de difração com d ≈ λ, mas, como os comprimentos de onda dos raios X são da mesma ordem que os diâmetros atômicos, é tecnicamente impossível construir uma rede cujas ranhuras tenham um espaçamento dessa ordem!!!!

Em 1912, ocorreu ao físico alemão Max von Laue que um sólido cristalino, formado por um arranjo regular de átomos, poderia se comportar como uma "rede de difração" natural para os raios X

DIFRAÇÃO DE RAIOS X

Na figura se observa:

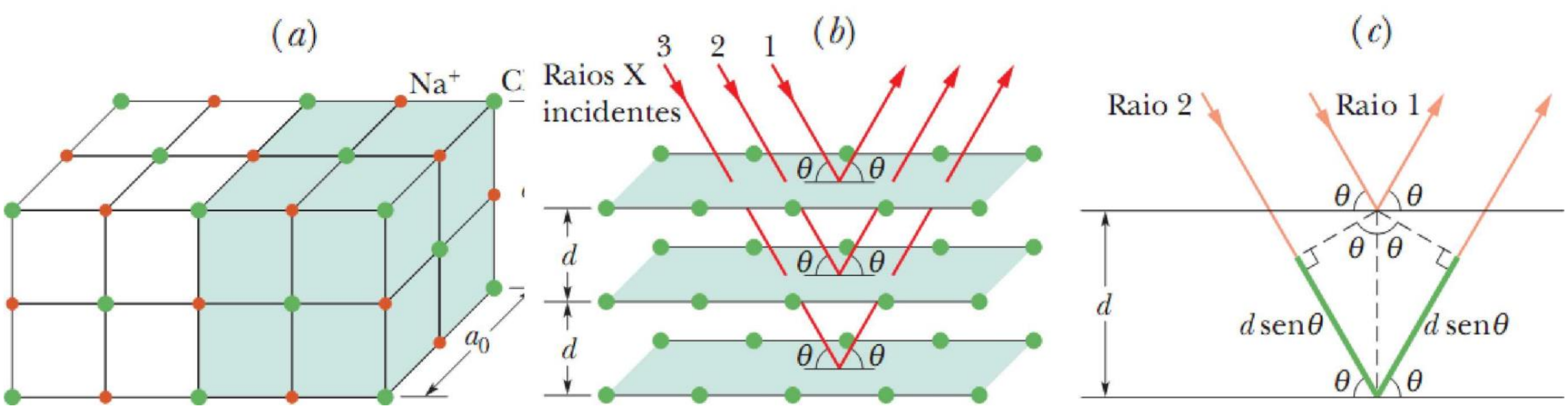
(a) a estrutura cúbica do NaCl, mostrando os íons de sódio e cloro e uma célula unitária (sombreada).

(b) Os raios X incidentes são difratados pelo cristal representado em (a). Os raios X são difratados como se fossem refletidos por uma família de planos paralelos, com o ângulo de reflexão igual ao angulo de incidência, ambos medidos em relação aos planos (e não em relação à normal).

(c) A diferença de percurso dos raios refletidos por planos vizinhos é $2d\text{sen}\,\theta$.

Assim, o critério para que a intensidade da difração seja máxima é:

$$2d\ \text{sen}\ \theta = m\lambda \qquad \text{para } m = 1, 2, 3, \ldots \qquad \text{(lei de Bragg)}$$



QUESTIONÁRIO

1. Qual a diferença entre os fenômenos de difração e interferência?
2. Analise a difração numa fenda única. Explique como acontece a figura de difração.
3. Deduzir passo a passo a equação para calcular a intensidade das franjas de difração em fenda única
4. Explique o método quantitativo para determinar a intensidade das franjas de difração em fenda única
5. Explique o critério de Rayleigh para a resolução de pontos luminosos de fendas circulares
6. Aplique o critério de Rayleigh para resolver problemas de resolução
7. Resolva problemas de dupla fenda considerando os efeitos da difração (envoltória)
8. Explique como funciona uma rede de difração.
9. Calcule a largura de linhas em redes de difração.
10. Resolva exercícios simples com redes de difração
11. Explique a dispersão e a resolução de redes de difração
12. Explique a difração de raios X e obtenha a Lei de Bragg