

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARA ENGENHARIA ELÉTRICA

TE 315

Aula 06_4

SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES HOMOGÊNEAS COM COEFICIENTES CONSTANTES. AUTOVALORES COMPLEXOS

INTRODUÇÃO

Vamos continuar com nosso sistema de n equações lineares homogêneas com coeficientes reais constantes...

$$\begin{aligned}x_1' &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\x_2' &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\&\vdots \\x_n' &= a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n\end{aligned}\tag{1}$$

Este sistema pode ser reescrito como $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$, em que a matriz \mathbf{A} é real:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

INTRODUÇÃO

Sabemos que $\mathbf{x} = \boldsymbol{\xi}e^{rt}$ é a solução do sistema sempre que r seja um autovalor e $\boldsymbol{\xi}$ um autovetor da matriz de coeficientes \mathbf{A} .

Lembre que os autovalores r_1, \dots, r_n de \mathbf{A} são as raízes da equação característica $\det(\mathbf{A}-r\mathbf{I}) = 0$ e os autovetores correspondentes satisfazem $(\mathbf{A}-r\mathbf{I}) \boldsymbol{\xi} = \mathbf{0}$

Se \mathbf{A} for real, os coeficientes na equação polinomial $\det(\mathbf{A}-r\mathbf{I}) = 0$ para r serão reais e os autovalores complexos terão que aparecer em pares conjugados.

Por exemplo, se $r_1 = \lambda + i\mu$ for um autovalor de \mathbf{A} , em que λ e μ são reais, então $r_2 = \lambda - i\mu$ também o será.

Para explorar o efeito de autovalores complexos, vamos começar com um exemplo....

EXEMPLO 1

Encontre um conjunto fundamental de soluções reais para o sistema

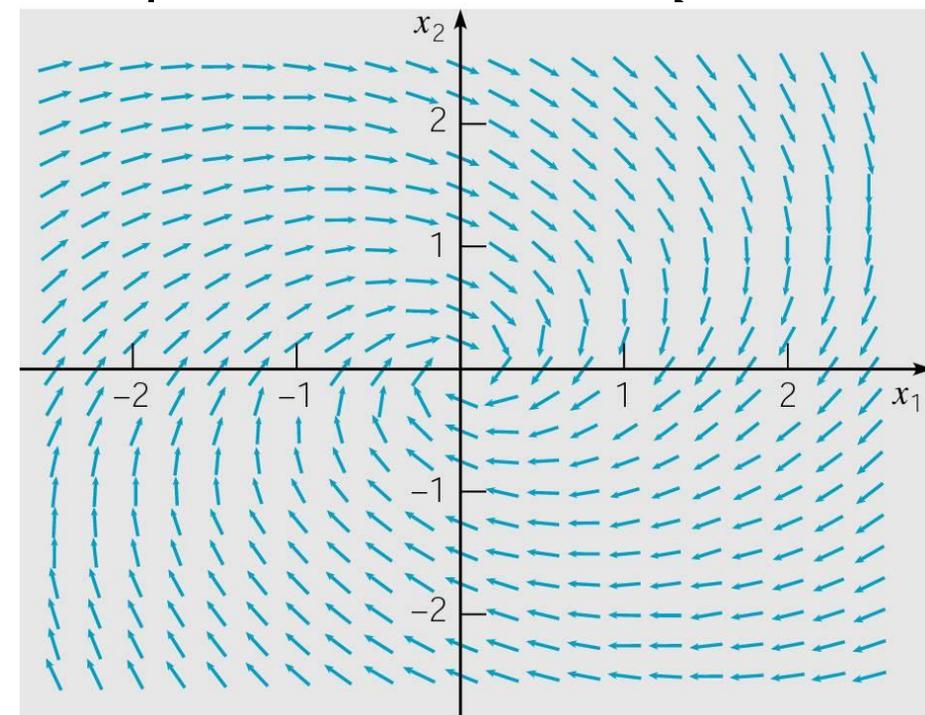
$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -1/2 & 1 \\ -1 & -1/2 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

Desenhe um retrato de fase e faça os gráficos das componentes das soluções.

Para ter uma ideia do tipo de soluções podemos primeiro desenhar **o campo de direções**, dando valores a x_1 e x_2 e calculando \mathbf{x}' ...

vemos que as trajetórias no plano de fase são espirais aproximando-se na origem no sentido horário.

Para encontrar um conjunto fundamental de soluções substituímos $\mathbf{x} = \xi e^{rt}$ em $(\mathbf{A}-r\mathbf{I}) \xi = \mathbf{0}$...



EXEMPLO 1

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} -1/2 & 1 \\ -1 & -1/2 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

Desta forma obtemos o conjunto de equações lineares algébricas para os autovalores e autovetores de A

$$\begin{pmatrix} -1/2 - r & 1 \\ -1 & -1/2 - r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Determinamos os autovalores r resolvendo a equação característica:

$$\begin{vmatrix} -1/2 - r & 1 \\ -1 & -1/2 - r \end{vmatrix} = (r + 1/2)^2 + 1 = r^2 + r + \frac{5}{4}$$

De forma que:
$$r = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4(5/4)}}{2} = \frac{-1 \pm 2i}{2} = -\frac{1}{2} \pm i$$

portanto, os autovalores são $r_1 = -1/2 + i$ e $r_2 = -1/2 - i$.

EXEMPLO 1

O autovetor para $r = r_1 = -1/2 + i$ se obtém (como sempre) resolvendo...

$$(\mathbf{A} - r\mathbf{I})\boldsymbol{\xi} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1/2 - r & 1 \\ -1 & -1/2 - r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & i \\ -1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

o que leva a ... $\begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ -1 & -i & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \boldsymbol{\xi}^{(1)} = \begin{pmatrix} -i\xi_2 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$

Pois obtivemos um única equação $\xi_1 + i\xi_2 = 0$ de onde $\xi_1 = -i\xi_2$ de forma que temos uma equação com duas incógnitas...

