EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARA ENGENHARIA ELÉTRICA
TE 315

Aula 06_5

SISTEMAS DE EQUAÇÕES. MATRIZES FUNDAMENTAIS

MATRIZES FUNDAMENTAIS

INTRODUÇÃO

Suponha que $\mathbf{x}^{(1)}(t)$, ..., $\mathbf{x}^{(n)}(t)$ formam um conjunto fundamental de soluções para a equação $\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x}$ em algum intervalo $\alpha < t < \beta$.

Então, a matriz

$$\boldsymbol{\Psi}(t) = \begin{pmatrix} x_1^{(1)}(t) & \cdots & x_1^{(n)}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n^{(1)}(t) & \cdots & x_n^{(n)}(t) \end{pmatrix}$$

cujas colunas são os vetores $\mathbf{x}^{(1)}(t)$, . . . , $\mathbf{x}^{(n)}(t)$, é dita uma matriz fundamental para o sistema $\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x}$.

Note que uma matriz fundamental é invertível (não é singular), já que suas colunas são vetores linearmente independentes, portanto $\det\boldsymbol{\Psi} \neq 0$.

Note também que: como $\mathbf{x}^{(1)}(t)$, ..., $\mathbf{x}^{(n)}(t)$ são soluções de $\mathbf{x}' = \mathbf{P}(t)\mathbf{x}$ então $\boldsymbol{\Psi}$ **satisfaz a equação diferencial matricial** $\boldsymbol{\Psi}' = \mathbf{P}(t)\boldsymbol{\Psi}$ ...vejamos um exemplo...

UFPR
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

EXEMPLO 1

Encontre uma matriz fundamental para o sistema $\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}$

No Exemplo 2 da aula 06_3 (slide 8), vimos que

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{3t} \qquad \mathbf{x}^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-t}$$

Naquele exemplo da aula 06_3 vimos que estas duas soluções são soluções linearmente independentes.

Assim, uma matriz fundamental para o sistema é:

$$\mathbf{\Psi}(t) = \begin{pmatrix} e^{3t} & e^{-t} \\ 2e^{3t} & -2e^{-t} \end{pmatrix}$$

MATRIZES FUNDAMENTAIS

SOLUÇÃO GERAL

A solução geral de **x**'=**P**(t)**x** que é: $\mathbf{x} = c_1\mathbf{x}^{(1)}(t) + \cdots + c_n\mathbf{x}^{(n)}$

Pode ser escrita na forma **x**=**c**$\boldsymbol{\Psi}$(t) em que **c** é um vetor constante com componentes c_1, ... , c_n

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\Psi}(t)\mathbf{c} = \begin{pmatrix} x_1^{(1)}(t) & \cdots & x_1^{(n)}(t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n^{(1)}(t) & \cdots & x_n^{(n)}(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$$

Vamos agora ver uma solução especifica, ou seja um caso de valor inicial. Vamos supor as condições iniciais através do vetor condição inicial $\mathbf{x}^0$:

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0$$

em que t_0 é um ponto dado em $\alpha < t < \beta$ e $\mathbf{x}^0$ é o vetor inicial dado.

SOLUÇÃO GERAL

Desta forma, o vetor constante **c** em $\mathbf{x}=\mathbf{c}\Psi(t)$ deve satisfazer a condição inicial $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}^0$ portanto

$$\mathbf{c}\Psi(t_0) = \mathbf{x}^0$$

Como a matriz $\Psi(t_0)$ não é singular, ela é invertível...

$$\boldsymbol{\Psi}(t_0)\mathbf{c} = \mathbf{x}^0 \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{c} = \boldsymbol{\Psi}^{-1}(t_0)\mathbf{x}^0$$

Desta forma, a solução que procuramos pode se escrita assim: $\boxed{\mathbf{x} = \boldsymbol{\Psi}(t)\boldsymbol{\Psi}^{-1}(t_0)\mathbf{x}^0}$

Enfatizamos, no entanto, que, para resolver um problema de valor inicial dado, normalmente resolvemos $\mathbf{c}\Psi(t_0) = \mathbf{x}^0$ por redução de linhas e, depois, substituímos a solução **c** em $\mathbf{x}=\mathbf{c}\Psi(t)$ em vez de calcular $\boldsymbol{\Psi}^{-1}(t_0)$ e utilizar a ultima equação acima.

