LISTA 06_6 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS
Sistema de equações homogêneas. Autovalores repetidos
Respostas no final
Gabaritos na página do professor

Em cada um dos problemas de 1 a 4:
(a) Desenhe um campo de direções e esboce algumas trajetórias.
(b) Descreva como as soluções se comportam quando t $\to\infty$.
(c) Encontre a solução geral do sistema de equações.

1. $$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

2. $$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ 8 & -4 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

3. $$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & 1 \\ -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

4. $$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -3 & \frac{5}{2} \\ -\frac{5}{2} & 2 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

Nos Problemas 5 e 6, encontre a solução geral do sistema de equações dado.

5. $$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

6. $$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

Em cada um dos problemas de 7 a 10:
(a) Encontre a solução do problema de valor inicial dado.
(b) Desenhe a trajetória da solução no plano x_1x_2 e desenhe, também, o gráfico de x_1 em função de t.

7. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 4 & -7 \end{pmatrix}\mathbf{x}, \qquad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

8. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} & \frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\mathbf{x}, \qquad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

9. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 2 & \frac{3}{2} \\ -\frac{3}{2} & -1 \end{pmatrix}\mathbf{x}, \qquad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$

10. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 3 & 9 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}\mathbf{x}, \qquad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

Em cada um dos Problemas 11 e 12:
(a) Encontre a solução do problema de valor inicial dado.
(b) Desenhe a trajetória correspondente no espaço $x_1x_2x_3$ e desenhe, também, o gráfico de x_1 em função de t.

11. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -4 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix}\mathbf{x}, \qquad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -30 \end{pmatrix}$

12. $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} & 1 & 1 \\ 1 & -\frac{5}{2} & 1 \\ 1 & 1 & -\frac{5}{2} \end{pmatrix}\mathbf{x}, \qquad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

Em cada um dos Problemas 13 e 14, resolva o sistema de equações dado pelo método do Problema 19 da lista 06_3. Suponha que t > 0.

13. $t\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

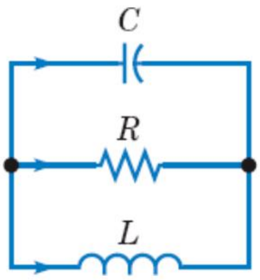
14. $t\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 4 & -7 \end{pmatrix}\mathbf{x}$

15 Mostre que todas as soluções do sistema

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

tendem a zero quando $t \to \infty$ se, e somente se, $a + d < 0$ e $ad - bc > 0$.

16. Considere, novamente, o circuito elétrico do Problema 26 da lista 06_4. Esse circuito é descrito pelo sistema de equações diferenciais



$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} I \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{L} \\ -\frac{1}{C} & -\frac{1}{RC} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I \\ V \end{pmatrix}.$$

(a) Mostre que os autovalores são reais e iguais se $L = 4R^2C$.

(b) Suponha que $R = 1\ \Omega$, $C = 1$ F, e $L = 4$ H. Suponha, também, que $I(0) = 1$ A e $V(0) = 2$ V. Encontre $I(t)$ e $V(t)$.

17. Considere novamente o sistema

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

que discutimos no Exemplo 2 da aula. Vimos que **A** tem um autovalor duplo $r_1 = r_2 = 2$ com um único autovetor independente $\boldsymbol{\xi}^{(1)} = (1, -1)^T$ ou qualquer múltiplo dele. Então uma solução do sistema é $\mathbf{x}^{(1)}(t) = \boldsymbol{\xi}^{(1)}e^{2t}$ e uma segunda solução independente tem a forma

$$\mathbf{x}^{(2)}(t) = \xi t e^{2t} + \eta e^{2t}$$

em que $\boldsymbol{\xi}$ e $\boldsymbol{\eta}$ satisfazem

$$(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})\xi = \mathbf{0}, \qquad (\mathbf{A} - 2\mathbf{I})\eta = \xi.$$

Na aula, resolvemos a primeira equação para $\boldsymbol{\xi}$ e depois a segunda para $\boldsymbol{\eta}$. Aqui pedimos que você resolva em ordem inversa.

(a) Mostre que **η** satisfaz (**A** – 2**I**)2**η** = 0.

(b) Mostre que (**A** – 2**I**)2 = **0**. Logo, o autovetor generalizado **η** pode ser escolhido arbitrariamente, mas tem que ser independente de $\boldsymbol{\xi}^{(1)}$.

(c) Seja **η** = (0, −1)^T. Determine **ξ** da segunda das equações acima e note que **ξ** = (1, −1)^T = $\boldsymbol{\xi}^{(1)}$. Essa escolha de **η** reproduz a solução encontrada no Exemplo 2.

