EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARA ENGENHARIA ELÉTRICA
TE 315

Aula 07_1

SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES. NOÇÕES DE ESTABILIDADE

INTRODUÇÃO

O conceito de estabilidade está associado à possibilidade de que pequenos erros introduzidos durante um procedimento matemático possam ser reduzidos à medida que o procedimento continua.

Reciprocamente, ocorre instabilidade se pequenos erros tendem a aumentar, as vezes, sem limites.

Por exemplo, identificamos, nas aulas 06_3, 06_4 e 06_6, soluções de equilíbrio como (assintoticamente) estáveis ou instáveis, dependendo se as soluções inicialmente próximas à solução de equilíbrio tendem a se aproximar ou a se afastar dela quando t aumenta.

Em geral, (não só para soluções de equilíbrio) a solução de um problema de valor inicial é assintoticamente estável se soluções inicialmente próximas tendem a se aproximar da solução dada, e é assintoticamente instável se tendem a se afastar.

Visualmente, em um problema assintoticamente estável os gráficos das soluções irão se aproximar, e num problema instável, eles irão se separar.

INTRODUÇÃO

A abordagem para estudar a estabilidade pode ser numérica (ver o capitulo 8: Métodos numéricos, do livro de texto Equações diferenciais elementares e problemas de contorno. Boyce W. E, DiPrima R. C.)...

... ou pode ter caráter geométrico e nos levar a uma compreensão qualitativa do comportamento das soluções, em vez de fornecer informações quantitativas detalhadas (como a numérica).

A seguir veremos a abordagem geométrica (para a numérica consultar o livro de texto acima mencionado)

NOÇÕES DE ESTABILIDADE

INTRODUÇÃO

A motivação para desenvolver a análise geométrica é que muitas equações diferenciais não podem ser resolvidas de maneira conveniente por métodos analíticos, por isso é importante considerar que informações qualitativas podem ser obtidas sobre suas soluções sem resolver, de fato, as equações.

Vamos resumir alguns dos resultados que obtivemos até agora para sistemas bidimensionais de equações lineares homogêneas de primeira ordem com coeficientes constantes. Tal sistema tem a forma **x´= Ax** em que **A** é a matriz (2x2) de coeficientes (neste caso) constantes e **x** é um vetor (2x1)

Nas aulas 06_3 até 06_6 vimos que podemos resolver tais sistemas buscando soluções da forma $\mathbf{x} = \boldsymbol{\xi} e^{rt}$. Assim, substituindo **x** na equação **x´= Ax** obtínhamos:

$$r\boldsymbol{\xi}e^{rt} = \mathbf{A}\boldsymbol{\xi}e^{rt} \quad \Leftrightarrow \quad r\boldsymbol{\xi} = \mathbf{A}\boldsymbol{\xi} \quad \Leftrightarrow \quad (\mathbf{A} - r\mathbf{I})\boldsymbol{\xi} = \mathbf{0}$$

INTRODUÇÃO

Desta forma, $\mathbf{x} = \boldsymbol{\xi} e^{rt}$ é uma solução de $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ sempre que r seja uma autovalor e ξ um autovetor da matriz de coeficientes **A**.

Os autovalores r (como sabemos) são obtidos resolvendo a equação polinomial $\det(\mathbf{A} - r\mathbf{I}) = \mathbf{0}$ ....
....e os autovetores $\boldsymbol{\xi}$ são obtidos (a menos de uma constante multiplicativa) resolvendo a equação $(\mathbf{A} - r\mathbf{I})\boldsymbol{\xi} = \mathbf{0}$

As soluções **x** para as quais **Ax**=0 correspondem às soluções de equilíbrio que são chamadas de pontos críticos (já vimos que em geral separam os comportamentos das soluções)

Vamos supor que **A** é invertível (não é singular), ou seja, que det **A** ≠ 0. Nesse caso **x** = **0** é o único ponto crítico do sistema.

INTRODUÇÃO

A solução da equação **x´**= **Ax**, no nosso caso (2x2), é uma função vetorial **x** = **ϕ**(t) que satisfaz a equação diferencial.

Como já vimos, tal função **ϕ**(t) pode ser considerada como uma representação paramétrica de uma curva no plano x_1x_2.

Esta curva pode ser vista como uma trajetória percorrida por uma partícula em movimento cuja velocidade dx/dt é especificada pela equação diferencial e o plano x_1x_2 é chamado de plano de fase, e um conjunto representativo de trajetórias é chamado de retrato de fase.

Ao analisar o sistema **x´**= **Ax**, precisamos considerar diversos casos diferentes, dependendo da natureza dos autovalores de **A**. Iremos caracterizar a equação diferencial de acordo com o padrão geométrico das suas trajetórias.

É importante familiarizar-se com os tipos de comportamento das trajetórias em cada caso, pois eles são os fundamentos básicos da teoria qualitativa (análise geométrica) de equações diferenciais.

CASO 1. AUTOVALORES REAIS E DISTINTOS DE MESMO SINAL

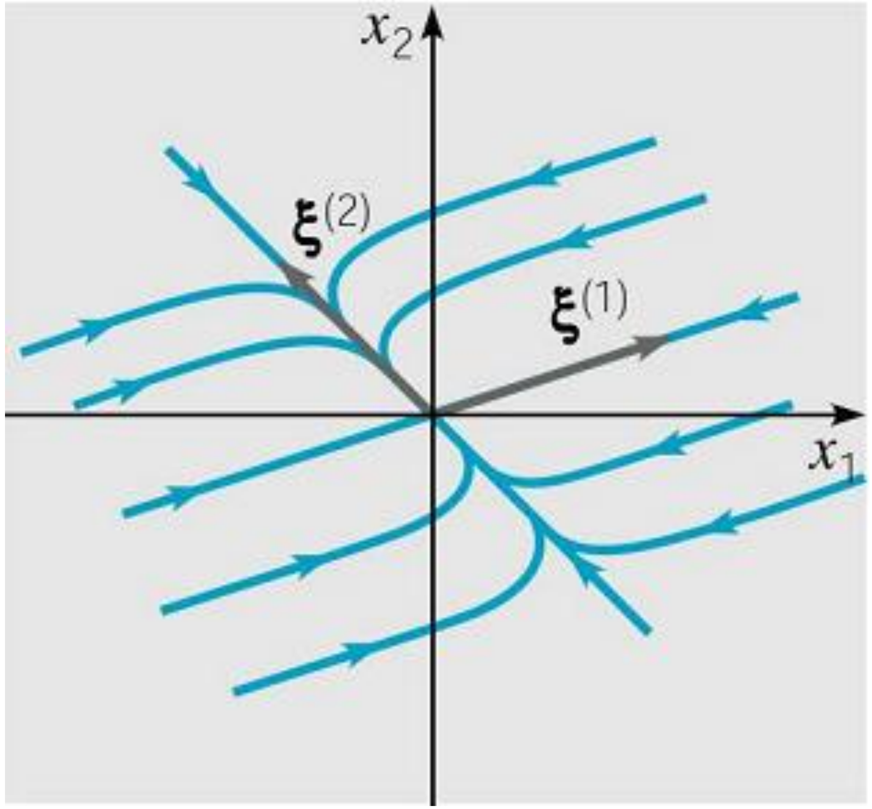
Nesse caso, r_1 e r_2 são ambos positivos ou ambos negativos e a solução geral da equação **x´**= **Ax** é:

$$\mathbf{x} = c_1\boldsymbol{\xi}^{(1)}e^{r_1 t} + c_2\boldsymbol{\xi}^{(2)}e^{r_2 t}$$

Suponha primeiro que $r_1 < r_2 < 0$ e que os autovetores $\boldsymbol{\xi}^{(1)}$ e $\boldsymbol{\xi}^{(2)}$ são como mostra a figura.

Segue, que $x \to 0$ quando $t \to \infty$, independente dos valores de c_1 e c_2; em outras palavras, todas as soluções se aproximam do ponto crítico na origem quando $t \to \infty$.

Se a solução começar (ponto inicial) na reta contendo a origem na direção de $\boldsymbol{\xi}^{(1)}$, então $c_2 = 0$. Em consequência, a solução permanecerá nessa reta para todo t e tenderá à origem quando $t \to \infty$.



