LISTA 06_2 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS
Autovalores e autovetores
Respostas no final
Gabaritos na página do professor

Em cada um dos problemas de 1 a 6, resolva o sistema de equações dado ou mostre que não tem solução.

1. $$\begin{aligned} x_1 \quad\quad - x_3 &= 0 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 &= 2 \end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 &= 1 \end{aligned}$$

3. $$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 2 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 &= -1 \end{aligned}$$

4. $$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

5. $$\begin{aligned} x_1 \quad\quad - x_3 &= 0 \\ 3x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ -x_1 + x_2 + 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

6. $$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= -2 \\ -2x_1 - 4x_2 + 2x_3 &= 4 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 &= -4 \end{aligned}$$

Em cada um dos problemas de 7 a 11, determine se os elementos do conjunto de vetores dados são linearmente independentes. Se forem linearmente dependentes, encontre uma relação linear entre eles. Os vetores estão escritos na forma de linhas para economizar espaço, mas podem ser considerados como vetores colunas, ou seja, podem ser usadas as transpostas dos vetores dados, em vez dos vetores.

7. $\mathbf{x}^{(1)} = (1, 1, 0)$, $\mathbf{x}^{(2)} = (0, 1, 1)$, $\mathbf{x}^{(3)} = (1, 0, 1)$
8. $\mathbf{x}^{(1)} = (2, 1, 0)$, $\mathbf{x}^{(2)} = (0, 1, 0)$, $\mathbf{x}^{(3)} = (-1, 2, 0)$
9. $\mathbf{x}^{(1)} = (1, 2, 2, 3)$, $\mathbf{x}^{(2)} = (-1, 0, 3, 1)$, $\mathbf{x}^{(3)} = (-2, -1, 1, 0)$, $\mathbf{x}^{(4)} = (-3, 0, -1, 3)$
10. $\mathbf{x}^{(1)} = (1, 2, -1, 0)$, $\mathbf{x}^{(2)} = (2, 3, 1, -1)$, $\mathbf{x}^{(3)} = (-1, 0, 2, 2)$, $\mathbf{x}^{(4)} = (3, -1, 1, 3)$
11. $\mathbf{x}^{(1)} = (1, 2, -2)$, $\mathbf{x}^{(2)} = (3, 1, 0)$, $\mathbf{x}^{(3)} = (2, -1, 1)$, $\mathbf{x}^{(4)} = (4, 3, -2)$

12. Suponha que cada um dos vetores $\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(m)}$ tem n componentes, em que $n < m$. Mostre que $\mathbf{x}^{(1)}, \ldots, \mathbf{x}^{(m)}$ são linearmente dependentes.

Em cada um dos Problemas 13 e 14, determine se os elementos do conjunto de vetores dado são linearmente independentes para $-\infty < t < \infty$. Se forem linearmente dependentes, encontre uma relação linear entre eles. Como nos problemas de 7 a 11, os vetores estão escritos como linhas para economizar espaço.

13. $\mathbf{x}^{(1)}(t) = (e^{-t}, 2e^{-t}), \quad \mathbf{x}^{(2)}(t) = (e^{-t}, e^{-t}), \quad \mathbf{x}^{(3)}(t) = (e^{-t}, 0)$

14. $\mathbf{x}^{(1)}(t) = (2 \text{ sen } t, \text{sen } t), \quad \mathbf{x}^{(2)}(t) = (\text{sen } t, 2 \text{ sen } t)$

15. Sejam

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ te^t \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{x}^{(2)}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix}$$

Mostre que $\mathbf{x}^{(1)}(t)$ e $\mathbf{x}^{(2)}(t)$ são linearmente dependentes em cada ponto do intervalo $0 \le t \le 1$. Apesar disso, mostre que $\mathbf{x}^{(1)}(t)$ e $\mathbf{x}^{(2)}(t)$ são linearmente independentes em $0 \le t \le 1$.

Em cada um dos problemas de 16 a 25, encontre todos os autovalores e autovetores da matriz dada.