(d) Seja **η** = (1, 0)^T , determine o vetor correspondente **ξ**.

(e) Seja **η** = (k_1, k_2), em que k_1 e k_2 são números arbitrários. Determine **ξ**. Qual é a relação entre este último vetor e o autovetor $\xi^{(1)}$?

Autovalores de Multiplicidade 3.

Se a matriz **A** tiver um autovalor de multiplicidade algébrica 3, então poderão existir um, dois ou três autovetores associados linearmente independentes. A solução geral do sistema **x**′ = **Ax** será diferente, dependendo do número de autovetores independentes associados ao autovalor triplo. Como observado na aula, não há dificuldade se existem três autovetores, já que, nesse caso, existem três soluções independentes da forma **x** = **ξ**e^{rt}. Os dois problemas a seguir ilustram o procedimento para encontrar a solução no caso de um autovalor triplo com um ou dois autovetores independentes, respectivamente.

18. Considere o sistema

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & 4 \end{pmatrix}\mathbf{x}.$$

(a) Mostre que r = 2 é um autovalor de multiplicidade 3 da matriz de coeficientes **A** e que existe apenas um autovetor independente associado, a saber,

$$\boldsymbol{\xi}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

(b) Usando a informação do item (a), escreva uma solução $\mathbf{x}^{(1)}$(t) do sistema. Não existe outra solução da forma puramente exponencial **x** = **ξ**e^{rt}.

(c) Para encontrar uma segunda solução, suponha que **x** = **ξ**te^{2t} + **η**e^{2t}. Mostre que **ξ** e **η** satisfazem as equações

$$(\mathbf{A} - 2\mathbf{I})\boldsymbol{\xi} = \mathbf{0} \qquad (\mathbf{A} - 2\mathbf{I})\eta = \boldsymbol{\xi}.$$

Como **ξ** já foi encontrado no item (a), resolva a segunda equação para **η**. Despreze o múltiplo de $\boldsymbol{\xi}^{(1)}$ que aparece em **η**, já que nos leva, apenas, a um múltiplo da primeira solução $\mathbf{x}^{(1)}$. Depois, escreva uma segunda solução $\mathbf{x}^{(2)}(t)$ do sistema

(d) Para encontrar uma terceira solução, suponha que $\mathbf{x} = \boldsymbol{\xi}(t^2/2)e^{2t} + \boldsymbol{\eta}te^{2t} + \boldsymbol{\zeta}e^{2t}$. Mostre que $\boldsymbol{\xi}$, $\boldsymbol{\eta}$ e $\boldsymbol{\zeta}$ satisfazem as equações

$$(\mathbf{A}-2\mathbf{I})\xi = \mathbf{0}, \quad (\mathbf{A}-2\mathbf{I})\eta = \xi, \quad (\mathbf{A}-2\mathbf{I})\zeta = \eta.$$

As duas primeiras equações são as mesmas do item (c); logo, para resolver a equação para $\boldsymbol{\zeta}$, despreze, novamente, o múltiplo de $\boldsymbol{\xi}^{(1)}$ que aparece. Depois, escreva uma terceira solução $\mathbf{x}^{(3)}(t)$ do sistema.

(e) Escreva uma matriz fundamental $\boldsymbol{\Psi}(t)$ para o sistema.

(f) Forme a matriz **T** com o autovetor $\xi^{(1)}$ na primeira coluna e os autovetores generalizados $\boldsymbol{\eta}$ e $\boldsymbol{\zeta}$ na segunda e terceira colunas. Depois, encontre $\mathbf{T}^{-1}$ e forme o produto $\mathbf{J} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{AT}$. A matriz **J** é a forma canônica de Jordan de **A**.

19. Considere o sistema

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 5 & -3 & -2 \\ 8 & -5 & -4 \\ -4 & 3 & 3 \end{pmatrix}\mathbf{x}.$$

(a) Mostre que $r = 1$ é um autovalor triplo da matriz de coeficientes **A** e que existem dois autovetores associados linearmente independentes, que podemos escolher como

$$\xi^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \xi^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Encontre duas soluções linearmente independentes $\mathbf{x}^{(1)}(t)$ e $\mathbf{x}^{(2)}(t)$