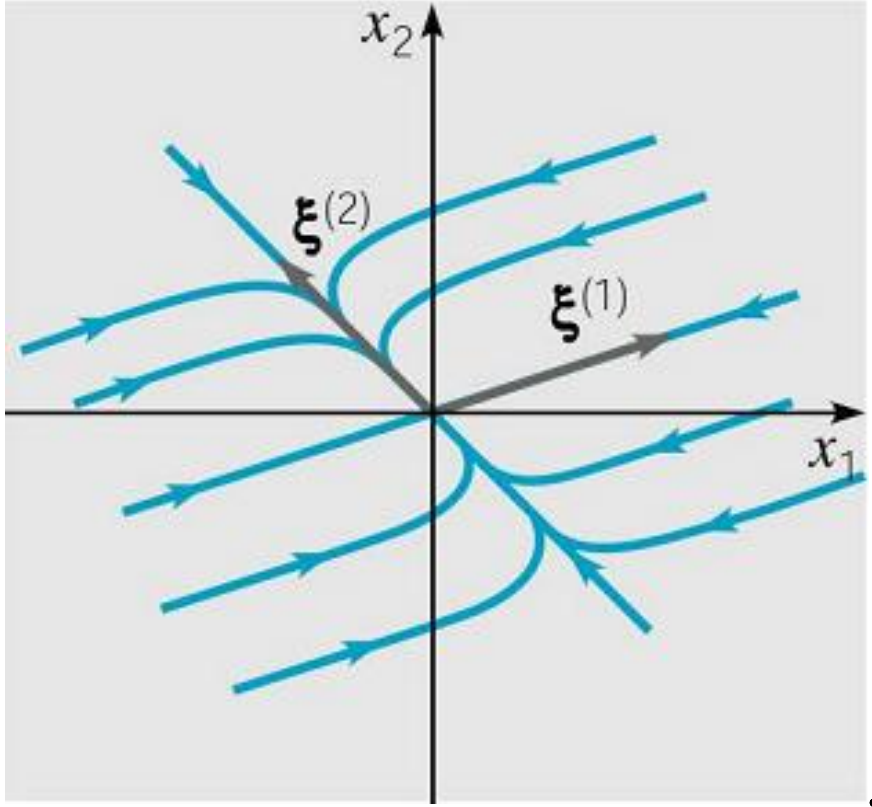
NOÇÕES DE ESTABILIDADE

CASO 1. AUTOVALORES REAIS E DISTINTOS DE MESMO SINAL

Analogamente, se o ponto inicial pertencer à reta contendo a origem na direção de $\boldsymbol{\xi}^{(2)}$, então a solução tenderá à origem ao longo dessa reta.
Na situação geral, é útil escrever a solução na forma:

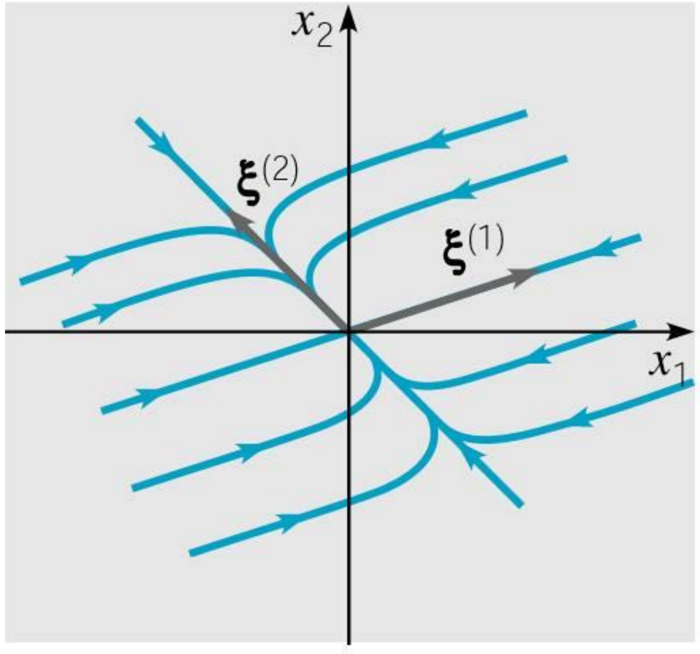
$$\mathbf{x} = c_1\boldsymbol{\xi}^{(1)}e^{r_1 t} + c_2\boldsymbol{\xi}^{(2)}e^{r_2 t} = e^{r_2 t}\left[c_1\boldsymbol{\xi}^{(1)}e^{(r_1 - r_2)t} + c_2\boldsymbol{\xi}^{(2)}\right]$$

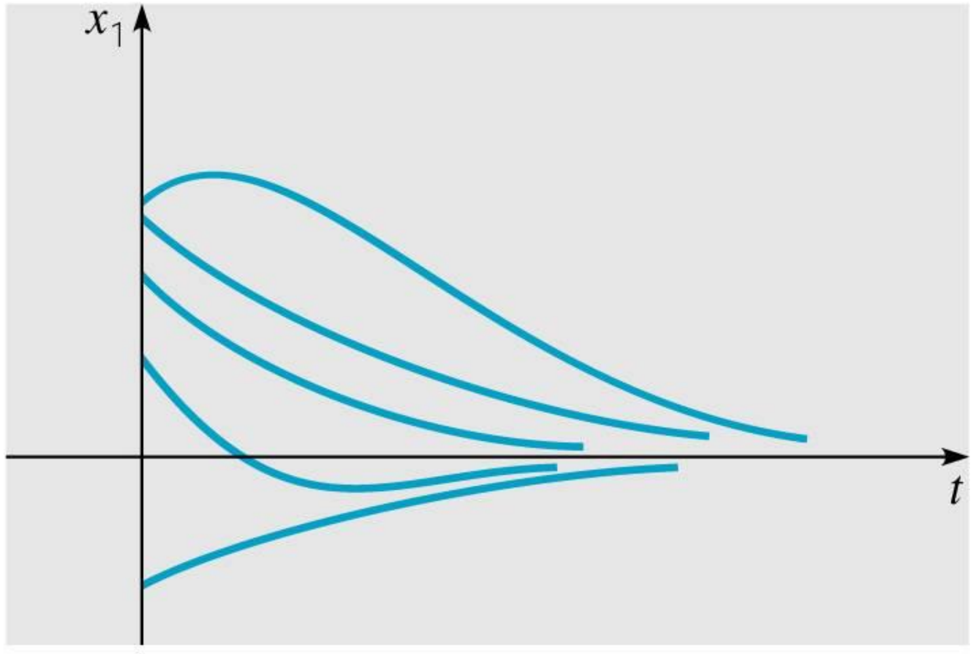
Como $r_1 - r_2 < 0$, para $c_2 \neq 0$ o termo $c_1\boldsymbol{\xi}^{(1)}\exp^{[(r_1 - r_2)t]}$ é desprezível comparado com $c_2\boldsymbol{\xi}^{(2)}$ para valores suficientemente grandes de t.
Assim, quando $t \to \infty$, não só as trajetórias se aproximam da origem, mas o fazem tendendo, também, à reta na direção de $\boldsymbol{\xi}^{(2)}$. Logo, todas as soluções são tangentes a $\boldsymbol{\xi}^{(2)}$ no ponto crítico, exceto as que começam exatamente na reta na direção de $\boldsymbol{\xi}^{(1)}$. O ponto é chamado nó (ou atrator)



CASO 1. AUTOVALORES REAIS E DISTINTOS DE MESMO SINAL

A figura da esquerda mostra diversas trajetórias no plano de fases. Alguns gráficos típicos de x_1 em função de t estão esboçados na figura da direita, ilustrando o fato de que todas as soluções exibem decaimento exponencial com o tempo. O comportamento de x_2 em função de t é semelhante.