MATRIZES FUNDAMENTAIS

TEOREMA

Sejam os vetores
$$\mathbf{e}^{(1)}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\mathbf{e}^{(2)}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\dots,\mathbf{e}^{(n)}=\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix}$$

além disso, suponha que $\mathbf{x}^{(1)}$, ... , $\mathbf{x}^{(n)}$ são soluções do sistema $\mathbf{x}'=\mathbf{P}(t)\mathbf{x}$ em $\alpha<t<\beta$ satisfazendo as condições iniciais

$$\mathbf{x}^{(1)}(t_0)=\mathbf{e}^{(1)},\dots,\mathbf{x}^{(n)}(t_0)=\mathbf{e}^{(n)},\alpha<t_0<\beta$$

Então $\mathbf{x}^{(1)}$, . . . , $\mathbf{x}^{(n)}$ formam um conjunto fundamental de soluções

Vamos utilizar este teorema da seguinte forma:
Suponha que os vetores $\mathbf{x}^{(1)}$, . . . , $\mathbf{x}^{(n)}$ formam o conjunto fundamental de soluções mencionado no teorema acima.
Vamos definir à matriz destes vetores de $\mathbf{\Phi(t)}$ ou seja, ela seria a matriz das soluções fundamentais que satisfazem as condições iniciais do teorema, então

MATRIZES FUNDAMENTAIS

TEOREMA

teríamos:
$$\Phi(t_0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} = \mathbf{I}$$

como como $\mathbf{\Phi}^{-1}(t_0) = \mathbf{I}$, segue de $\mathbf{x} = \mathbf{\Psi}(t)\mathbf{\Psi}^{-1}(t_0)\mathbf{x}^0$ que

$$\mathbf{x} = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{\Phi}^{-1}(t_0)\mathbf{x}^0 = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{x}^0$$

Também pode se concluir que para qualquer outra matriz fundamental $\mathbf{\Psi}$(t) (diferente da nossa especifica $\mathbf{\Phi}$ definida exclusivamente para as condições especificas do Teorema)

$$\mathbf{x} = \mathbf{\Psi}(t)\mathbf{\Psi}^{-1}(t_0)\mathbf{x}^0 = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{x}^0 \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{\Phi}(t) = \mathbf{\Psi}(t)\mathbf{\Psi}^{-1}(t_0)$$

CONDIÇÕES INICIAS VARIÁVEIS

Embora a matriz fundamental **Φ(t)** seja, muitas vezes, mais complicada do que **Ψ(t)**, ela é particularmente útil se for necessário resolver repetidas vezes o mesmo sistema de equações diferenciais mas sujeito a condições iniciais diferentes.

Isto corresponde a um sistema físico dado que pode começar em muitos estados iniciais diferentes. Se a matriz fundamental **Φ**(t) tiver sido determinada, então a solução para cada conjunto de condições iniciais diferentes poderá ser encontrada, simplesmente, através da multiplicação de matrizes, $\mathbf{x} = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{x}^0$.

A matriz **Φ**(t) representa, assim, uma transformação linear das condições iniciais $\mathbf{x}^0$ na solução **x**(t) em um instante de tempo arbitrário t.

Vejamos um exemplo...

UFPR
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

EXEMPLO 2

Encontre a matriz fundamental **Φ** para o sistema do Exemplo 1, tal que **Φ**(0) = **I**.

