EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARA ENGENHARIA ELÉTRICA
TE 315

Aula 06_2

AUTOVALORES E AUTOVETORES

UFPR
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

INTRODUÇÃO

Vamos rever, nesta aula, alguns resultados de álgebra linear que são importantes para a resolução de sistemas lineares de equações diferenciais.

Alguns desses resultados são facilmente demonstráveis, outros não; como estamos interessados apenas em resumir uma informação útil de forma compacta, não haverão demonstrações em nenhum dos casos.

Todos os resultados nesta seção dependem de alguns fatos básicos sobre sistemas lineares de equações algébricas.

De fato, se está ao dia com os resultados da álgebra linear esta aula pode ser ignorada

AUTOVALORES E AUTOVETORES

INDEPENDÊNCIA LINEAR

Um conjunto de n equações algébricas lineares simultâneas em n variáveis do tipo:

$$\begin{aligned} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n &= b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,n}x_n &= b_n \end{aligned} \quad (1)$$

pode ser escrito:

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

ou de forma compacta: **A x = b** (2)

em que a matriz **A** (n × n) e o vetor **b** (n x1) são dados, e as componentes de **x** (n x 1) têm que ser determinadas. Se **b** = 0, o sistema é dito homogêneo; caso contrário, ele é não homogêneo.

CASO NÃO SINGULAR

Se a matriz de coeficientes **A** for invertível, ou seja, se **A** não for singular (det **A** for diferente de zero), então o sistema (2) terá uma única solução.

Se **A** é invertível, $\mathbf{A}^{-1}$ existe, e a solução pode ser encontrada multiplicando-se cada lado de (2) à esquerda por $\mathbf{A}^{-1}$; assim,

$$\mathbf{Ax} = \mathbf{b} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A}^{-1}\mathbf{Ax} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{Ix} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{b} \tag{3}$$

Em particular, o problema homogêneo **A**x = **0**, correspondente a **b** = **0** em (2), tem apenas a solução trivial x = 0.

Por outro lado, se **A** for singular, ou seja, se det **A** for zero, então, ou não existe solução da Eq. (2), ou existe, mas não é única.
Como **A** é singular, $\mathbf{A}^{-1}$ não existe, de modo que a Eq. (3) não é mais válida.

AUTOVALORES E AUTOVETORES

CASO SINGULAR

Lembrando que no caso em que **A** é singular, o sistema homogêneo **A**x =0 tem uma infinidade de soluções não nulas além da solução trivial (**x**=0)

A situação para o sistema não homogêneo (2) com **A** singular é mais complicada.

Esse sistema não tem solução y, a menos que o vetor **b** pertença ao espaço coluna de **A** e portanto **b** deve satisfazer a condição (**b**,**y**) = **0** (lembre álgebra linear).

A condição (**b**,**y**) = **0** é satisfeita por todos os y tais que **A*y** = **0**, em que **A*** é a matriz adjunta de **A** (lembrando que $\mathbf{A}^* \equiv \overline{\mathbf{A}}^T$ em que $\overline{\mathbf{A}}$ é a matriz de cofatores de **A**).

Se (**b**,**y**) = **0** for satisfeita, então o sistema (2) terá uma infinidade de soluções da forma $\mathbf{x} = \mathbf{x}^{(0)} + \xi$, em que $\mathbf{x}^{(0)}$ é uma solução particular de **Ax** = **b**, and ξ é qualquer solução de **Ax** = **0**.

EXEMPLO 1

Resolva o sistema de equações:

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 7 \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 &= -5 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 &= 4 \end{aligned}$$

Operando com as linhas, eliminando a_{21}, a_{31} e a_{32} para deixar a matriz triangular superior obtemos...

$$(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 7 \\ -1 & 1 & -2 & -5 \\ 2 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 7 \\ 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & -7 & -10 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 7 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \qquad \begin{matrix} x_1 & -2x_2 & +3x_3 & = 7 \\ & x_2 & -x_3 & = -2 \\ & & x_3 & = 1 \end{matrix}$$

EXEMPLO 1

$$\begin{aligned} x_1 \quad -2x_2 \quad +3x_3 &= 7 \\ x_2 \quad -x_3 &= -2 \\ x_3 &= 1 \end{aligned}$$

Da última equação temos $x_3 = 1$; da segunda, $x_2 = -2 + x_3 = -1$; e, da primeira, $x_1 = 7 + 2x_2 - 3x_3 = 2$. Obtemos, assim,

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Como esta solução é única para o sistema acima, concluímos que a matriz de coeficientes **A** é invertível.