Escolhendo, um valor arbitrário para ξ_2 , por exemplo i obtemos: $\boldsymbol{\xi}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$

Portanto nosso primeiro autovetor é $\boldsymbol{\xi}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

EXEMPLO 1

Da mesma forma para $r = r_2 = -1/2 - i$ resolvendo...

$$(\mathbf{A} - r\mathbf{I})\xi = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1/2 - r & 1 \\ -1 & -1/2 - r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

o que leva a ... $\begin{pmatrix} 1 & -i & 0 \\ -1 & i & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -i & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \xi^{(2)} = \begin{pmatrix} i\xi_2 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$

Pois obtivemos um única equação $\xi_1 - i\xi_2 = 0$ de onde $\xi_1 = i\xi_2$ de forma que temos uma equação com duas incógnitas...

Escolhendo, por conveniência o valor arbitrário $-i$ para ξ_2 $\xi^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$

Portanto o segundo autovetor é $\xi^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

EXEMPLO 1

Desta forma, um conjunto fundamental de soluções é

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} e^{(-\frac{1}{2}+i)t} \qquad \mathbf{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} e^{(-\frac{1}{2}-i)t} \qquad (2)$$

Para obter um conjunto de **soluções reais**, precisamos encontrar a parte real e a parte imaginária de $\mathbf{x}^{(1)}$ **ou** de $\mathbf{x}^{(2)}$. De fato,

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} e^{-\frac{t}{2}} (\cos t + i \sin t) = \begin{pmatrix} e^{-\frac{t}{2}} \cos t \\ -e^{-\frac{t}{2}} \sin t \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} e^{-\frac{t}{2}} \sin t \\ e^{-\frac{t}{2}} \cos t \end{pmatrix}$$

Portanto, um conjunto de soluções reais é

$$\mathbf{u}(t) = e^{-\frac{t}{2}} \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} \qquad \mathbf{v}(t) = e^{-t/2} \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$$

Para verificar se $\mathbf{u}(t)$ e $\mathbf{v}(t)$ são linearmente independentes (e portanto formam um conjunto fundamental de soluções), vamos calcular seu wronskiano...

EXEMPLO 1

$$W[\mathbf{u}, \mathbf{v}](t) = \begin{vmatrix} e^{-t/2} \cos t & e^{-t/2} \sin t \\ -e^{-t/2} \sin t & e^{-t/2} \cos t \end{vmatrix} = e^{-t} \neq 0$$

Como o wronskiano $W(\mathbf{u}, \mathbf{v})(t)$ nunca se anula, segue que $\mathbf{u}(t)$ e $\mathbf{v}(t)$ formam um **conjunto fundamental de soluções** (reais) da equação $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ e a solução geral é $\mathbf{x} = c_1 \mathbf{u} + c_2 \mathbf{v}$

Agora que temos as soluções podemos construir o **retrato de fases** delas dando valores a t e calculando as funções \mathbf{u} e \mathbf{v} para diferentes valores das constantes c_1 e c_2 (não confundir as soluções \mathbf{u} e \mathbf{v} com suas coordenadas x_1 e x_2)

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} e^{-t/2} \cos t \\ -e^{-t/2} \sin t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} e^{-t/2} \sin t \\ e^{-t/2} \cos t \end{pmatrix}$$

EXEMPLO 1

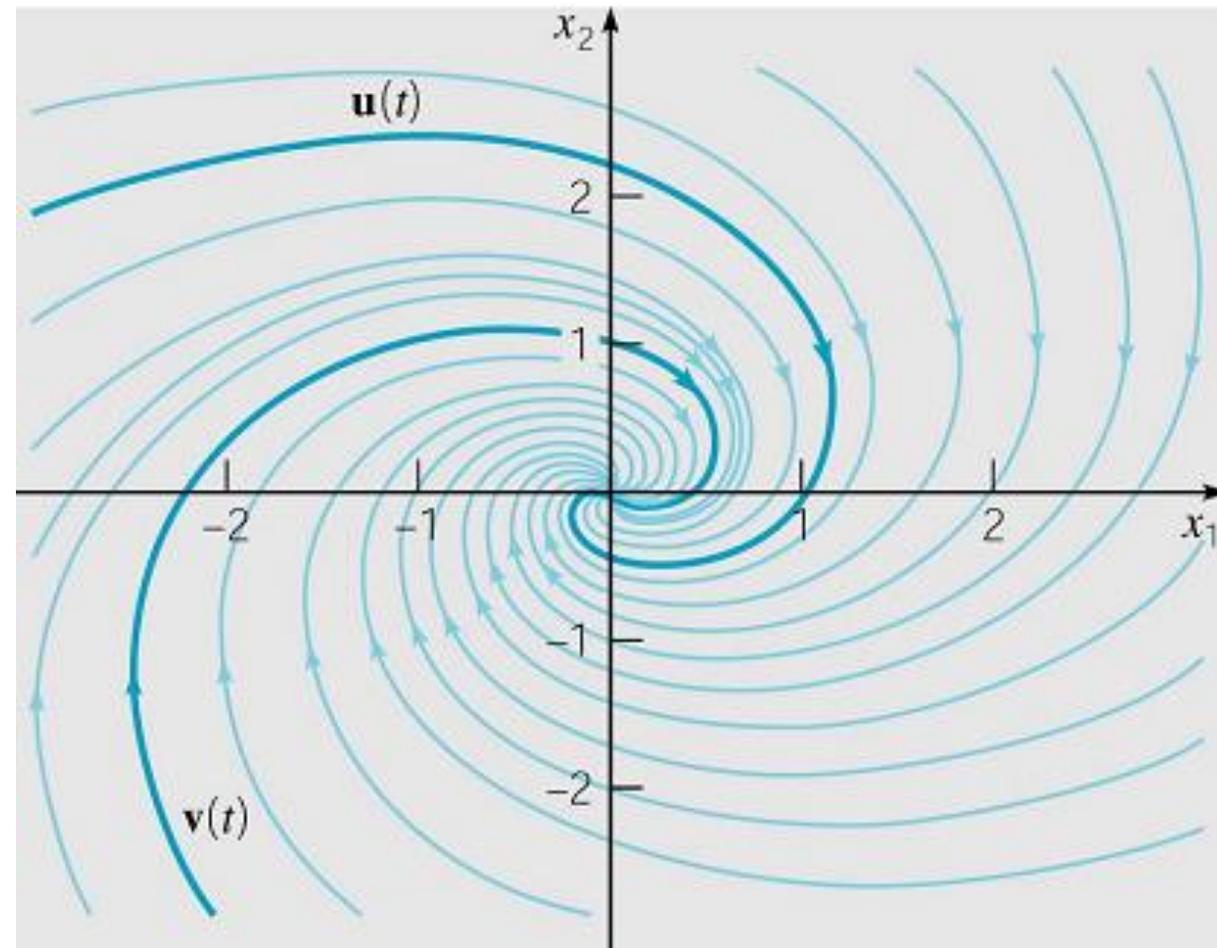
Para $t=0$ vemos que os pontos $(1,0)$ e $(0,1)$ pertencem a:

$$\mathbf{u}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{v}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Todas as trajetórias se aproximam da origem ao longo de uma espiral quando $t \rightarrow \infty$, formando uma infinidade de caminhos em torno da origem; isto se deve ao fato de que as soluções são produtos de uma exponencial decrescente com fatores seno ou cosseno (há que analisar a dependência de cada solução **em função de t** para ver isso).