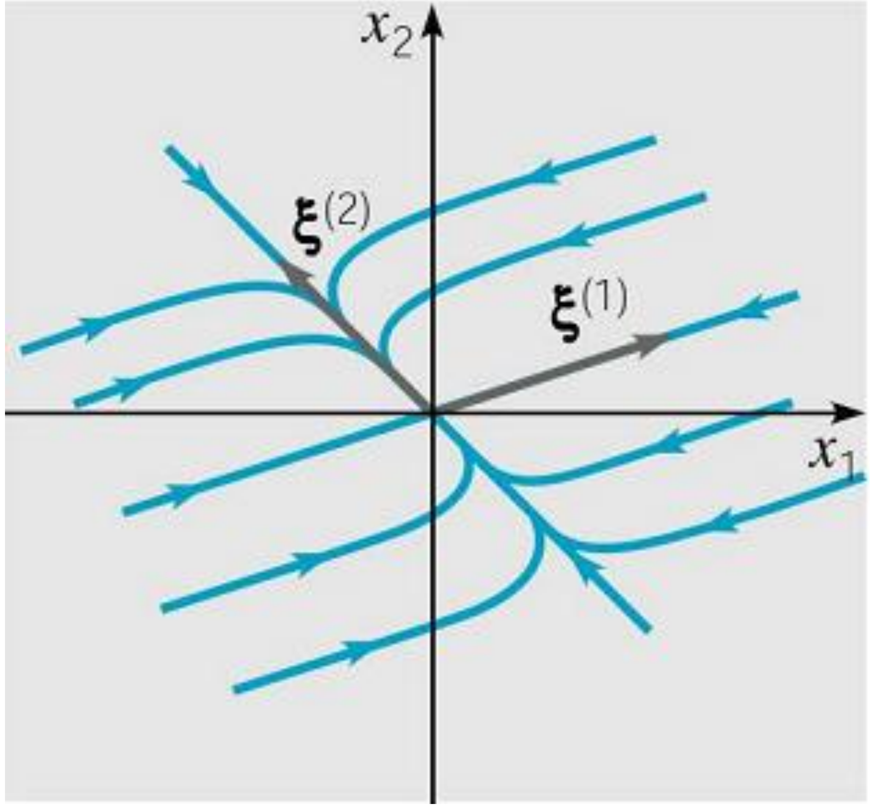


CASO 1. AUTOVALORES REAIS E DISTINTOS DE MESMO SINAL

O que acontece quando $t \to -\infty$?

Ainda supondo que $r_1 < r_2 < 0$, e se $c_1 \neq 0$, então o termo dominante quando $t \to -\infty$ é $e^{r_1 t}$.

Assim, exceto pelas trajetórias ao longo da reta contendo $\boldsymbol{\xi}^{(2)}$, para valores de t negativos grandes em módulo, as trajetórias têm inclinações muito próximas da do autovetor $\boldsymbol{\xi}(1)$ (veja a figura)



Se r_1 e r_2 são ambos positivos e $0 < r_2 < r_1$, então as trajetórias têm o mesmo padrão no plano de fases, exceto que o sentido do movimento é se afastando do ponto crítico na origem, em vez de se aproximando. Nesse caso, x_1 e x_2 crescem exponencialmente como funções de t. O ponto crítico é chamado, novamente, de nó ou de fonte.

NOÇÕES DE ESTABILIDADE

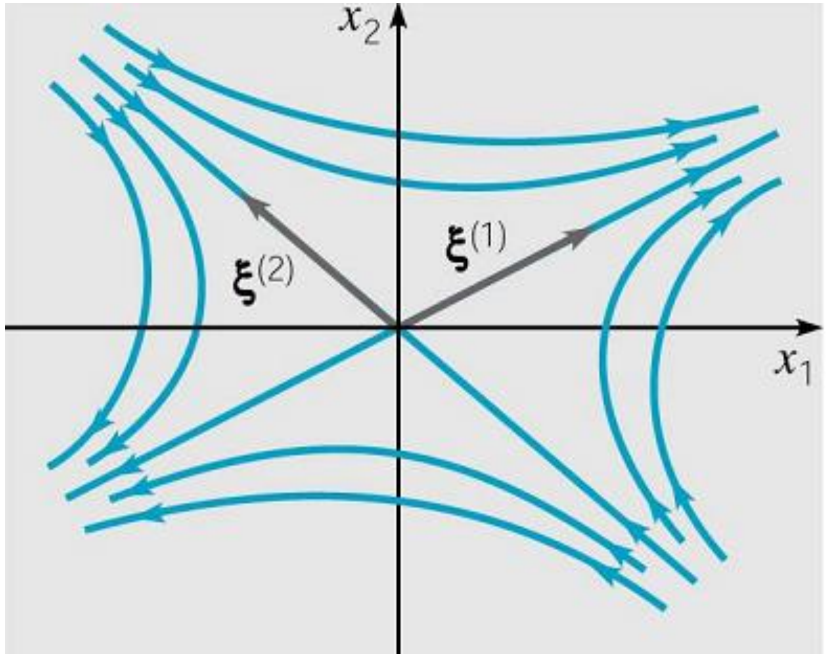
CASO 2. AUTOVALORES REAIS COM SINAIS OPOSTOS

Supomos que $r_1>0$ e $r_2<0$ com a solução geral:

$$\mathbf{x} = c_1\boldsymbol{\xi}^{(1)}e^{r_1 t} + c_2\boldsymbol{\xi}^{(2)}e^{r_2 t}$$

Lembrando que ||**x**|| é a quantidade não negativa (**x**, **x**)$^{1/2}$, e é chamada de comprimento ou tamanho do vetor **x**.

Suponha que os autovetores $\boldsymbol{\xi}^{(1)}$ e $\boldsymbol{\xi}^{(2)}$ são como ilustrados na figura



Se a solução começar em um ponto inicial na reta contendo a origem na direção de $\boldsymbol{\xi}^{(1)}$, então $c_2 = 0$. Em consequência, a solução permanecerá nessa reta para todo t, e, como $r_1 > 0$, $||\mathbf{x}|| \to \infty$ quando $t \to \infty$.

Se a solução começar em um ponto inicial pertencente à reta na direção de $\boldsymbol{\xi}^{(2)}$, a situação será análoga, exceto que $||x|| \to 0$ quando $t \to \infty$, já que $r_2 < 0$.

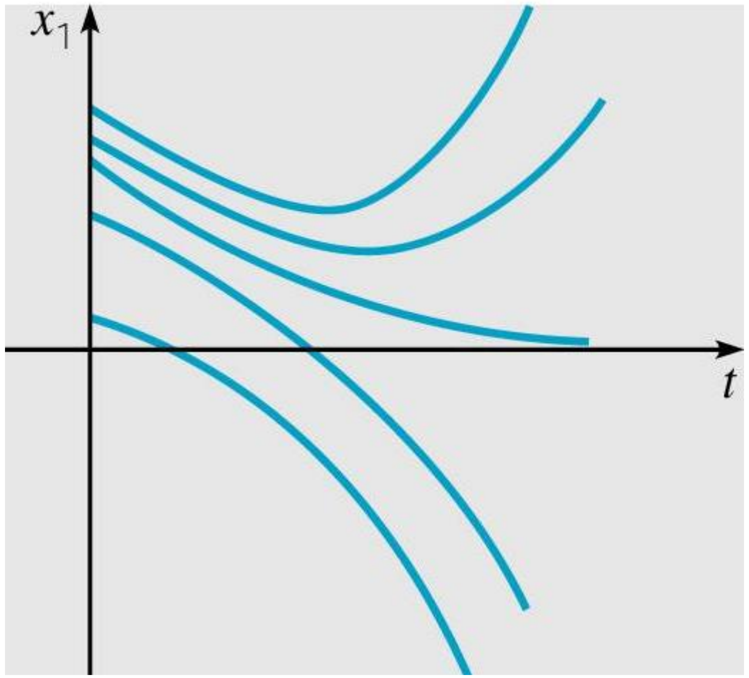
NOÇÕES DE ESTABILIDADE

CASO 2. AUTOVALORES REAIS COM SINAIS OPOSTOS

A Figura mostra alguns gráficos típicos de x_1 em função de t.

Para determinadas condições iniciais, a exponencial positiva está ausente da solução, de modo que $x_1 \to 0$ quando $t \to \infty$.

Para todas as outras condições iniciais, a exponencial positiva acaba dominando e faz com que x_1 se torne ilimitada. O comportamento de x_2 é semelhante.



CASO 3. AUTOVALORES IGUAIS

Vamos supor agora que $r_1 = r_2 = r$. Vamos considerar o caso em que os autovalores são negativos; se forem positivos, as trajetórias serão semelhantes, mas o movimento será em sentido contrário.
Existem duas possibilidades, dependendo se o autovalor repetido tem dois autovetores independentes ou apenas um.

(a) Dois autovetores independentes. Neste caso a solução geral é

$$\mathbf{x} = c_1 \boldsymbol{\xi}^{(1)} e^{rt} + c_2 \boldsymbol{\xi}^{(2)} e^{rt}$$

A razão x_2/x_1 é independente de t (pois e^{rt} se cancela), mas depende das coordenadas de $\boldsymbol{\xi}^{(1)}$ e $\boldsymbol{\xi}^{(2)}$ e das constantes arbitrárias c_1 e c_2.

Logo, toda trajetória está contida em alguma reta contendo a origem (pois quando $t \to \infty$, todo tende a zero, que é a origem), como ilustrado na figura a seguir...