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

As colunas de **Φ** tem que ser as soluções desse sistema acima, que satisfazem as condições iniciais

$$\mathbf{x}^{(1)}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{x}^{(2)}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Como sabemos a solução geral é: $\mathbf{x} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{3t} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-t}$

Assim, podemos encontrar a solução que satisfaz o primeiro conjunto de condições iniciais escolhendo $c_1 = c_2 = ½$ analogamente, obtemos a solução que satisfaz o segundo conjunto de condições iniciais escolhendo $c_1 = ¼$ e $c_2 = -¼$

MATRIZES FUNDAMENTAIS

EXEMPLO 2

A forma detalhada de encontrar estes valores é a de sempre, para o primeiro conjunto de condições iniciais:

$$\mathbf{x}^{(1)}(0) = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ou equivalentemente

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Operando nas linhas encontramos c_1 e c_2

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1/2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 1/2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} c_1 & & = 1/2 \\ & c_2 & = 1/2 \end{matrix}$$

Logo obtivemos: $$\mathbf{x}^{(1)}(t) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} e^{3t} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} e^{-t} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}e^{3t} + \frac{1}{2}e^{-t} \\ e^{3t} - e^{-t} \end{pmatrix}$$

Da mesma forma para o segundo conjunto de condições iniciais

MATRIZES FUNDAMENTAIS

EXEMPLO 2

Assim, a MATRIZ FUNDAMENTAL **Φ** é:

$$\mathbf{\Phi}(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}e^{3t} + \frac{1}{2}e^{-t} & \frac{1}{4}e^{3t} - \frac{1}{4}e^{-t} \\ e^{3t} - e^{-t} & \frac{1}{2}e^{3t} + \frac{1}{2}e^{-t} \end{pmatrix}$$

Como já tínhamos adiantado no slide 8, **Φ(t)** é mais complicada do que **Ψ(t)**, que neste caso é:

$$\mathbf{\Psi}(t) = \begin{pmatrix} e^{3t} & e^{-t} \\ 2e^{3t} & -2e^{-t} \end{pmatrix}$$

mas agora com **Φ(t)** **é muito mais fácil resolver o sistema para qualquer conjunto de condições iniciais**.

A MATRIZ e^{At}

Lembre que a solução do problema de valor inicial escalar $x' = ax$ com $x(0) = x_0$ é:

$$x = x_0 e^{at}$$

Considere, agora, o problema de valor inicial correspondente para um sistema de equações (n×n), a saber, $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$, $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0$, é $\mathbf{x} = \mathbf{\Phi}(t)\mathbf{x}^0$, em que $\mathbf{\Phi}(0) = \mathbf{I}$ e $\mathbf{A}$ é uma matriz constante.

Qual é a matriz $\mathbf{\Phi}$ solução deste sistema?

Comparando estas equações poderíamos esperar que a solução do sistema (nxn) (ou seja a matriz $\mathbf{\Phi}$) tivesse um caráter exponencial como no caso escalar acima mencionado....e de fato pode se mostrar que ela é $\mathbf{\Psi} = e^{\mathbf{A}t}$ em que $\mathbf{A}$ é nossa conhecida matriz dos coeficientes (constantes).

MATRIZES FUNDAMENTAIS

A MATRIZ e^{At}

Da mesma forma que a função exponencial escalar pode ser representada por uma série de potências:

$$e^{at} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n t^n}{n!} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n t^n}{n!}$$

a função exponencial matricial $e^{\mathbf{A}t}$ pode ser representada assim (simplesmente substituindo o escalar "a" pela matriz (nxn) "**A**")

$$e^{\mathbf{A}t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^n t^n}{n!} = \mathbf{I} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^n t^n}{n!} = \mathbf{I} + \mathbf{A}\mathrm{t} + \frac{\mathbf{A}^2 t^2}{2!} + \cdots + \frac{\mathbf{A}^n t^n}{n!}$$

em que cada termo da série é uma matriz (nxn)

MATRIZES FUNDAMENTAIS

A MATRIZ e^{At}

Esta função exponencial matricial apresenta todas as propriedades usuais das funções exponenciais (veja detalhes no livro de texto)

Resumindo, a solução do problema $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ com $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}^0$ é $\mathbf{x} = e^{\mathbf{A}t}\,\mathbf{x}^0$

Como se constrói a função $e^{\mathbf{A}t}$ a partir de uma matriz **A**?