(b) Para encontrar uma terceira solução, suponha que $\mathbf{x} = \boldsymbol{\xi}te^{t} + \boldsymbol{\eta}e^{t}$; mostre que, então, $\boldsymbol{\xi}$ e $\boldsymbol{\eta}$ têm que satisfazer

$$(\mathbf{A}-\mathbf{I})\xi = \mathbf{0},$$

$$(\mathbf{A}-\mathbf{I})\eta = \xi.$$

(c) A equação será satisfeita se $\boldsymbol{\xi}$ for um autovetor; logo, um modo de proceder é escolher $\boldsymbol{\xi}$ como uma combinação linear apropriada de $\boldsymbol{\xi}^{(1)}$ e $\boldsymbol{\xi}^{(2)}$ para que a equação tenha solução, e depois resolvê-la para **η**. Mas vamos proceder de maneira diferente, seguindo o método do Exercício 17. Primeiro, mostre que **η** satisfaz

$$(\mathbf{A} - \mathbf{I})2\boldsymbol{\xi} = 0$$

Depois, mostre que $(\mathbf{A} - \mathbf{I})^2 = \mathbf{0}$. Logo, **η** pode ser escolhido arbitrariamente, exceto que tem que ser independente de $\boldsymbol{\xi}^{(1)}$ e de $\boldsymbol{\xi}^{(2)}$.

(d) Uma escolha conveniente para **η** é $(0, 0, 1)^T$. Encontre o **ξ** correspondente. Verifique se **ξ** é um autovetor.

(e) Escreva uma matriz fundamental $\boldsymbol{\Psi}(t)$ para o sistema.

(f) Forme a matriz **T** com o autovetor $\boldsymbol{\xi}^{(1)}$ na primeira coluna e com o autovetor **ξ** encontrado no item (d) e o autovetor generalizado **η** nas duas últimas colunas. Encontre $\mathbf{T}^{-1}$ e forme o produto $\mathbf{J} = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}$. A matriz **J** é a forma canônica de Jordan de **A**.

20. Seja $\boldsymbol{J} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\lambda} & \boldsymbol{l} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\lambda} \end{pmatrix}$ em que $\boldsymbol{l}$ é um número real arbitrário.

(a) Encontre $\mathbf{J}^2$, $\mathbf{J}^3$ e $\mathbf{J}^4$.

(b) Use um argumento indutivo para mostrar que $\boldsymbol{J}^n = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\lambda}^n & n\boldsymbol{\lambda}^{n-1} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\lambda}^n \end{pmatrix}$

(c) Determine $e^{\mathbf{J}t}$.

(d) Use $e^{\mathbf{J}t}$ para resolver o problema de valor inicial $\mathbf{x}' = \mathbf{J}\mathbf{x}$, $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0$.

21. Seja $\boldsymbol{J} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & l \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$ em que l é um número real arbitrário.

(a) Encontre $\mathbf{J}^2$, $\mathbf{J}^3$ e $\mathbf{J}^4$.

(b) Use um argumento indutivo para mostrar que $\boldsymbol{J}^n = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\lambda}^n & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\lambda}^n & n\boldsymbol{\lambda}^{n-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{\lambda}^n \end{pmatrix}$

(c) Determine $e^{\mathbf{J}t}$.

(d) Observe que, se você escolher $l = 1$, então a matriz **J** nesse problema é igual à matriz **J** no Problema 19 (f). Usando a matriz T do Problema 19 (f), forme o produto $\mathbf{T}e^{\mathbf{J}t}$ com $l = 1$. A matriz resultante é a mesma que a matriz fundamental $\boldsymbol{\Psi}(t)$ no Problema 19 (e)? Se não for, explique a discrepância.

22.Seja $\boldsymbol{J} = \begin{pmatrix} \lambda & l & 0 \\ 0 & \lambda & l \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$ em que l é um número real arbitrário.

(a) Encontre $\mathbf{J}^2$, $\mathbf{J}^3$ e $\mathbf{J}^4$.

(b) Use um argumento indutivo para mostrar que $\boldsymbol{J}^n = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\lambda}^n & n\boldsymbol{\lambda}^{n-1} & \frac{n(n-1)}{2}\boldsymbol{\lambda}^{n-2} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\lambda}^n & n\boldsymbol{\lambda}^{n-1} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \boldsymbol{\lambda}^n \end{pmatrix}$

(c) Determine $e^{\mathbf{J}t}$

(d) Observe que, se você escolher $l = 2$, então a matriz **J** nesse problema é igual à matriz **J** no Problema 18(f). Usando a matriz **T** do Problema 18(f), forme o produto $\mathbf{T}e^{\mathbf{J}t}$ com $l = 2$. A matriz resultante é a mesma que a matriz fundamental $\mathbf{\Psi}$(t) no Problema 18(e).

RESPOSTAS