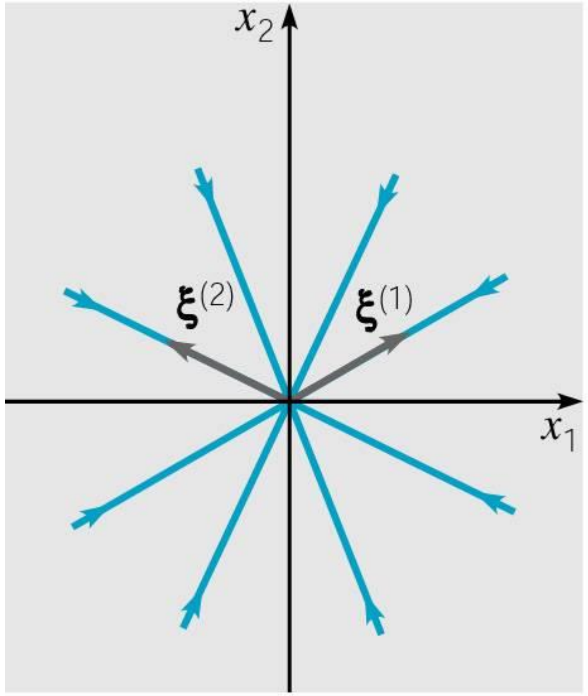
NOÇÕES DE ESTABILIDADE

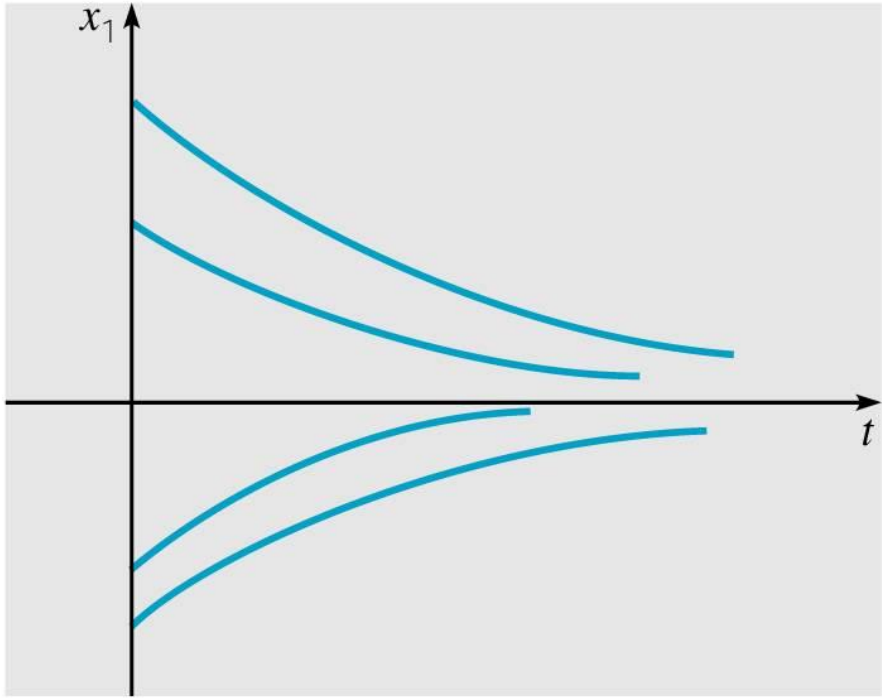
CASO 3. AUTOVALORES IGUAIS

Toda trajetória está contida em uma reta contendo a origem.

Gráficos típicos de x_1 ou x_2 em função de t aparecem na figura da direita. O ponto crítico é chamado de nó próprio ou, algumas vezes, de ponto estrela.

$$\mathbf{x} = c_1 \boldsymbol{\xi}^{(1)} e^{rt} + c_2 \boldsymbol{\xi}^{(2)} e^{rt}$$





NOÇÕES DE ESTABILIDADE

CASO 3. AUTOVALORES IGUAIS

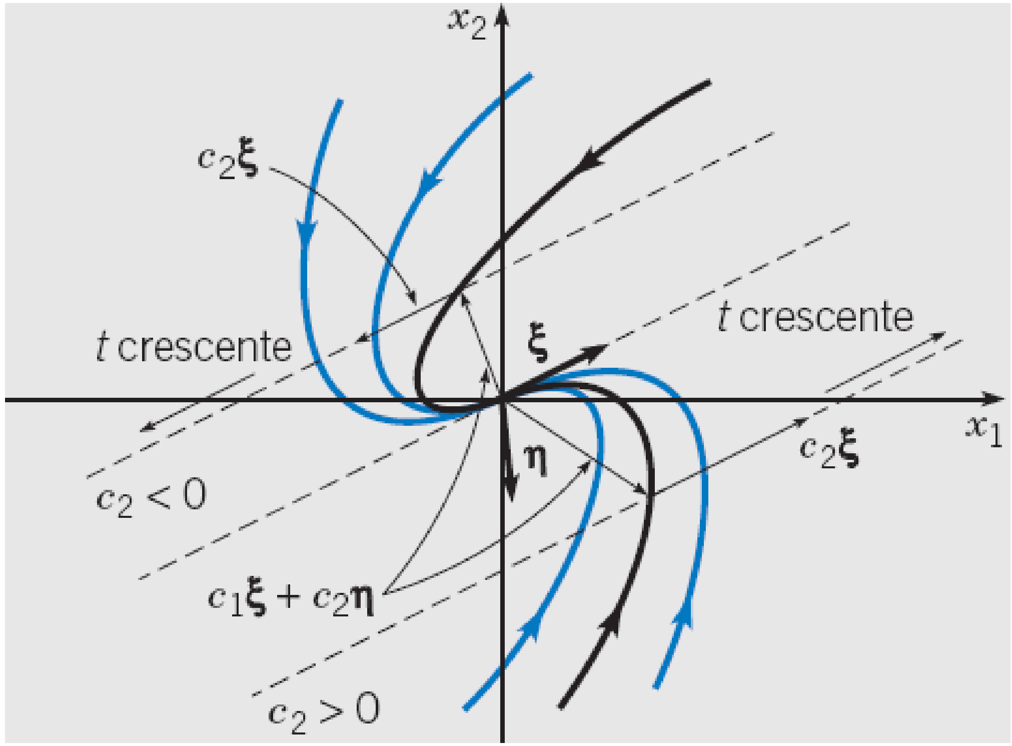
(b) Um autovetor independente. Neste caso a solução geral (como já vimos na aula 06_6) é

$$\mathbf{x} = c_1 \boldsymbol{\xi} e^{rt} + c_2(\boldsymbol{\xi} t e^{rt} + \boldsymbol{\eta} e^{rt})$$

em que **ξ** é o autovetor e **η** é o autovetor generalizado associado ao autovalor repetido.

Para t grande, o termo dominante é $c_2\boldsymbol{\xi}te^{rt}$ (pois tem t no produto). Assim, quando $t \to \infty$, todas as trajetórias tendem à origem (pois r<0), tangentes à reta na direção do autovetor **ξ**.

Isto é verdadeiro, mesmo quando $c_2 = 0$, pois, nesse caso, a solução $\mathbf{x} = c_1\boldsymbol{\xi}e^{rt}$ pertence a essa reta.



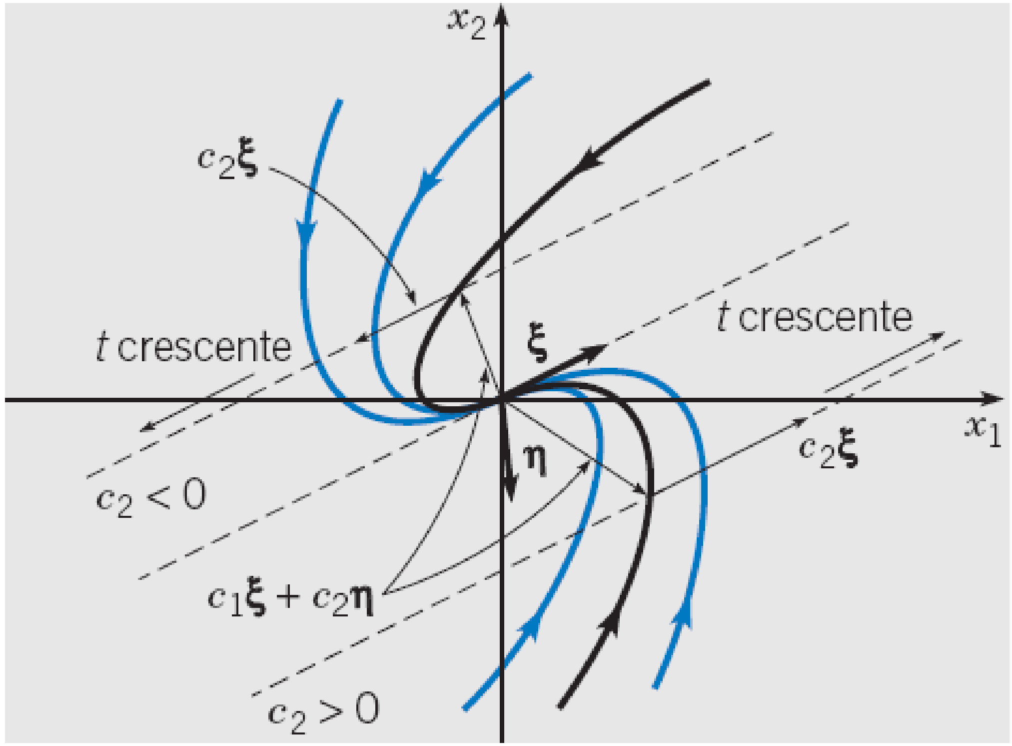
CASO 3. AUTOVALORES IGUAIS

(b) Um autovetor independente. Neste caso a solução geral (como já vimos na aula 06_6) é