Vejamos um exemplo para uma matriz qualquer **A** (neste caso escolheremos uma matriz 2x2)

MATRIZES FUNDAMENTAIS

EXEMPLO 3

Considere a matriz diagonal a seguir $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

Então: $\mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^2 \end{pmatrix} \ldots\ldots \mathbf{A}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^3 \end{pmatrix}, \ldots$

ou em geral... $\mathbf{A}^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2^n \end{pmatrix}$

e $e^{\mathbf{A}t}$ seria: $e^{\mathbf{A}t} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathbf{A}^n t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \begin{pmatrix} 1/n! & 0 \\ 0 & 2^n/n! \end{pmatrix} t^n = \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{2t} \end{pmatrix}$

Vamos agora retomar nosso sistema de n equações...

UFPR
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

SISTEMA DE EQUAÇÕES ACOPLADAS

A razão básica de por que um sistema linear de equações (algébricas ou diferenciais) apresenta alguma dificuldade é que as equações estão, em geral, acopladas.

Em outras palavras, algumas das equações, ou todas elas, envolvem mais de uma das incógnitas – tipicamente, todas elas.

Portanto, as equações em um sistema têm que ser resolvidas simultaneamente.

Por outro lado, se cada equação dependesse de uma única variável, então cada equação poderia ser resolvida independente de todas as outras, o que é uma tarefa muito mais simples.

Essa observação sugere que um modo de resolver um sistema de equações pode ser transformando-o em um sistema equivalente desacoplado, no qual cada equação contém uma única incógnita.

Isto corresponde a transformar a matriz de coeficientes **A** em uma matriz diagonal.

UFPR UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

SISTEMA DE EQUAÇÕES ACOPLADAS

Se a matriz **A** for diagonal (chamaremos ela de matriz **D**) teremos um sistema de equações assim:

$$\begin{aligned} x_1' &= d_{11}x_1 + 0x_2 + \cdots + 0x_n \\ x_2' &= 0x_1 + d_{11}x_2 + \cdots + 0x_n \\ &\vdots \\ x_n' &= 0x_1 + 0x_2 + \cdots + d_{nn}x_n \end{aligned}$$

Autovetores servem para obter tal transformação (diagonalizar a matriz **A**).
Suponha que a matriz (n×n) **A** tem um conjunto completo de n autovetores linearmente independentes, ou seja, os autovalores de **A** são distintos ou **A** é autoadjunta.
Suponha que queremos desacoplar as equações.
Chamamos $\boldsymbol{\xi}^{(1)}$, ... , $\boldsymbol{\xi}^{(n)}$ a esses autovetores de **A** e λ_1, ... ,λ_1 aos autovalores associados, vamos formar a matriz **T** cujas colunas são os autovetores e transformar ela na matriz **D** diagonal...

MATRIZES FUNDAMENTAIS

SISTEMA DE EQUAÇÕES ACOPLADAS

Lembremos a definição das matrizes **A T** é **D**:

$$\mathbf{A} \equiv \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{T} \equiv \begin{pmatrix} \xi_1^{(1)} & \cdots & \xi_1^{(n)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_n^{(1)} & \cdots & \xi_n^{(n)} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{D} \equiv \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Como as colunas de **T** são vetores linearmente independentes, det **T** ≠ 0
Portanto, **T** é invertível e $\mathbf{T}^{-1}$ existe.
Um cálculo direto mostra que as colunas da matriz **AT** são, simplesmente, os vetores $\mathbf{A\xi}^{(1)}, \ldots, \mathbf{A\xi}^{(n)}$ e como $\mathbf{A\xi}^{(k)} = \lambda_k \mathbf{\xi}^{(k)}$, segue que

$$\mathbf{AT} = \begin{pmatrix} \lambda_1\xi_1^{(1)} & \cdots & \lambda_n\xi_1^{(n)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda_1\xi_n^{(1)} & \cdots & \lambda_n\xi_n^{(n)} \end{pmatrix} = \mathbf{TD}$$

Portanto temos que $\mathbf{T}^{-1}\mathbf{AT} = \mathbf{D}$ **!!!!**

SISTEMA DE EQUAÇÕES ACOPLADAS

Então, se os autovalores e autovetores de **A** forem conhecidos, **A** poderá ser transformada em uma matriz diagonal **D**.