A origem é chamada de **ponto espiral** e é **assintoticamente estável**, já que todas as trajetórias se aproximam dela quando t aumenta

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} e^{-t/2} \cos t \\ -e^{-t/2} \sin t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} e^{-t/2} \sin t \\ e^{-t/2} \cos t \end{pmatrix}$$



EXEMPLO 1

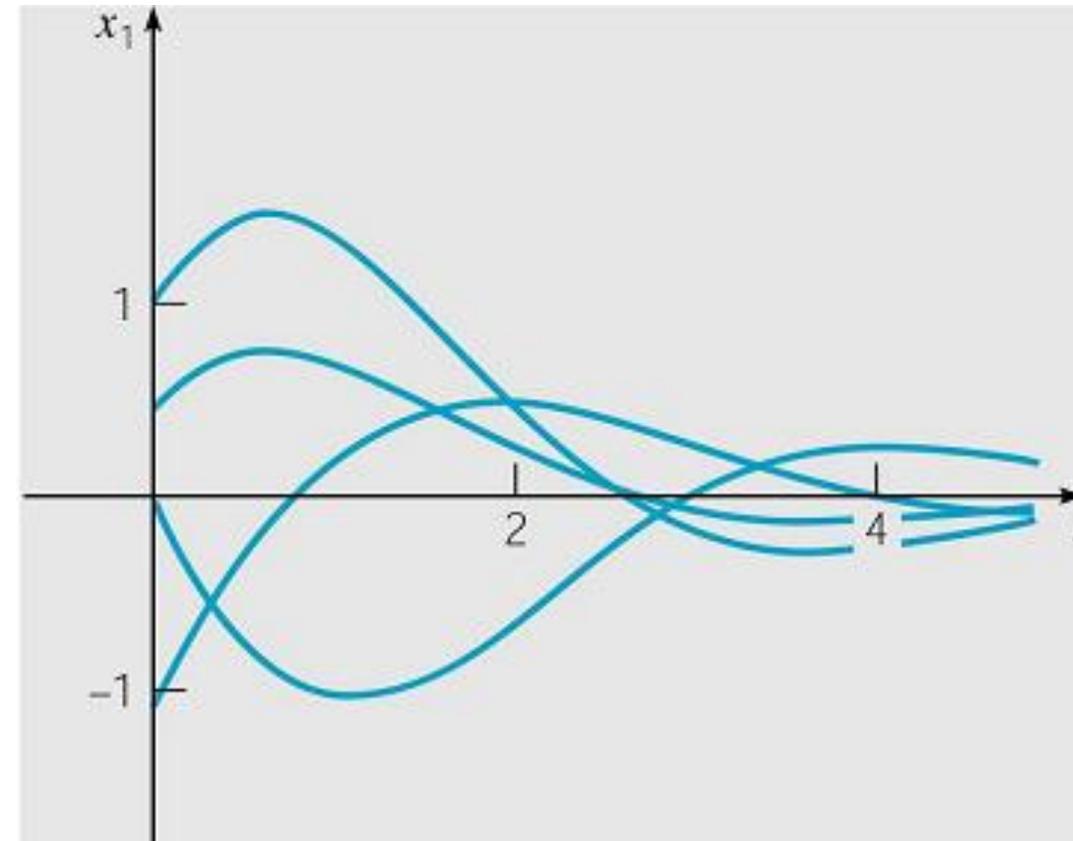
$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} e^{-t/2} \cos t \\ -e^{-t/2} \sin t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} e^{-t/2} \sin t \\ e^{-t/2} \cos t \end{pmatrix}$$

Alguns gráficos típicos de x_1 em função de t estão na figura abaixo; cada um representa uma oscilação decrescente no tempo.

A figura do slide anterior (espiral) é característica de sistemas 2×2 $\mathbf{x}' = \mathbf{Ax}$ cujos autovalores são complexos com **parte real negativa**.

Para um sistema cujos autovalores têm **parte real positiva**, o sentido do movimento é oposto, se afastando da origem, e as trajetórias são ilimitadas. Nesse caso, a origem é instável.

Se a **parte real dos autovalores é nula**, então as trajetórias nem se aproximam da origem nem se tornam ilimitadas, mas, em vez disso, **percorrem, repetidamente, uma curva fechada em torno da origem**. Nesse caso, a origem é chamada de **centro** e é também dita **estável**, mas **não assintoticamente estável**.



AUTOVALORES E AUTOVETORES CONJUGADOS

Vamos retornar o raciocínio do slide 3 (antes do exemplo 1), onde analisávamos o que acontece se os autovalores são complexos.

Tínhamos estabelecido que se \mathbf{A} for real, os coeficientes na equação polinomial $\det(\mathbf{A}-r\mathbf{I}) = 0$ para r serão reais e **os autovalores complexos terão que aparecer em pares conjugados**...ou seja serão complexos conjugados (como vimos no exemplo 1 entre r_1 e r_2).