$$\mathbf{x} = c_1\boldsymbol{\xi}e^{rt} + c_2(\boldsymbol{\xi}te^{rt} + \boldsymbol{\eta}e^{rt})$$

em que $\boldsymbol{\xi}$ é o autovetor e $\boldsymbol{\eta}$ é o autovetor generalizado associado ao autovalor repetido.

Analogamente, para valores de t negativos grandes em módulo, o termo $c_2\boldsymbol{\xi}te^{rt}$ é, novamente, dominante, de modo que, quando $t \to -\infty$, a inclinação de cada trajetória tende à inclinação do autovetor $\boldsymbol{\xi}$.
A orientação das trajetórias depende das posições relativas de $\boldsymbol{\xi}$ e $\boldsymbol{\eta}$ como veremos a seguir...



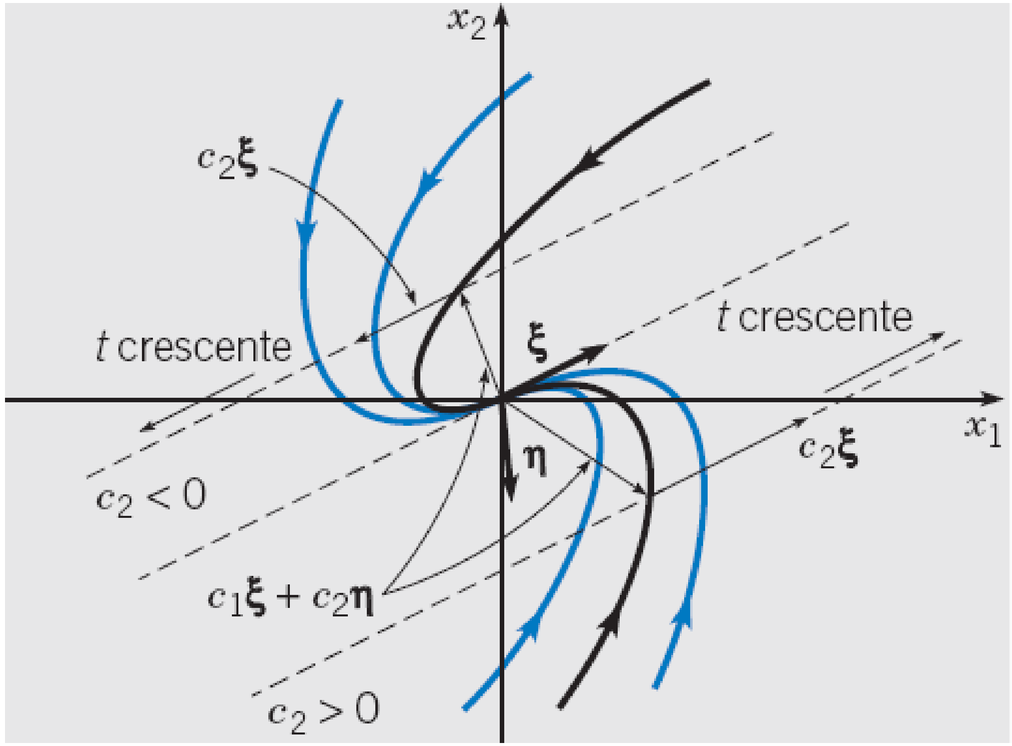
NOÇÕES DE ESTABILIDADE

CASO 3. AUTOVALORES IGUAIS

Para localizar as trajetórias, é melhor escrever a solução na forma:

$$\mathbf{x} = (c_1\boldsymbol{\xi} + c_2\boldsymbol{\eta} + c_2\boldsymbol{\xi}t)e^{rt} = \mathbf{y}e^{rt} \qquad \mathbf{y} \equiv c_1\boldsymbol{\xi} + c_2\boldsymbol{\eta} + c_2\boldsymbol{\xi}t$$

Note que o vetor **y** determina a direção e o sentido de **x**, enquanto a quantidade escalar e^{rt} afeta apenas a magnitude de **x** (tamanho). Observe também que, para valores fixos de c_1 e c_2, a expressão para **y** é uma equação vetorial da reta contendo o ponto $c_1\boldsymbol{\xi} + c_2\boldsymbol{\eta}$ (quando t=0) e paralela a **ξ**. Utilizamos este fato para desenhar as trajetórias das soluções para valores fixos de c_1 e c_2 da seguinte forma:



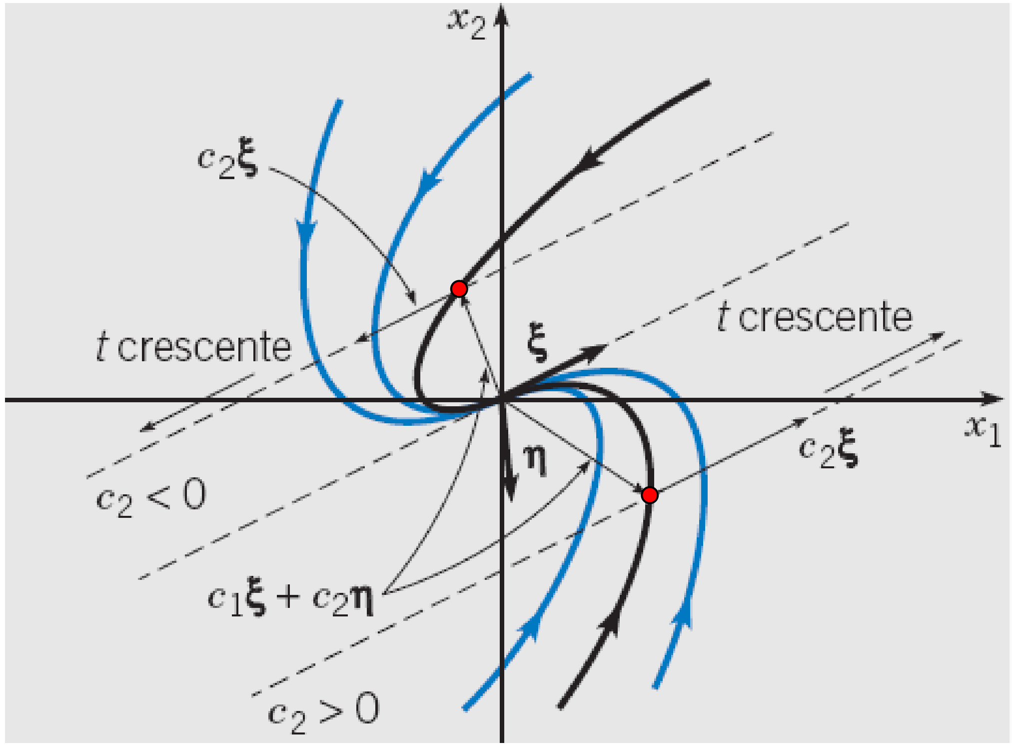
NOÇÕES DE ESTABILIDADE

CASO 3. AUTOVALORES IGUAIS

Desenhe a reta fornecida por $(c_1\boldsymbol{\xi} + c_2\boldsymbol{\eta}) + c_2\boldsymbol{\xi}t$ e note o sentido do movimento quando t cresce nessa reta. A figura mostra duas dessas retas, uma para $c_2 > 0$ e outra para $c_2 < 0$ (lembre que c_1 e c_2 são dados). A seguir, observe que a trajetória dada contém o ponto $c_1\boldsymbol{\xi} + c_2\boldsymbol{\eta}$ (ponto vermelho na figura) quando t = 0.