Esse processo é conhecido como transformação de semelhança, e que **A** é a matriz semelhante da matriz diagonal **D**.

Outra maneira é dizer que a matriz **A** é diagonalizável.

A transformação de semelhança não muda os autovalores de **A** e transforma seus autovetores nos vetores coordenados (unitários) $e^{(1)}, \ldots, e^{(n)}$, ortogonais entre si.

Se a matriz **A** for autoadjunta, então seus autovetores $\boldsymbol{\xi}^{(1)}, \ldots, \boldsymbol{\xi}^{(n)}$ já são ortogonais entre si, só falta escolhê-los de modo que estejam normalizados à unidade, ou seja, o produto escalar dela por ela mesma $(\boldsymbol{\xi}^{(i)}, \boldsymbol{\xi}^{(i)}) = 1$ para todo i.

É fácil verificar que $\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{T}^*$, em outras palavras, a inversa da matriz **T** é igual à sua adjunta (que é a transposta da sua complexa conjugada).

Se **A** tiver menos do que n autovetores linearmente independentes, então não existe matriz **T** tal que $\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} = \mathbf{D}$. Nesse caso, **A** não é diagonalizável.

UFPR UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

EXEMPLO 4

Considere a matriz dos exemplos 1 e 2. Encontre uma matriz **T** que define uma transformação de semelhança e mostre que **A** é diagonalizável.

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

No Exemplo 2 da aula 06_3 (slide 8), vimos que os autovalores de **A** são are $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -1$ e seus autovetores são

$$\boldsymbol{\xi}^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad \boldsymbol{\xi}^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Portanto:

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{D} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Agora precisamos de $\mathbf{T}^{-1}$ portanto temos que encontrar ela...

MATRIZES FUNDAMENTAIS

EXEMPLO 4

Operando em **T** da forma que aprendemos em álgebra linear...

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & -1/4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 & 1/4 \\ 0 & 1 & 1/2 & -1/4 \end{pmatrix} \to \mathbf{T}^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 \\ 1/2 & -1/4 \end{pmatrix}$$

Portanto:

$$\mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 \\ 1/2 & -1/4 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/4 \\ 1/2 & -1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \mathbf{D}$$

Então, a matriz **A** é similar à matriz **D** e **A** é diagonalizável.

Ok, Vamos voltar, agora, para o sistema de equações inicial **x´=Ax** em que **A** é uma matriz constante e vamos ver como resolver este sistema de uma nova forma utilizando a diagonalização da matriz A...

SISTEMAS SEMELHANTES

Nas aulas 06_3 e 06_4 vimos como resolver **x´=Ax** partindo da hipótese de que a solução tem a forma **x=ξ**e^{rt}. Vamos ver agora outra forma de resolver esse sistema baseada na diagonalização da matriz de coeficientes **A**.

De acordo com o que vimos nesta aula, é possível diagonalizar **A** sempre que **A** tiver um conjunto completo de n autovetores linearmente independentes.

Sejam $\boldsymbol{\xi}^{(1)}, \ldots, \boldsymbol{\xi}^{(n)}$ os autovetores de **A** associados aos autovalores $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ primeiro formamos a matriz de semelhança **T** cujas colunas são $\boldsymbol{\xi}^{(1)}, \ldots, \boldsymbol{\xi}^{(n)}$.

A seguir definimos uma nova variável dependente **y** (que é um vetor nx1) tal que **x = Ty** ou seja, $\mathbf{y} \equiv \mathbf{T}^{-1}\mathbf{x}$

Como **x´=Ax** e como **T** é uma matriz constante podemos escrever **Ty´=ATy** e portanto $\mathbf{y}' = \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}\mathbf{y} = \mathbf{D}\mathbf{y}$ de forma que podemos resolver **y´=Dy** que é semelhante a **x´=Ax** com a vantagem de que **y´=Dy** está desacoplada.