Logo, se os autovalores são complexos conjugados os **autovetores correspondentes também serão complexos conjugados!** pois como \mathbf{A} e \mathbf{I} tem componentes reais suas complexas conjugadas são iguais a elas mesmas....portanto:

$$(\mathbf{A} - r_1\mathbf{I})\xi^{(1)} = \mathbf{0} \Rightarrow (\mathbf{A} - \bar{r}_1\mathbf{I})\bar{\xi}^{(1)} = \mathbf{0} \Rightarrow (\mathbf{A} - r_2\mathbf{I})\xi^{(2)} = \mathbf{0}$$

portanto

$$\mathbf{x}^{(2)} = \xi^{(2)}e^{r_2t} = \bar{\xi}^{(1)}e^{\bar{r}_2t} = \bar{\mathbf{x}}^{(1)}$$

AUTOVALORES E AUTOVETORES CONJUGADOS

Portanto, como no Exemplo 1, podemos encontrar duas soluções reais da Eq. (1) correspondentes aos autovalores r_1 e r_2 escolhendo a parte real e a parte imaginária de $\mathbf{x}^{(1)}(t)$ ou de $\mathbf{x}^{(2)}(t)$ dadas pela Eq. (2) no slide 8.

Vamos escrever $\boldsymbol{\xi}^{(1)} = \mathbf{a} + i\mathbf{b}$, em que \mathbf{a} e \mathbf{b} são matrizes reais; então,

$$\begin{aligned}\mathbf{x}^{(1)} &= \boldsymbol{\xi}^{(1)} e^{(\lambda+i\mu)t} = (\mathbf{a} + i\mathbf{b})e^{\lambda t}(\cos \mu t + i \sin \mu t) = e^{\lambda t}(\mathbf{a} \cos \mu t - \mathbf{b} \sin \mu t) + ie^{\lambda t}(\mathbf{a} \sin \mu t + \mathbf{b} \cos \mu t) \\ &= \mathbf{u}(t) + i\mathbf{v}(t)\end{aligned}$$

$$\text{em que... } \mathbf{u}(t) = e^{\lambda t}(\mathbf{a} \cos \mu t - \mathbf{b} \sin \mu t) \quad \text{e} \quad \mathbf{v}(t) = e^{\lambda t}(\mathbf{a} \sin \mu t + \mathbf{b} \cos \mu t) \quad (3)$$

serão soluções reais de $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ e são linearmente independentes (veja o Problema 27 nos exercícios propostos desta aula)

RESUMO

Se a matriz A tem dois autovalores complexos $r_1 = \lambda + i\mu$ e $r_2 = \lambda - i\mu$, e se os outros valores r_3, \dots, r_n são reais e distintos com os autovetores associados $\xi^{(1)} = \mathbf{a} + i\mathbf{b}$, $\xi^{(2)} = \mathbf{a} - i\mathbf{b}$, $\xi^{(3)}, \dots, \xi^{(n)}$, então a solução geral da Eq. (1) é

$$\mathbf{x} = c_1 \mathbf{u}(t) + c_2 \mathbf{v}(t) + c_3 \xi^{(3)} e^{r_3 t} + \dots + c_n \xi^{(n)} e^{r_n t}$$

em que $\mathbf{u}(t)$ e $\mathbf{v}(t)$ são dados pelas Eqs. (3) do slide 13.

Lembrar que essa análise se aplica apenas quando a matriz de coeficientes A na Eq. (1) for real, pois só nesse caso os autovalores e autovetores complexos têm que aparecer em pares complexos conjugados.

COMENTÁRIO

Para sistemas 2×2 com coeficientes reais, completamos nossa descrição dos três casos principais que podem ocorrer.

1. Autovalores **reais com sinais opostos**; $x = 0$ é um ponto de **sela**.
2. Autovalores **reais diferentes, mas com o mesmo sinal**; $x = 0$ é um **nó**.
3. Autovalores **complexos e parte real diferente de zero**; $x = 0$ é um ponto **espiral**.

Outras possibilidades são menos importantes e ocorrem como transição entre dois dos casos que acabamos de listar.

Por exemplo, um autovalor zero ocorre durante a transição entre um ponto de sela e um nó. Autovalores imaginários puros ocorrem durante a transição entre pontos espirais assintoticamente estáveis e instáveis. Finalmente, autovalores reais e iguais aparecem durante a transição entre nós e pontos espirais.

Vejamos mais um exemplo...

EXEMPLO 2

O sistema $\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}$ contém um parâmetro α . Descreva como as soluções dependem qualitativamente de α ; em particular, encontre os valores críticos de α nos quais o comportamento qualitativo das trajetórias no plano de fase muda drasticamente.

$$\mathbf{x}' = \begin{pmatrix} \alpha & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}$$

O comportamento das trajetórias é controlado pelos autovalores da matriz de coeficientes. Substituindo $\mathbf{x} = \xi e^{rt}$ e reescrevendo o sistema como $(\mathbf{A} - r\mathbf{I})\xi = 0$

$$\begin{pmatrix} \alpha - r & 2 \\ -2 & -r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Resolvendo r em função de α obtemos (através da equação característica)...

$$\begin{vmatrix} \alpha - r & 2 \\ -2 & -r \end{vmatrix} = r(r - \alpha) + 4 = r^2 - \alpha r + 4 \Rightarrow r = \frac{\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 16}}{2}$$

EXEMPLO 2

$$r = \frac{\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 16}}{2}$$

Segue que os autovalores são complexos conjugados para $-4 < \alpha < 4$ e reais nos outros casos.

Assim, dois **valores críticos** são $\alpha = -4$ e $\alpha = 4$, em que os autovalores mudam de reais para complexos, ou vice-versa.

Para $\alpha < -4$, ambos os autovalores são negativos, de modo que todas as trajetórias se aproximam da origem, que é um **nó assintoticamente estável**.

Para $\alpha > 4$, ambos os autovalores são positivos, de modo que a origem é, novamente, um **nó**, só que, desta vez, **instável**; todas as trajetórias (exceto $x = 0$) tornam-se ilimitadas.

EXEMPLO 2

$$r = \frac{\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 16}}{2}$$

No intervalo intermediário $-4 < \alpha < 4$, os autovalores são complexos e as trajetórias são espirais, porém, para $-4 < \alpha < 0$, a parte real dos autovalores é negativa, as espirais estão orientadas para dentro, e **a origem é assintoticamente estável**, enquanto, para $0 < \alpha < 4$, a parte real dos autovalores é positiva e **a origem é instável**.