Além disso, quando t aumenta, o vetor **x** tem o mesmo sentido de **y**, mas quando t aumenta o tamanho de **x** decresce rapidamente e tende a zero, devido ao fator exponencial decaindo e^{rt} (r<0).

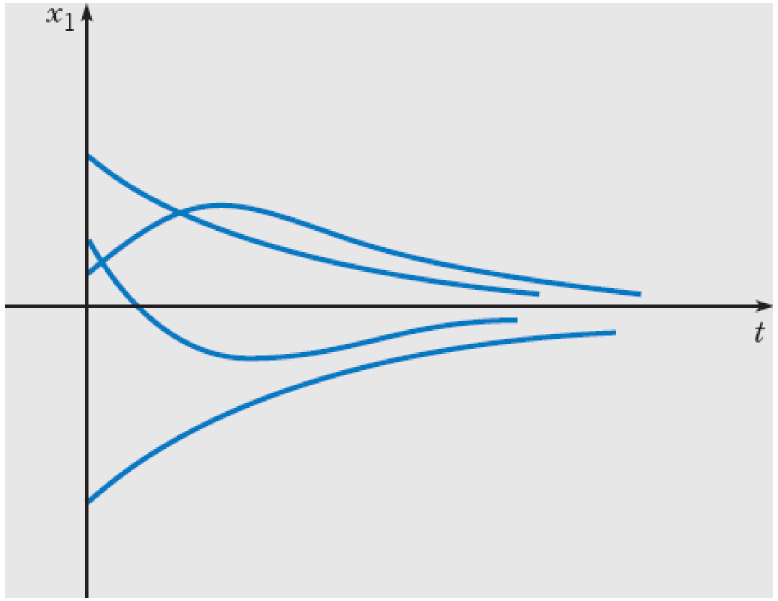
Finalmente, quando t tende a −∞, o sentido de **x** é determinado pelos pontos na parte correspondente da reta, e o tamanho de **x** tende a infinito. Dessa forma, obtemos a trajetória em preto da figura.

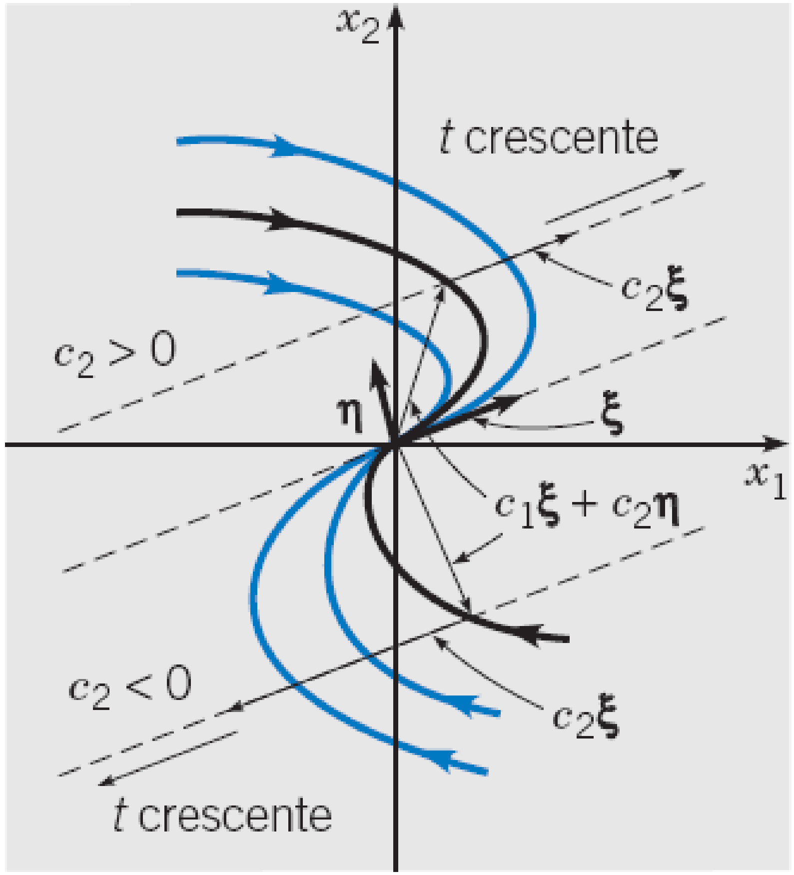


NOÇÕES DE ESTABILIDADE

CASO 3. AUTOVALORES IGUAIS

Gráficos típicos de x_1 em função de t aparecem na figura ao lado





Na última figura é apresentado um caso de plano de fases para outro $\boldsymbol{\eta}$. O raciocínio é o mesmo do slide anterior (mas agora para outro $\boldsymbol{\eta}$).

Quando um autovalor duplo tem um único autovetor independente, o ponto crítico é chamado de nó impróprio ou degenerado.

UFPR
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

CASO 4. AUTOVALORES COMPLEXOS (PARTE REAL NÃO NULA)

Suponha que os autovalores são λ ± iμ, em que λ e μ são reais, λ ≠ 0 e μ > 0.
Poderíamos escrever a solução geral em termos dos autovalores e autovetores, como já vimos anteriormente em outras aulas (aula 06_4). No entanto, vamos proceder de modo diferente.
Vamos considerar o sistema abaixo e sua forma escalar ao lado

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} \lambda & \mu \\ -\mu & \lambda \end{pmatrix}\mathbf{x} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{aligned} x_1' &= \lambda x_1 + \mu x_2 \\ x_2' &= -\mu x_1 + \lambda x_2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x_1 &= r cos\theta \\ x_2 &= r sen\theta \end{aligned}$$

Vamos introduzir as coordenadas polares r, θ dadas por $r^2 = x_1^2 + x_2^2$ $\quad \tan\theta = x_2/x_1$

Diferenciando essas duas equações respeito da variável t obtemos:

$$2r\left(\frac{dr}{dt}\right) = 2x_1\left(\frac{dx_1}{dt}\right) + 2x_2\left(\frac{dx_2}{dt}\right) \qquad \sec^2\theta\left(\frac{d\theta}{dt}\right) = \frac{x_1(dx_2/dt) - x_2(dx_1/dt)}{x_1^2}$$

UFPR UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

CASO 4. AUTOVALORES COMPLEXOS (PARTE REAL NÃO NULA)

Outra forma de escrever as duas ultimas equações

$$2r\left(\frac{dr}{dt}\right) = 2x_1\left(\frac{dx_1}{dt}\right) + 2x_2\left(\frac{dx_2}{dt}\right) \qquad \sec^2\theta\left(\frac{d\theta}{dt}\right) = \frac{x_1(dx_2/dt) - x_2(dx_1/dt)}{x_1^2}$$

é: $rr' = x_1x_1' + x_2x_2'$ $\qquad (\sec^2\theta)\theta' = (x_1x_2' - x_2x_1')/x_1^2$

Substituindo $\begin{aligned} x_1' &= \lambda x_1 + \mu x_2 \\ x_2' &= -\mu x_1 + \lambda x_2 \end{aligned}$ em $rr' = x_1x_1' + x_2x_2'$ obtemos: $r' = \lambda r$

E sua solução é: $r = ce^{\lambda t}$

Substituindo $\begin{aligned} x_1' &= \lambda x_1 + \mu x_2 \\ x_2' &= -\mu x_1 + \lambda x_2 \end{aligned}$ em$(\sec^2\theta)\theta' = (x_1x_2' - x_2x_1')/x_1^2 \quad \rightarrow \quad \theta' = -\mu$

E sua solução é: $\theta = -\mu t + \theta_0$ $\qquad \theta_0 = \theta(0)$

CASO 4. AUTOVALORES COMPLEXOS (PARTE REAL NÃO NULA)

$r = ce^{\lambda t}$ $\theta = -\mu t + \theta_0$ $\theta_0 = \theta(0)$

$x_1 = r\cos\theta$

$x_2 = r\,sen\theta$

Estas equações acima (soluções) são **equações paramétricas** em coordenadas polares das trajetórias do sistema.

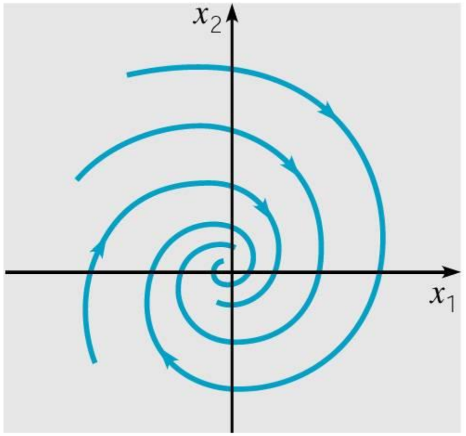
Como μ > 0, segue, que θ diminui quando t aumenta, de modo que o movimento na trajetória é no sentido horário (o ângulo θ é medido a partir do semieixo positivo de x_1).