16. $\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$

17. $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}$

18. $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

19. $\begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}$

20. $\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix}$

21. $\begin{pmatrix} -3 & 3/4 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$

22. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

23. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 \\ 1 & 4 & 1 \\ -2 & -4 & -1 \end{pmatrix}$

24. $\begin{pmatrix} 11/9 & -2/9 & 8/9 \\ -2/9 & 2/9 & 10/9 \\ 8/9 & 10/9 & 5/9 \end{pmatrix}$

25. $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

Os problemas de 26 a 30 tratam da resolução de $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ quando det $\mathbf{A} = 0$.

26.(a) Suponha que $\mathbf{A}$ é uma matriz real (n x n). Mostre que $(\mathbf{Ax}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \mathbf{A}^T\mathbf{y})$, quaisquer que sejam os vetores $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$.

Sugestão: Você pode achar mais simples considerar primeiro o caso $n = 2$; depois estenda o resultado para um valor arbitrário de n.

(b) Se $\mathbf{A}$ não for necessariamente real, mostre que $(\mathbf{Ax}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \mathbf{A}^*\mathbf{y})$, quaisquer que sejam os vetores $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$.

(c) Se $\mathbf{A}$ for hermitiana, mostre que $(\mathbf{Ax}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, \mathbf{Ay})$, quaisquer que sejam os vetores $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$.

27. Suponha que, para uma matriz dada $\mathbf{A}$, existe um vetor não nulo $\mathbf{x}$ tal que $\mathbf{Ax} = \mathbf{0}$. Mostre que existe, também, um vetor não nulo $\mathbf{y}$ tal que $\mathbf{A}^*\mathbf{y} = \mathbf{0}$.

28. Suponha que $\det \mathbf{A} = 0$ e que $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ tem solução. Mostre que $(\mathbf{b}, \mathbf{y}) = 0$, em que $\mathbf{y}$ é qualquer solução de $\mathbf{A}^*\mathbf{y} = \mathbf{0}$. Verifique se essa afirmação é verdadeira para o conjunto de equações no Exemplo 2.

Sugestão: Use o resultado do Problema 26(b).

29. Suponha que $\det \mathbf{A} = 0$ e que $\mathbf{x} = \mathbf{x}^{(0)}$ é uma solução de $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$. Mostre que, se $\boldsymbol{\xi}$ for uma solução de $\mathbf{A}\boldsymbol{\xi} = \mathbf{0}$ e α for qualquer constante, então $\mathbf{x} = \mathbf{x}^{(0)} + \alpha\boldsymbol{\xi}$ também será solução de $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$.

30. Suponha que $\det \mathbf{A} = 0$ e que $\mathbf{y}$ é uma solução de $\mathbf{A}^*\mathbf{y} = \mathbf{0}$. Mostre que, se $(\mathbf{b}, \mathbf{y}) = 0$ para qualquer desses $\mathbf{y}$, então $\mathbf{Ax} = \mathbf{b}$ tem solução. Note que isso é a recíproca do Problema 28; a forma da solução é dada pelo Problema 29.

Sugestão: O que a relação $\mathbf{A}^*\mathbf{y} = \mathbf{0}$ diz sobre as linhas de $\mathbf{A}$? Novamente, pode ajudar considerar o caso $n = 2$ primeiro.

31. Prove que $\lambda = 0$ será um autovalor de $\mathbf{A}$ se, e somente se, $\mathbf{A}$ for singular.

32. Vamos mostrar, neste problema, que os autovalores de uma matriz autoadjunta $\mathbf{A}$ são reais. Seja $\mathbf{x}$ um autovetor associado ao autovalor λ.

(a) Mostre que $(\mathbf{Ax}, \mathbf{x}) = (\mathbf{x}, \mathbf{Ax})$. Sugestão: Veja o Problema 26(c).

(b) Mostre que $\lambda(\mathbf{x}, \mathbf{x}) = \bar{\lambda}(\mathbf{x}, \mathbf{x})$. Sugestão: Lembre que $\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}$.

(c) Mostre que $\lambda = \bar{\lambda}$, ou seja, o autovalor λ é real.