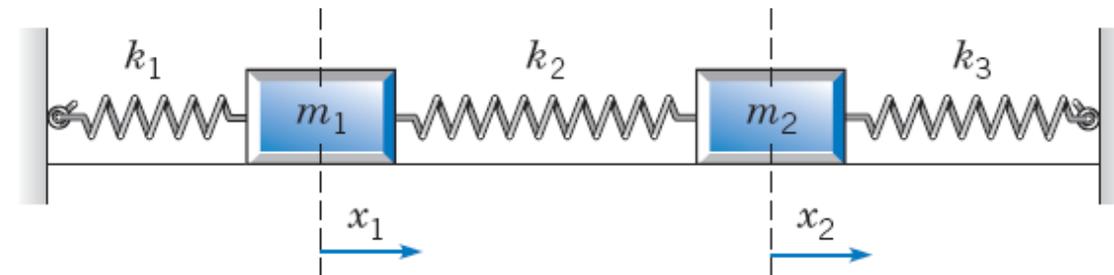
Assim, $\alpha = 0$ também é um valor crítico, em que o sentido do movimento espiral muda de dentro para fora. Para esse valor de α , **a origem é um centro** e as trajetórias são curvas fechadas em torno da origem, correspondendo a soluções periódicas no tempo.

Os outros valores críticos, $\alpha = \pm 4$, geram **autovalores reais e iguais**. Nesse caso a origem é, novamente, um **nó**.

Vejamos um exemplo do caso de um sistema que não seja 2x2...

EXEMPLO 3

Considere um sistema de duas massas e três molas (slide 4 aula 06_1) mas sem forças externas (ou seu equivalente elétrico sem fonte externa)...



Neste caso as equações do movimento apresentadas na aula 06_1 ficam:

$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = -k_1 x_1(t) - k_2 (x_1(t) - x_2(t)) = -(k_1 + k_2)x_1(t) + k_2 x_2(t)$$

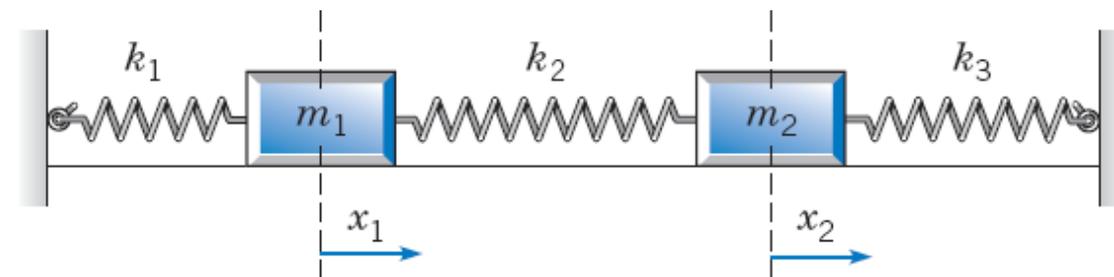
$$m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} = -k_3 x_2(t) - k_2 (x_2(t) - x_1(t)) = -(k_3 + k_2)x_2(t) + k_2 x_1(t)$$

Essas equações podem ser resolvidas como um sistema de duas equações de segunda ordem mas, como exemplo da nossa abordagem neste capítulo, **vamos transformá-las em um sistema de quatro equações de primeira ordem...**

EXEMPLO 3

$$m_1 \frac{d^2 x_1}{dt^2} = -(k_1 + k_2)x_1(t) + k_2 x_2(t)$$

$$m_2 \frac{d^2 x_2}{dt^2} = -(k_3 + k_2)x_2(t) + k_2 x_1(t)$$



Para transformar essas duas equações de segunda ordem em um sistema de quatro equações de primeira ordem consideramos $y_1 = x_1$, $y_2 = x_2$, $y_3 = x_1'$, $y_4 = x_2'$

Logo vemos, pela nossa substituição, que $y_1' = y_3$ e $y_2' = y_4$ e também:

$$m_1 y_3' = -(k_1 + k_2)y_1 + k_2 y_2 \quad m_2 y_4' = -(k_2 + k_3)y_2 + k_2 y_1$$

Suponha que $m_1 = 2$, $m_2 = 9/4$, $k_1 = 1$, $k_2 = 3$ e $k_3 = 15/4$

Analise os movimentos possíveis descritos por estas equações e desenhe gráficos mostrando comportamentos típicos.

EXEMPLO 3

$$m_1 = 2 \quad m_2 = 9/4 \quad k_1 = 1 \quad k_2 = 3 \quad k_3 = 15/4$$

Primeiro escrevemos o sistema de 4 equações na forma matricial...

$$\begin{aligned} y_1' &= y_3 \\ y_2' &= y_4 \\ y_3' &= -\frac{k_1 + k_2}{m_1} y_1 + \frac{k_2}{m_1} y_2 \\ y_4' &= \frac{k_2}{m_2} y_1 - \frac{k_2 + k_3}{m_2} y_2 \end{aligned} \quad \mathbf{y}' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & \frac{3}{2} & 0 & 0 \\ \frac{4}{3} & -3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{y}$$

Supomos, como sempre, que $\mathbf{y} = \boldsymbol{\xi}e^{rt}$, em que r tem que ser um autovalor da matriz \mathbf{A} e $\boldsymbol{\xi}$ um autovetor associado. Resolvemos $\det(\mathbf{A}-r\mathbf{I}) = 0$

É possível, embora trabalhoso, encontrar os autovalores e autovetores de \mathbf{A} manualmente, mas é mais fácil com algum software apropriado...

O polinômio característico da matriz \mathbf{A} acima é $r^4 + 5r^2 + 4 = (r^2+1)(r^2+4) = 0$

EXEMPLO 3

de modo que os autovalores são $r_1 = i$, $r_2 = -i$, $r_3 = 2i$ e $r_4 = -2i$. Os **autovetores** associados são

$$\xi^{(1)} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3i \\ 2i \end{pmatrix} \quad \xi^{(2)} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -3i \\ -2i \end{pmatrix} \quad \xi^{(3)} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 6i \\ -8i \end{pmatrix} \quad \xi^{(4)} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -6i \\ 8i \end{pmatrix}$$

As soluções complexas $\xi^{(1)}e^{it}$ e $\xi^{(2)}e^{-it}$ (com os autovetores $\xi^{(1)}$ e $\xi^{(2)}$) (assim como $\xi^{(3)}e^{2it}$ e $\xi^{(4)}e^{-2it}$) **são complexas conjugadas**.

Portanto podemos encontrar **duas soluções reais** usando as partes real e imaginária de uma das soluções complexas. Por exemplo, a partir de $\xi^{(1)}e^{it}$ obtemos...