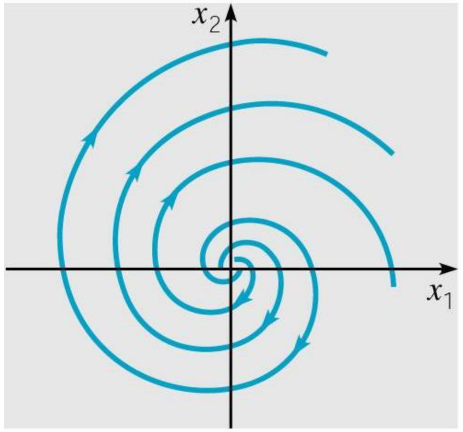
Quando t → ∞ vemos que r → 0 se λ < 0 e que r → ∞ se λ > 0.

As trajetórias são espirais que tendem ou se afastam da origem, dependendo do sinal de λ.

Ambas as possibilidades estão ilustradas nas figuras ao lado.

O ponto crítico é chamado de ponto espiral nesse caso. Os termos sorvedouro espiral e fonte espiral são usados, frequentemente, para se referir a pontos espirais cujas trajetórias se aproximam ou se afastam, respectivamente, do ponto crítico.



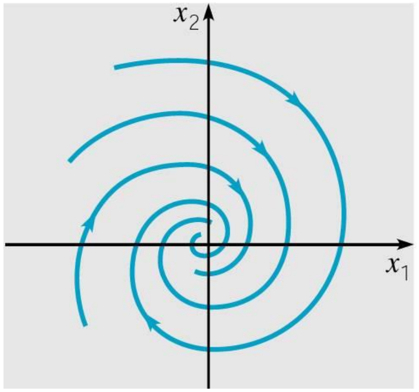


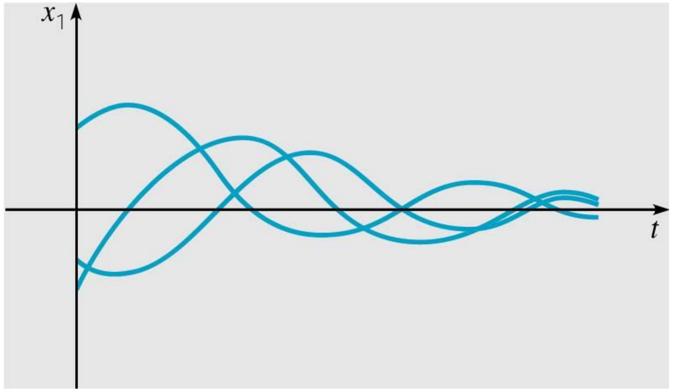
NOÇÕES DE ESTABILIDADE

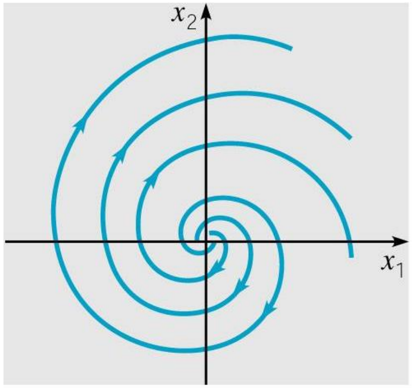
CASO 4. AUTOVALORES COMPLEXOS (PARTE REAL NÃO NULA)

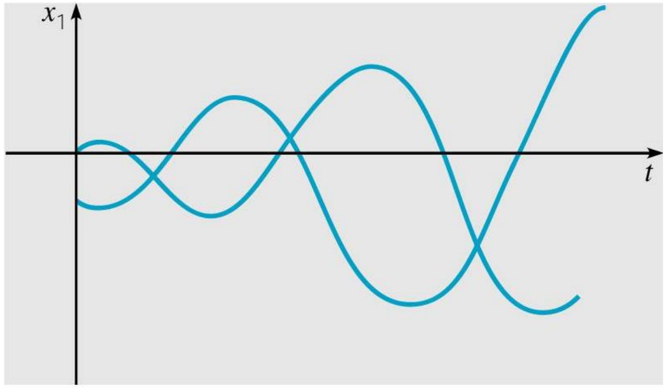
Então, as trajetórias são espirais que tendem ou se afastam da origem, dependendo do sinal de λ. Ambas as possibilidades estão ilustradas nas figuras junto com alguns gráficos típicos de x_1 em função de t.

De modo geral, as trajetórias são sempre espirais para qualquer sistema com autovalores complexos $\lambda \pm i\mu$, em que $\lambda \neq 0$. Elas estão orientadas para dentro ou para fora, respectivamente, dependendo se o sinal de λ é negativo ou positivo. Podem ser alongadas e retorcidas em relação aos eixos coordenados, e o sentido do movimento pode ser horário ou trigonométrico (anti-horário).









CASO 5. AUTOVALORES IMAGINÁRIOS PUROS

Nesse caso, $\lambda = 0$ e o sistema do caso anterior se reduz a

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 0 & \mu \\ -\mu & 0 \end{pmatrix}\mathbf{x} \qquad \Leftrightarrow \qquad \begin{aligned} x_1' &= \mu x_2 \\ x_2' &= -\mu x_1 \end{aligned}$$

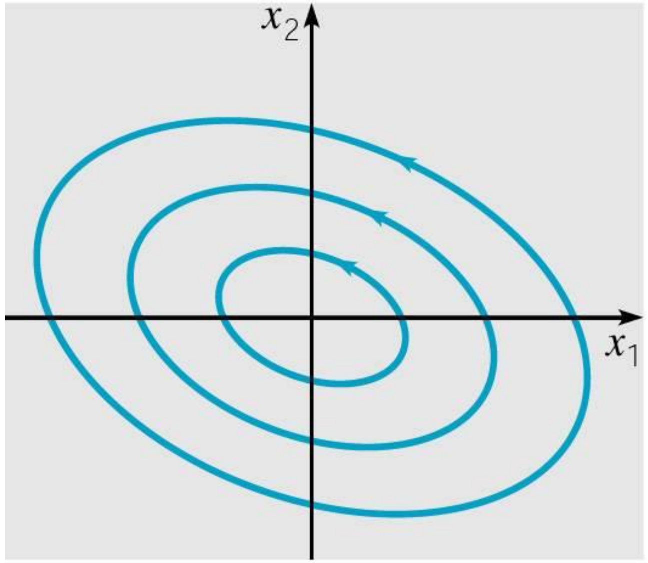
Novamente vamos introduzir as coordenadas polares r, θ dadas por $\begin{aligned} x_1 &= r cos\theta \\ x_2 &= r sen\theta \end{aligned}$

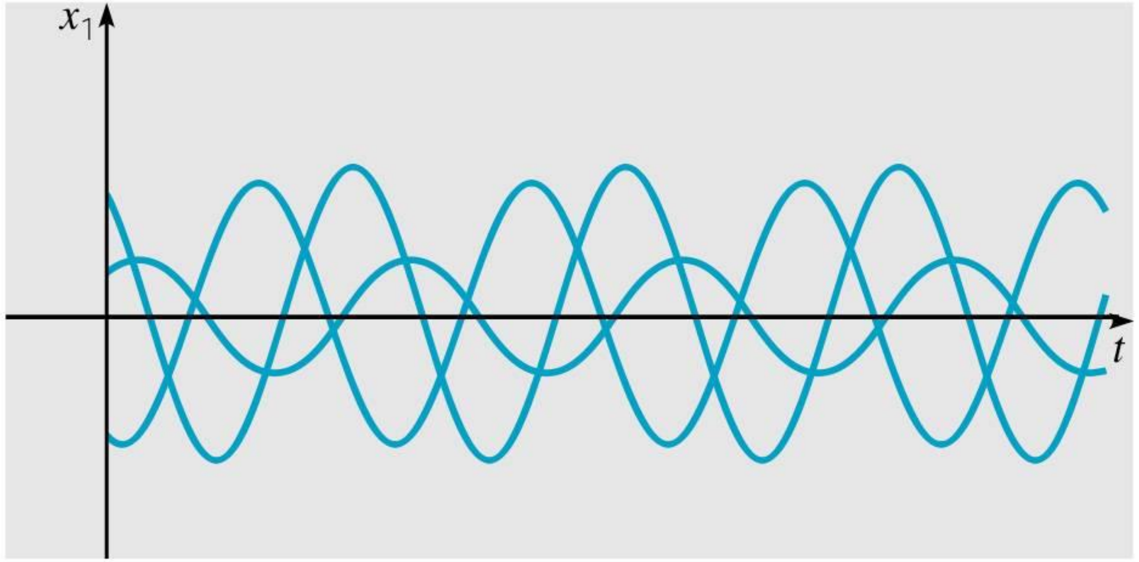
e chegamos (da mesma forma como no caso 4) a: $r = c$ $\qquad \theta = -\mu t + \theta_0$

Logo, as trajetórias são círculos centrados na origem, percorridos no sentido horário se $\mu > 0$ e no sentido trigonométrico se $\mu < 0$.
Um circuito completo em torno da origem é feito em um intervalo de tempo de comprimento $2\pi/\mu$, de modo que todas as soluções são periódicas com período $2\pi/\mu$. O ponto crítico é chamado de centro.