Vejamos outro exemplo...

AUTOVALORES E AUTOVETORES

EXEMPLO 2

Analise o sistema de equações:

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= b_1 \\ -x_1 + x_2 - 2x_3 &= b_2 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= b_3 \end{aligned}$$

Operando novamente obtemos...

$$(\mathbf{A}|\mathbf{b}) = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & b_1 \\ -1 & 1 & -2 & b_2 \\ 2 & -1 & 3 & b_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & b_1 \\ 0 & 1 & -1 & -b_1 - b_2 \\ 0 & 0 & 0 & b_1 + 3b_2 + b_3 \end{pmatrix}$$

A equação correspondente à terceira linha da matriz é: $b_1 + 3b_2 + b_3 = 0$

Portanto, o sistema não tem solução, a menos que esta última condição seja satisfeita por b_1, b_2 e b_3.
É possível mostrar que essa condição é exatamente a condição (**b**,**y**) = **0** para nosso sistema acima (lembre de álgebra linear, equação de um plano).

AUTOVALORES E AUTOVETORES

EXEMPLO 2

$$b_1 + 3b_2 + b_3 = 0$$

Vamos supor que $b_1 = 2$, $b_2 = 1$ e $b_3 = -5$, quando a equação é satisfeita. Então as duas primeiras linhas da matriz correspondem às equações

$$\begin{array}{rrrr} x_1 & -2x_2 & +3x_3 & = 2 \\ & x_2 & -x_3 & = -3 \end{array}$$

Para resolver este sistema escolhemos uma das incógnitas arbitrariamente e resolvemos para as outras duas.
Fazendo x = α, em que α é arbitrário, segue que

$$x_2 = \alpha - 3$$
$$x_1 = 2(\alpha - 3) - 3\alpha + 2 = -\alpha - 4$$

Vamos reescrever a solução em notação vetorial...

EXEMPLO 2

Escrevendo a solução em notação vetorial, temos

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} -\alpha - 4 \\ \alpha - 3 \\ \alpha \end{pmatrix} \qquad \rightarrow \qquad \mathbf{x} = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

É fácil verificar que o segundo vetor à direita do segundo sinal de igualdade é uma solução do sistema <u>não homogêneo</u>, enquanto o primeiro vetor é a solução mais geral possível do sistema homogêneo correspondente.

DEPENDÊNCIA E INDEPENDENCIA LINEAR

Um conjunto de k vetores $\mathbf{x}^{(1)}$,..., $\mathbf{x}^{(k)}$ é dito linearmente dependente quando existe um conjunto de números reais ou complexos c_1, ..., c_k, nem todos nulos, tais que

$$c_1\mathbf{x}^{(1)} + c_2\mathbf{x}^{(2)} + \cdots + c_n\mathbf{x}^{(n)} = \mathbf{0} \qquad (4)$$

Em outras palavras, $\mathbf{x}^{(1)}$, ..., $x^{(k)}$ são linearmente dependentes quando existe uma relação linear entre eles. Por outro lado, se o único conjunto $c_1, \ldots, c_k$ para o qual a Eq. (4) é satisfeita for $c_1 = c_2 = \ldots = c_k = 0$, então $\mathbf{x}^{(1)}$, ..., $\mathbf{x}^{(k)}$ serão ditos linearmente independentes.