EXEMPLO 3

$$\xi^{(1)} e^{it} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 3i \\ 2i \end{pmatrix} (\cos t + i \operatorname{sen} t) = \begin{pmatrix} 3 \cos t \\ 2 \cos t \\ -3 \operatorname{sen} t \\ -2 \operatorname{sen} t \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 3 \operatorname{sen} t \\ 2 \operatorname{sen} t \\ 3 \cos t \\ 2 \cos t \end{pmatrix} = \mathbf{u}^{(1)}(t) + i\mathbf{v}^{(1)}(t)$$

Da mesma forma, como $\xi^{(3)}e^{it}$ e $\xi^{(4)}e^{-it}$ são complexas conjugadas, podemos encontrar duas soluções reais usando as partes real e imaginária de uma das duas soluções complexas, assim a partir de $\xi^{(3)}e^{it}$ obtemos:

$$\xi^{(3)} e^{2it} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 6i \\ -8i \end{pmatrix} (\cos 2t + i \operatorname{sen} 2t) = \begin{pmatrix} 3 \cos 2t \\ -4 \cos 2t \\ -6 \operatorname{sen} 2t \\ 8 \operatorname{sen} 2t \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 3 \operatorname{sen} 2t \\ -4 \operatorname{sen} 2t \\ 6 \cos 2t \\ -8 \cos 2t \end{pmatrix} = \mathbf{u}^{(2)}(t) + i\mathbf{v}^{(2)}(t)$$

EXEMPLO 3

É fácil demonstrar calculando o Wronskiano que $\mathbf{u}^{(1)}$, $\mathbf{u}^{(2)}$, $\mathbf{v}^{(1)}$, $\mathbf{v}^{(2)}$ são linearmente independentes e formam um conjunto fundamental de soluções, de forma que a solução geral é:

$$\mathbf{y} = c_1 \begin{pmatrix} 3 \cos t \\ 2 \cos t \\ -3 \sin t \\ -2 \sin t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 3 \sin t \\ 2 \sin t \\ 3 \cos t \\ 2 \cos t \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 3 \cos 2t \\ -4 \cos 2t \\ -6 \sin 2t \\ 8 \sin 2t \end{pmatrix} + c_4 \begin{pmatrix} 3 \sin 2t \\ -4 \sin 2t \\ 6 \cos 2t \\ -8 \cos 2t \end{pmatrix} \quad (4)$$

O espaço de fase para esse sistema é **4D**, e cada solução (obtida para um conjunto particular de valores para c_1, \dots, c_4), corresponde a uma trajetória nesse espaço. Como todas as **soluções são periódicas** com período 2π , **cada trajetória é uma curva fechada** (não importa onde a trajetória começa em $t = 0$, ela retorna a esse ponto em $t = 2\pi$, $t = 4\pi$, e assim por diante, percorrendo a mesma curva repetidamente em intervalos de tempo de comprimento 2π).

EXEMPLO 3

$$\mathbf{y} = c_1 \begin{pmatrix} 3 \cos t \\ 2 \cos t \\ -3 \sin t \\ -2 \sin t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 3 \sin t \\ 2 \sin t \\ 3 \cos t \\ 2 \cos t \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 3 \cos 2t \\ -4 \cos 2t \\ -6 \sin 2t \\ 8 \sin 2t \end{pmatrix} + c_4 \begin{pmatrix} 3 \sin 2t \\ -4 \sin 2t \\ 6 \cos 2t \\ -8 \cos 2t \end{pmatrix} \quad (4)$$

Não é possível ver as trajetórias 4D. Mas podemos ver as projeções das trajetórias em pares de planos, por exemplo nos planos y_1y_3 para a massa 1 ou y_2y_4 para a massa 2.

Os dois primeiros termos de (4) descrevem movimentos com frequência 1 e período 2π .

Note que $y_2 = (2/3)y_1$ em ambos os termos e que $y_4 = (2/3)y_3$ (compare as linhas de (4))

Isto significa que **as duas massas se movem para a frente e para trás, juntas**, sempre no mesmo sentido, mas com a segunda massa percorrendo apenas dois terços da distância percorrida pela primeira.

Vamos analisar a solução $\mathbf{u}^{(1)}(t)$ ($\mathbf{v}^{(1)}(t)$ pode ser analisada de forma semelhante). A ideia é desenhar y_1 e y_2 em função de t nos mesmos eixos...

EXEMPLO 3

$$\mathbf{y} = c_1 \begin{pmatrix} 3 \cos t \\ 2 \cos t \\ -3 \sin t \\ -2 \sin t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 3 \sin t \\ 2 \sin t \\ 3 \cos t \\ 2 \cos t \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 3 \cos 2t \\ -4 \cos 2t \\ -6 \sin 2t \\ 8 \sin 2t \end{pmatrix} + c_4 \begin{pmatrix} 3 \sin 2t \\ -4 \sin 2t \\ 6 \cos 2t \\ -8 \cos 2t \end{pmatrix} \quad (4)$$

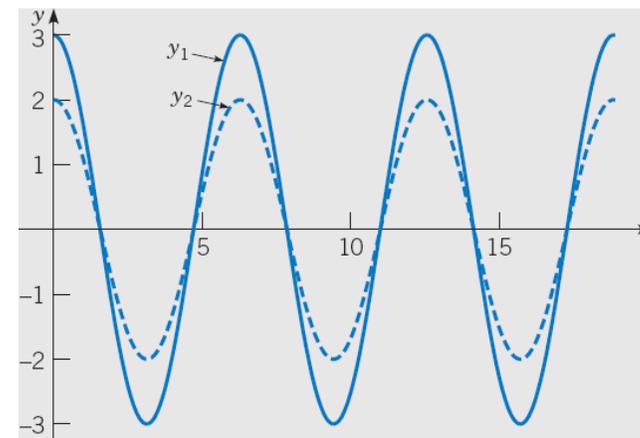
Se desenharmos y_1 e y_2 em função de t no mesmo gráfico, obtemos cossenos com amplitudes 3 e 2, ver figura (a).

A trajetória da primeira massa no plano de fases $y_1 y_3$ permanece no círculo de raio 3 na Figura (b), percorrido no sentido horário começando no ponto $(3,0)$ e completando uma volta em um tempo 2π .