Ambos sistemas de equações possuem suas matrizes fundamentais, que são:

MATRIZES FUNDAMENTAIS

SISTEMAS SEMELHANTES

Uma matriz fundamental para o sistema **y´=Dy** é dada por **Q**(t) = e$^{\mathbf{D}t}$ que por definição é (ver slide 13):

$$\mathbf{Q}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathbf{D}^n t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_n^n \end{pmatrix} \frac{t^n}{n!} = \begin{pmatrix} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda_1 t)^n}{n!} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda_n t)^n}{n!} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}$$

Já para o sistema **x´=Ax**, uma matriz fundamental (que já vimos) é $\mathbf{\Psi}$ com suas colunas sendo as soluções fundamentais **x** que satisfazem **x´=Ax.**
Como também sabemos que **x=Ty** (pois assim acabamos de definir **y**) podemos escrever:

$$\mathbf{\Psi} = \mathbf{TQ} = \begin{pmatrix} \xi_1^{(1)} & \cdots & \xi_1^{(n)} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_n^{(1)} & \cdots & \xi_n^{(n)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & e^{\lambda_n t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1^{(1)} e^{\lambda_1 t} & \cdots & \xi_1^{(n)} e^{\lambda_n t} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_n^{(1)} e^{\lambda_1 t} & \cdots & \xi_n^{(n)} e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}$$

MATRIZES FUNDAMENTAIS

SISTEMAS SEMELHANTES

$$\mathbf{\Psi} = \begin{pmatrix} \xi_1^{(1)} e^{\lambda_1 t} & \cdots & \xi_1^{(n)} e^{\lambda_n t} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \xi_n^{(1)} e^{\lambda_1 t} & \cdots & \xi_n^{(n)} e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}$$

As colunas desta **Ψ**(t) são iguais às soluções encontradas na aula 06_3 (slide 29). Logo, o processo de diagonalização não tem nenhuma vantagem computacional em relação ao método da aula 06_3 já que, em ambos os casos, é preciso calcular os autovalores e autovetores da matriz de coeficientes **A** do sistema de equações diferenciais.

Mesmo assim, vamos treinar a aplicação deste método utilizando os exemplos 1, 2 e 4

EXEMPLO 5

Considere o sistema **x´=Ax** em que **A** é a matriz dos exemplos 1, 2 e 4, ou seja:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Aplicando a transformação **x = Ty**, ao sistema **x´=Ax**, ele se transforma no sistema diagonal semelhante **y´= T^{-1}ATy=Dy**

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{x} \qquad \Rightarrow \qquad \mathbf{y}' = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\mathbf{y}$$

Obtenha uma matriz fundamental para o sistema **y´=Dy** e depois a transforme para obter uma matriz fundamental para o sistema original **x´=Ax**.

EXEMPLO 5

Multiplicando, repetidamente, D por si mesma, vemos que

$$\mathbf{D}^2 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{D}^3 = \begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 27 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \dots$$

Portanto, segue que $e^{\mathbf{D}t}$ é uma matriz diagonal com elementos diagonais e^{3t} e e^{-t} (lembre o slide 13) ou seja, a matriz fundamental do sistema **y´**=**Dy** é:

$$e^{\boldsymbol{D}t} = \mathbf{Q}(t) = \begin{pmatrix} e^{3t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$$

Finalmente, obtemos a matriz fundamental **Ψ**(t) para o sistema **x´**=**Ax** multiplicando **T** por $e^{\mathbf{D}t}$

$$\boldsymbol{\Psi}(t) = \mathbf{TQ} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{3t} & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{3t} & e^{-t} \\ 2e^{3t} & -2e^{-t} \end{pmatrix}$$

Note que esta matriz fundamental é a mesma que foi encontrada no Exemplo 1.

MATRIZES FUNDAMENTAIS

Lista de exercícios disponível em:

http://www.eletrica.ufpr.br/p/professores:patricio:inicial

Disciplina TE315 (Equações Diferenciais para Engenharia Elétrica)

Gabaritos disponíveis no mesmo endereço