Vejamos um exemplo:

EXEMPLO 3

Determine se os vetores são linearmente independentes ou linearmente dependentes. Se forem linearmente dependentes, encontre uma relação linear entre eles.

$$\mathbf{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \mathbf{x}^{(3)} = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ -11 \end{pmatrix}$$

Para determinar se $\mathbf{x}^{(1)}$, $\mathbf{x}^{(2)}$ e $\mathbf{x}^{(3)}$ são linearmente dependentes, procuramos constantes c_1, c_2 e c_3 tais que

$$c_1\mathbf{x}^{(1)} + c_2\mathbf{x}^{(2)} + c_3\mathbf{x}^{(3)} = \mathbf{0}$$

Podemos escrever esta condição na forma matricial...

UFPR UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

EXEMPLO 3

$$c_1\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}+c_2\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}-4\\1\\-11\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{pmatrix}1&2&-4\\2&1&1\\-1&3&-11\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\c_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

e resolvida por meio de operações elementares sobre as linhas da matriz aumentada...

$$(\mathbf{A}|\mathbf{b})=\begin{pmatrix}1&2&-4&0\\2&1&1&0\\-1&3&-11&0\end{pmatrix}\rightarrow\begin{pmatrix}1&2&-4&0\\0&1&-3&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

Obtemos, assim, o sistema equivalente
$$\begin{aligned}c_1+2c_2-4c_3&=0\\ c_2-3c_3&=0\end{aligned}$$

Da segunda das equações temos $c_2 = 3c_3$ e, da primeira, obtemos $c_1 = 4c_3 - 2c_2 = -2c_3$. Resolvemos, então para c_1 e c_2 em função de c_3, com este último arbitrário. Se escolhermos, por conveniência, $c_3 = -1$, teremos $c_1 = 2$ e $c_2 = -3$.

EXEMPLO 3

$$\begin{aligned} c_1 + 2c_2 - 4c_3 &= 0 \\ c_2 \ - 3c_3 &= 0 \end{aligned}$$

Da segunda das equações temos $c_2 = 3c_3$ e, da primeira, obtemos $c_1 = 4c_3 - 2c_2 = -2c_3$.

Resolvemos, então para c_1 e c_2 em função de c_3, com este último arbitrário. Se escolhermos, por conveniência, $c_3 = -1$, teremos $c_1 = 2$ e $c_2 = -3$.

$$2\mathbf{x}^{(1)} - 3\mathbf{x}^{(2)} - \mathbf{x}^{(3)} = \mathbf{0}$$

e os vetores dados são linearmente dependentes.

De maneira alternativa, podemos calcular det(**A**), se for zero as colunas são linearmente dependentes (mas assim não identificamos qual CL).

AUTOVALORES E AUTOVETORES

RESUMO

Se a matriz não é singular suas colunas e linhas são linearmente independentes

Se a matriz é singular suas colunas e linhas são linearmente dependentes

As colunas (ou linhas) de **A** são linearmente independentes se **A** não é singular e existe $\mathbf{A}^{-1}$

Também **A** é não singular se seu determinante for det $\mathbf{A} \neq 0$ portanto suas linhas e colunas são linearmente independentes se det $\mathbf{A} \neq 0$.

Finalmente, se $\mathbf{C} = \mathbf{AB}$, pode-se mostrar que det $\mathbf{C}$ = (det $\mathbf{A}$)(det $\mathbf{B}$). Portanto, se as colunas (ou linhas) de ambas, A e B, são linearmente independentes, então as colunas (ou linhas) de C também o são.

AUTOVALORES E AUTOVETORES

DEPENDÊNCIA LINEAR E FUNÇÕES VETORIAIS

Vamos agora estender os conceitos de dependência e independência linear a um conjunto de funções vetoriais $\mathbf{x}^{(1)}(t), \ldots, \mathbf{x}^{(k)}(t)$ definidas em um intervalo $\alpha < t < \beta$. Os vetores $\mathbf{x}^{(1)}(t), \ldots, \mathbf{x}^{(k)}(t)$ são ditos linearmente dependentes em $\alpha < t < \beta$ se existe um conjunto de constantes $c_1, \ldots, c_k$, não todas nulas, tais que