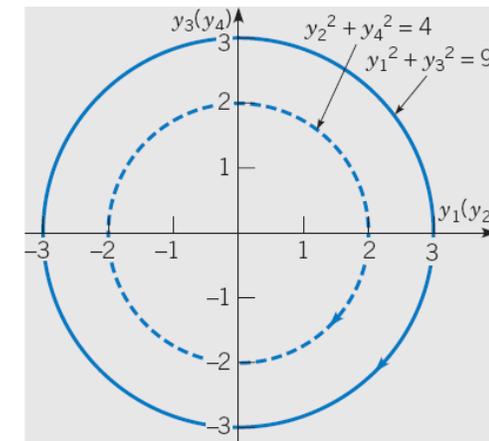
Essa figura também mostra a trajetória da segunda massa no plano $y_2 y_4$, que permanece no círculo de raio 2, também percorrido no sentido horário, começando em $(2,0)$ e também completando uma volta em um tempo 2π .

A origem é um centro nos planos $y_1 y_3$ e $y_2 y_4$.

Gráficos semelhantes (com um deslocamento apropriado no tempo) são obtidos para $\mathbf{v}^{(1)}$ ou uma combinação linear de $\mathbf{u}^{(1)}$ e $\mathbf{v}^{(1)}$.



(a)



(b)

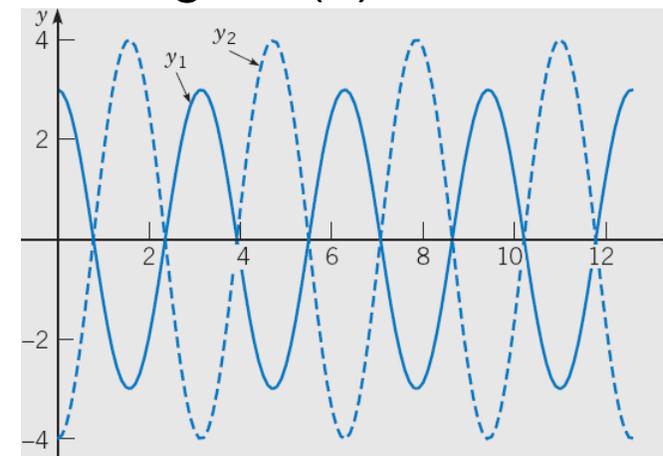
EXEMPLO 3

$$y = c_1 \begin{pmatrix} 3 \cos t \\ 2 \cos t \\ -3 \sin t \\ -2 \sin t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 3 \sin t \\ 2 \sin t \\ 3 \cos t \\ 2 \cos t \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 3 \cos 2t \\ -4 \cos 2t \\ -6 \sin 2t \\ 8 \sin 2t \end{pmatrix} + c_4 \begin{pmatrix} 3 \sin 2t \\ -4 \sin 2t \\ 6 \cos 2t \\ -8 \cos 2t \end{pmatrix} \quad (4)$$

Os dois termos remanescentes à direita do sinal de igualdade em (4) descrevem movimentos com frequência 2 e período π . Observe que, neste caso, $y_2 = -(4/3)y_1$ e $y_4 = -(4/3)y_3$.

Isto significa que as duas massas estão sempre se movendo em **sentidos opostos** e que a segunda massa percorre quatro terços da distância percorrida pela primeira. **Considerando apenas $u^{(2)}(t)$** (que é a terceira solução na combinação linear) e fazendo os gráficos de y_1 e y_2 em função de t nos mesmos eixos, obtemos a figura (a).

Existe uma diferença de fase de π , e a amplitude de y_2 é quatro terços da amplitude de y_1 , confirmando as afirmações precedentes sobre o movimento das massas.



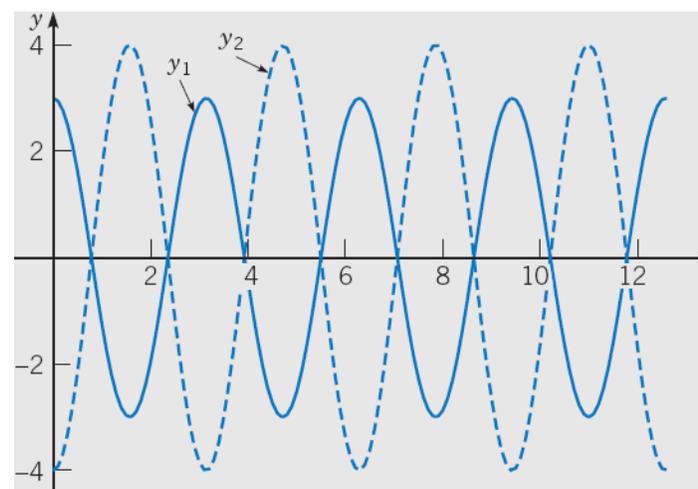
(a)

EXEMPLO 3

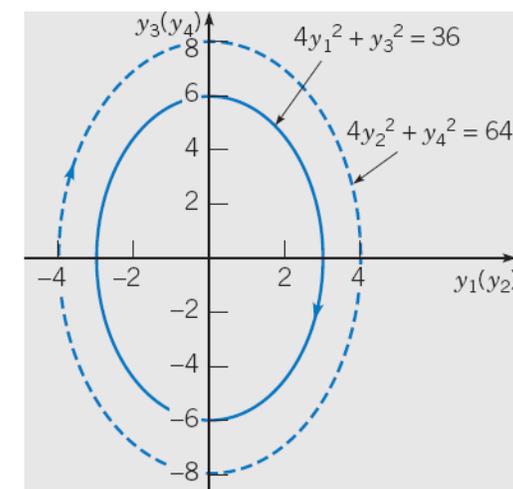
$$y = c_1 \begin{pmatrix} 3 \cos t \\ 2 \cos t \\ -3 \sin t \\ -2 \sin t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 3 \sin t \\ 2 \sin t \\ 3 \cos t \\ 2 \cos t \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 3 \cos 2t \\ -4 \cos 2t \\ -6 \sin 2t \\ 8 \sin 2t \end{pmatrix} + c_4 \begin{pmatrix} 3 \sin 2t \\ -4 \sin 2t \\ 6 \cos 2t \\ -8 \cos 2t \end{pmatrix} \quad (4)$$

A figura (b) mostra as trajetórias das duas massas em seus respectivos planos de fase. Ambas são elipses, a interna correspondendo à primeira massa, e a externa, à segunda. A trajetória da elipse interna começa em $(3,0)$, e a da elipse externa, em $(-4,0)$. Ambas são percorridas no sentido horário, e a volta é completada em um tempo π . A origem é um centro nos planos respectivos y_1y_3 e y_2y_4 . Mais uma vez, gráficos semelhantes são obtidos de $\mathbf{v}^{(2)}$ ou de uma combinação linear de $\mathbf{u}^{(2)}$ e $\mathbf{v}^{(2)}$.