33. Mostre que, se λ_1 e λ_2 são autovalores de uma matriz $\mathbf{A}$ autoadjunta e se $\lambda_1 \neq \lambda_2$, então os autovetores correspondentes $\mathbf{x}^{(1)}$ e $\mathbf{x}^{(2)}$ são ortogonais.

Sugestão: Use os resultados dos Problemas 26(c) e 32 para mostrar que $(\lambda_1 - \lambda_2)(\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}) = 0$.

34. Mostre que, se λ_1 e λ_2 são autovalores de uma matriz **A** qualquer e se $\lambda_1 \neq \lambda_2$, então os autovetores correspondentes $\mathbf{x}^{(1)}$ e $\mathbf{x}^{(2)}$ são linearmente independentes.

Sugestão: Comece com $c_1\mathbf{x}^{(1)} + c_2\,\mathbf{x}^{(2)} = 0$; multiplique por **A** para obter $c_1\lambda_1\mathbf{x}^{(1)} + c_2\lambda_2\mathbf{x}^{(2)} = 0$. Depois mostre que $c_1 = c_2 = 0$.

RESPOSTAS

1. $x_1 = -\frac{1}{3}, \quad x_2 = \frac{7}{3}, \quad x_3 = -\frac{1}{3}$

2. Não tem solução

3. $x_1 = -c, \quad x_2 = c + 1, \quad x_3 = c$, em que c é arbitrário

4. $x_1 = c, \quad x_2 = -c, \quad x_3 = -c$, em que c é arbitrário

5. $x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = 0$

6. $x_1 = c_1, \quad x_2 = c_2, \quad x_3 = c_1 + 2c_2 + 2$

7. Linearmente independente

8. $\mathbf{x}^{(1)} - 5\mathbf{x}^{(2)} + 2\mathbf{x}^{(3)} = \mathbf{0}$

9. $2\mathbf{x}^{(1)} - 3\mathbf{x}^{(2)} + 4\mathbf{x}^{(3)} - \mathbf{x}^{(4)} = \mathbf{0}$

10. Linearmente independente

11. $\mathbf{x}^{(1)} + \mathbf{x}^{(2)} - \mathbf{x}^{(4)} = \mathbf{0}$

13. $3\mathbf{x}^{(1)}(t) - 6\mathbf{x}^{(2)}(t) + \mathbf{x}^{(3)}(t) = \mathbf{0}$

14. Linearmente independente

16. $\lambda_1 = 2, \ \mathbf{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}; \quad \lambda_2 = 4, \ \mathbf{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

17. $\lambda_1 = 1 + 2i, \ \mathbf{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 - i \end{pmatrix}; \quad \lambda_2 = 1 - 2i, \ \mathbf{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 + i \end{pmatrix}$

18. $\lambda_1 = -3, \ \mathbf{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}; \quad \lambda_2 = -1, \ \mathbf{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

19. $\lambda_1 = 0, \ \mathbf{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}; \quad \lambda_2 = 2, \ \mathbf{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$

20. $\lambda_1 = 2, \ \mathbf{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \lambda_2 = -2, \ \mathbf{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}$

21. $\lambda_1 = -1/2, \ \mathbf{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 3 \\ 10 \end{pmatrix}; \quad \lambda_2 = -3/2, \ \mathbf{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

22. $\lambda_1 = 1, \ \mathbf{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad \lambda_2 = 1 + 2i, \ \mathbf{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -i \end{pmatrix}; \quad \lambda_3 = 1 - 2i, \ \mathbf{x}^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ i \end{pmatrix}$

23. $\lambda_1 = 1, \ \mathbf{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}; \quad \lambda_2 = 2, \ \mathbf{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \lambda_3 = 3, \ \mathbf{x}^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

24. $\lambda_1 = 1, \ \mathbf{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \lambda_2 = 2, \ \mathbf{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad \lambda_3 = -1, \ \mathbf{x}^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

25. $\lambda_1 = -1, \ \mathbf{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \lambda_2 = -1, \ \mathbf{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}; \quad \lambda_3 = 8, \ \mathbf{x}^{(3)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$