$$c_1\mathbf{x}^{(1)}(t) + c_2\mathbf{x}^{(2)}(t) + \cdots + c_n\mathbf{x}^{(n)}(t) = \mathbf{0} \qquad \text{para todo } t \in I$$

caso contrário, $\mathbf{x}^{(1)}(t), \ldots, \mathbf{x}^{(k)}(t)$ são ditos linearmente independentes.
Note que, se $\mathbf{x}^{(1)}(t), \ldots, \mathbf{x}^{(k)}(t)$ forem linearmente dependentes em um intervalo, então elas serão linearmente dependentes em todos os pontos do intervalo.
No entanto, se $\mathbf{x}^{(1)}(t), \ldots, \mathbf{x}^{(k)}(t)$ forem linearmente independentes em um intervalo, elas podem ser linearmente independentes ou não em cada ponto; elas podem, de fato, ser linearmente dependentes em cada ponto, mas com um conjunto diferente de constantes em pontos diferentes.

AUTOVALORES E AUTOVETORES

A equação **Ax**=**b** pode ser vista como uma transformação linear que leva (ou transforma) um vetor dado **x** em um novo vetor **y** (novamente lembre das aulas de álgebra vetorial).

Vetores que são transformados em múltiplos de si mesmos são importantes em muitas aplicações.

Para encontrar tais vetores, fazemos **y** = λ**x**, em que λ é um fator escalar de proporcionalidade

Nesses casos procuramos soluções das equações **Ax** = λ**x** ou **(A-λI)x** = **0**

A última equação tem soluções não nulas se, e somente se, λ for escolhido de modo que det(**A**-λ**I**) = 0 que é uma equação polinomial de grau n em λ e é chamada de equação característica da matriz A.

Os valores de λ que satisfazem esta equação (reais ou complexos) são chamados de autovalores da matriz **A**. As soluções não nulas de **Ax** = λ**x** obtidas usando λ, são chamadas de autovetores (**x**) da matriz **A.** Vejamos um exemplo...

AUTOVALORES E AUTOVETORES

EXEMPLO 4

Encontre os autovalores e autovetores da matriz $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$

Os autovalores λ e os autovetores **x** satisfazem a equação (**A** – λ**I**)**x** = **0**, ou

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \det\left(\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \det\begin{pmatrix} 3-\lambda & -1 \\ 4 & -2-\lambda \end{pmatrix} =$$

$$= (3-\lambda)(-2-\lambda) - (-1)(4) = \lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda - 2)(\lambda + 1) = 0$$

Logo, os autovalores são $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = -1$.

Vamos agora encontrar os autovetores **x** que satisfazem (**A** – λ**I**) **x** = **0** quando substituímos λ por seus valores $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = -1$.

AUTOVALORES E AUTOVETORES

EXEMPLO 4

Então, para encontrar os autovetores, substituímos λ por cada um dos autovalores encontrados. Para λ = 2, temos

$$(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{I})\mathbf{x}=\mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3-2 & -1 \\ 4 & -2-2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Logo, cada linha dessa equação vetorial leva à condição $x_1 - x_2 = 0$; portanto, x_1 e x_2 são iguais, mas seus valores não estão determinados.
Se $x_1 = c$, então $x_2 = c$ também, e o autovetor $\mathbf{x}^{(1)}$ é:

$$\mathbf{x}^{(1)} = c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad c \neq 0$$

Então existe uma família infinita de autovetores para o autovalor λ_1. Escolheremos um único membro dessa família como representante (escolhemos c = 1). Assim:

$$\mathbf{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

AUTOVALORES E AUTOVETORES

EXEMPLO 4

Lembremos que qualquer múltiplo não nulo desse autovetor também é um autovetor. Dizemos que $x^{(1)}$ é o autovetor correspondente ao autovalor $\lambda_1 = 2$.