Estes tipos de movimento descritos são chamados de **modos fundamentais de vibração** para o sistema com duas massas. Cada um deles resulta de condições iniciais bem especiais. Por exemplo, para obter o modo fundamental de frequência 1, ambas as constantes c_3 e c_4 têm que ser nulas.



(a)



(b)

EXEMPLO 3

$$\mathbf{y} = c_1 \begin{pmatrix} 3 \cos t \\ 2 \cos t \\ -3 \sin t \\ -2 \sin t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 3 \sin t \\ 2 \sin t \\ 3 \cos t \\ 2 \cos t \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 3 \cos 2t \\ -4 \cos 2t \\ -6 \sin 2t \\ 8 \sin 2t \end{pmatrix} + c_4 \begin{pmatrix} 3 \sin 2t \\ -4 \sin 2t \\ 6 \cos 2t \\ -8 \cos 2t \end{pmatrix} \quad (4)$$

Lembrar que as constantes dependem das condições iniciais do movimento (condições sobre a posição (y_1 e y_2) e velocidades (y_3 e y_4) iniciais das massas m_1 e m_2 , **ver equações do slide 20**).

Ambas as constantes c_3 e c_4 **tem que ser nulas** se as posições de m_1 e m_2 em $t=0$ são $3y_2(0) = 2y_1(0)$ e suas velocidades iniciais são $3y_4(0) = 2y_3(0)$, pois não há como satisfazer essa condição inicial utilizando as soluções $\mathbf{u}^{(2)}$ e $\mathbf{v}^{(2)}$ (as duas ultimas) obrigando a colocar c_3 e c_4 iguais a zero. Somente as duas primeiras cumprem essa condição!

De maneira similar, o modo fundamental de frequência 2 só é obtido quando ambas as constantes c_1 e c_2 são nulas, ou seja, quando as condições iniciais são tais que $3y_2(0) = -4y_1(0)$ e $3y_4(0) = -4y_3(0)$.

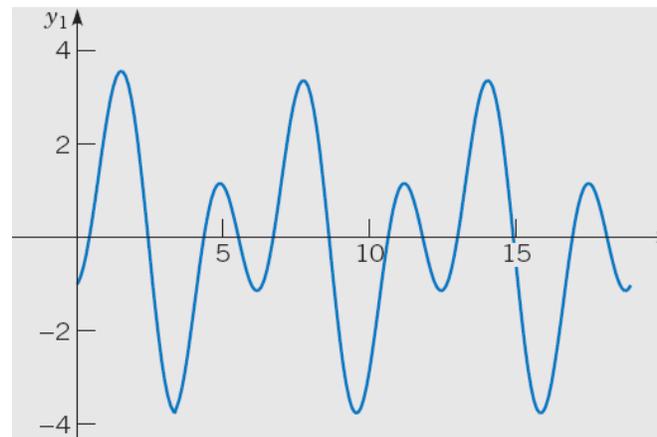
Evidentemente, **das infinitas possíveis condições iniciais**, só nesses dois casos teremos os modos fundamentais puros, para condições iniciais mais gerais, a solução é uma combinação dos dois modos fundamentais.

EXEMPLO 3

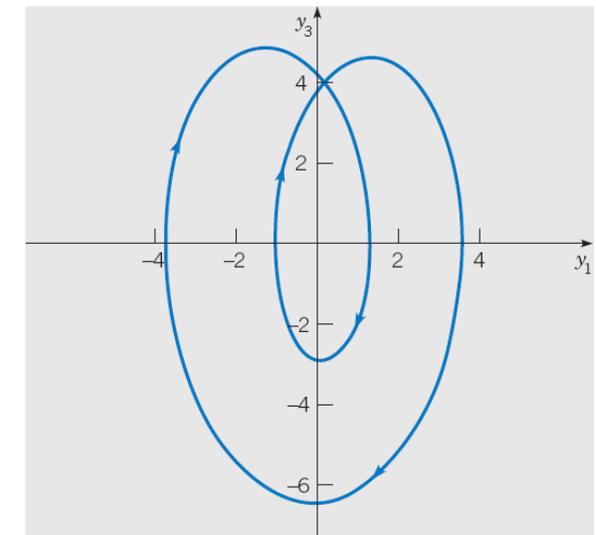
$$\mathbf{y} = c_1 \begin{pmatrix} 3 \cos t \\ 2 \cos t \\ -3 \sin t \\ -2 \sin t \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 3 \sin t \\ 2 \sin t \\ 3 \cos t \\ 2 \cos t \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} 3 \cos 2t \\ -4 \cos 2t \\ -6 \sin 2t \\ 8 \sin 2t \end{pmatrix} + c_4 \begin{pmatrix} 3 \sin 2t \\ -4 \sin 2t \\ 6 \cos 2t \\ -8 \cos 2t \end{pmatrix} \quad (4)$$

Por exemplo, na figura (a) abaixo temos um gráfico de y_1 em função de t para um caso geral, e a projeção da trajetória correspondente no plano $y_1 y_3$ está na figura (b).

Esta última figura não se cruza (é uma projeção), pois cruzamento no espaço 4D não podem ocorrer na trajetória, pois violaria o teorema geral de existência e **unicidade** que diz que **não podem existir duas soluções (y_1 e y_3) saindo do mesmo ponto inicial e serem diferentes...**(e aqui poderíamos colocar a condição inicial nesse ponto de cruzamento, se ele existisse, violando o teorema)



(a)



(b)

Lista de exercícios disponível em:

<http://www.eletrica.ufpr.br/p/professores:patricio:inicial>

Disciplina TE315 (Equações Diferenciais para Engenharia Elétrica)

Gabaritos disponíveis no mesmo endereço