CASO 5. AUTOVALORES IMAGINÁRIOS PUROS

Em geral, quando os autovalores são imaginários puros, é possível mostrar (veja o Problema 19) que as trajetórias são elipses centradas na origem. A figura mostra uma situação típica e inclui, também, alguns gráficos típicos de x_1 em função de t.



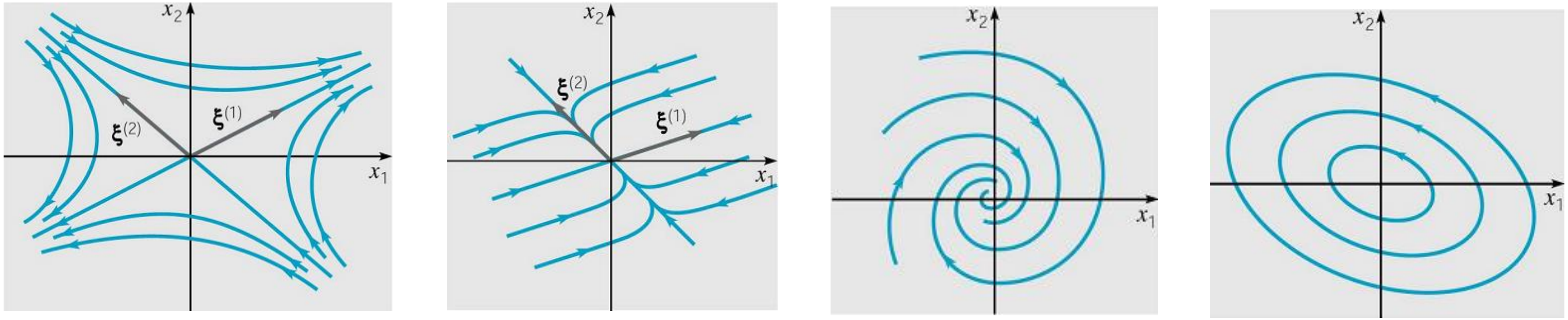


A seguir será apresentado um resumo dos cinco casos analisados e de como é possível examinando as figuras das trajetórias, chegar a certas conclusões sobre o sistema de equações estudado e suas soluções...

NOÇÕES DE ESTABILIDADE

RESUMO

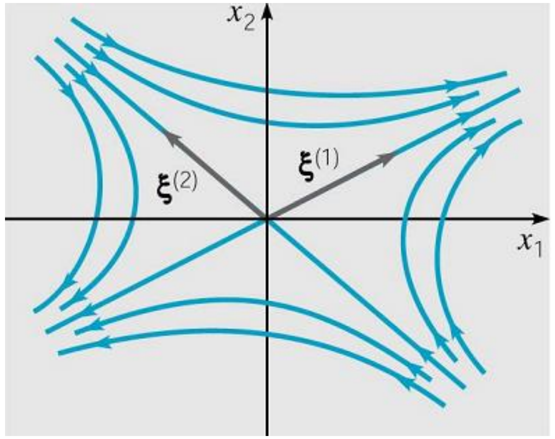
1. Quando $t \to \infty$ as trajetórias se comportam de alguma das seguintes formas:
   - Se aproxima de infinito
   - Se aproxima do ponto crítico $\mathbf{x}=0$
   - Repetidas vezes percorre uma curva fechada, correspondente a uma solução periódica, em torno do ponto crítico
2. As trajetórias nunca se interceptam e por cada ponto do plano de fases (x_0, y_0) passa uma única trajetória
3. A única solução que passa pela origem é a solução de equilíbrio $\mathbf{x}=0$. Outras soluções podem se aproximar mas nunca chegam à origem.

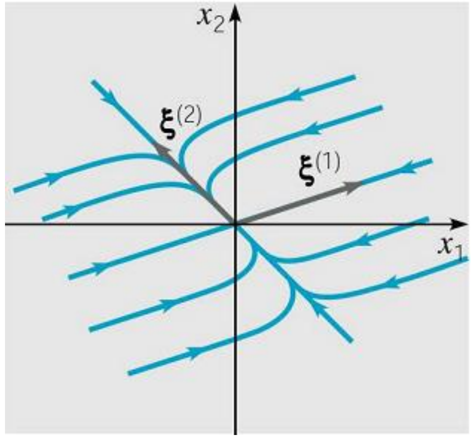


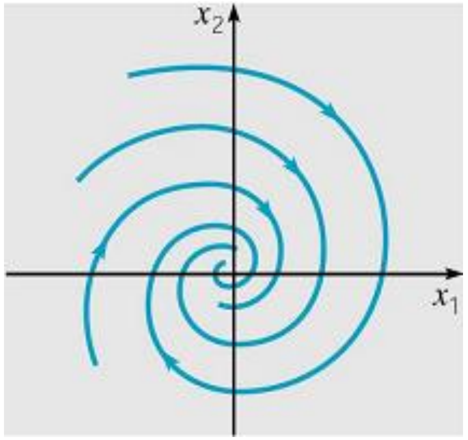
NOÇÕES DE ESTABILIDADE

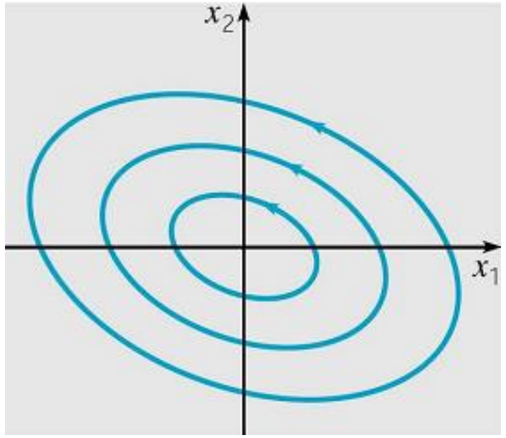
RESUMO

1. Quando $t \to \infty$ o conjunto de todas as trajetórias é tal que uma das três situações a seguir ocorre:
   - Todas as trajetórias se aproximam do ponto crítico $\mathbf{x} = 0$. Esse é o caso quando os autovalores são reais e negativos ou complexos com parte real negativa. A origem é um nó atrator ou um sorvedouro espiral.
   - Todas as trajetórias permanecem limitadas, mas não tendem à origem. Isto ocorrerá quando os autovalores forem imaginários puros. A origem é o centro
   - Algumas trajetórias, e, possivelmente, todas as trajetórias, exceto $\mathbf{x} = 0$, tornam-se ilimitadas. Esse será o caso, se pelo menos um dos autovalores for positivo ou se os autovalores tiverem parte real positiva. A origem é um nó fonte, ou uma fonte espiral, ou um ponto de sela.









RESUMO

A tabela a seguir resume todas as informações obtidas para sistemas 2x2 do tipo **x´**=**Ax** e sobre a estabilidade da solução de equilíbrio **x**=0

Autovalores	Tipo de Ponto Crítico	Estabilidade
$r_1 > r_2 > 0$	Nó	Instável
$r_1 < r_2 < 0$	Nó	Assintoticamente estável
$r_2 < 0 < r_1$	Ponto de sela	Instável
$r_1 = r_2 > 0$	Nó próprio ou impróprio	Instável
$r_1 = r_2 < 0$	Nó próprio ou impróprio	Assintoticamente estável
$r_1, r_2 = \lambda \pm i\mu$	Ponto espiral	
$\lambda > 0$		Instável
$\lambda < 0$		Assintoticamente estável
$r_1 = i\mu, r_2 = -i\mu$	Centro	Estável

NOÇÕES DE ESTABILIDADE

Lista de exercícios disponível em:

http://www.eletrica.ufpr.br/p/professores:patricio:inicial

Disciplina TE315 (Equações Diferenciais para Engenharia Elétrica)

Gabaritos disponíveis no mesmo endereço