Fazendo, agora, $\lambda = \lambda_2 = -1$ obtemos o autovetor para esse autovalor...

$$(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I})\mathbf{x} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3+1 & -1 \\ 4 & -2+1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Mais uma vez, obtemos uma única condição sobre x_1 e x_2, a saber, $4x_1 - x_2 = 0$. Portanto, o autovetor correspondente ao autovalor $\lambda_2 = -1$ é

$$\mathbf{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

ou qualquer múltiplo não nulo desse vetor.

UFPR
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

COMENTÁRIOS

Como vimos no exemplo, os autovetores estão determinados a menos de uma constante multiplicativa não nula; se essa constante for especificada de algum modo, então os autovetores serão ditos normalizados.

No Exemplo 4, escolhemos a constante c para que as componentes dos autovetores fossem inteiros pequenos. No entanto, qualquer outra escolha de c seria igualmente válida, embora talvez não tão conveniente.

Algumas vezes é conveniente normalizar um autovetor x escolhendo a constante de modo que seu comprimento seja $||x|| = (x, x)^{1/2} = 1$.

Como a equação característica (slide 17) para uma matriz **A** (n x n) é uma equação polinomial de grau n em λ, ela tem n autovalores $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, alguns dos quais podem ser repetidos.

COMENTÁRIOS

Se determinado autovalor aparece m vezes como raiz ele é dito de multiplicidade algébrica m.

Cada autovalor tem pelo menos um autovetor associado, e um autovalor de multiplicidade algébrica m pode ter q ($1 \leq q \leq m$) autovetores linearmente independentes.

O número q é chamado de multiplicidade geométrica do autovalor

Se todos os autovalores de uma matriz **A** forem simples (se tiverem multiplicidade algébrica 1), então cada autovalor também terá multiplicidade geométrica 1.

COMENTÁRIOS

Por outro lado, se **A** tiver um ou mais autovalores repetidos, então pode ter menos do que n autovetores associados linearmente independentes, já que um autovalor repetido pode ter $q < m$ autovetores.

Esse fato pode levar a complicações na resolução de sistemas de equações diferenciais (não veremos isso agora).

Vamos ver um exemplo para ilustrar as multiplicidades mencionadas...

AUTOVALORES E AUTOVETORES

EXEMPLO 5

Encontre os autovalores e autovetores da matriz $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Os autovalores λ e os autovetores x satisfazem a equação (**A** – λ**I**)**x** = **0**, que são as raízes da equação:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = \det\begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3 + 3\lambda + 2 = (\lambda - 2)(\lambda + 1)^2 = 0$$

As raízes são $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -1$ e $\lambda_3 = -1$. Assim, 2 é um autovalor simples, e –1 é um autovalor de multiplicidade algébrica 2, ou um autovalor duplo.

Vamos agora encontrar os autovetores...

AUTOVALORES E AUTOVETORES

EXEMPLO 5

Para encontrar o autovetor $x^{(1)}$ associado ao autovalor λ_1, substituímos $\lambda = 2$ na equação isso nos leva a:

$$\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\to \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \qquad \begin{aligned} x_1 \quad\quad -x_3 &= 0 \\ x_2 \quad -x_3 &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

$$\to \mathbf{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} = c\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{em que } c \text{ é arbitrario} \to \text{escolhemos } \mathbf{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

UFPR
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

EXEMPLO 5

Para encontrar o autovetor $x^{(2)}$ associado ao autovalor λ_2, substituímos λ = -1 e nosso sistema se reduz imediatamente a uma única equação

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = 0 \\ & & 0 & & & = 0 \\ & & & & 0 & = 0 \end{matrix}$$

Assim, valores para duas das quantidades x_1, x_2 ou x_3 podem ser escolhidos arbitrariamente e o terceiro valor fica determinado.

Por exemplo, se $x_1 = c_1$ e $x_2 = c_2$, então $x_3 = -c_1 - c_2$. Em notação vetorial, temos

$$\rightarrow \mathbf{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ -c_1 - c_2 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \text{em que } c_1 \; e \; c_2 \text{ são arbitrarios}$$

EXEMPLO 5

Por exemplo, escolhendo $c_1 = 1$ e $c_2 = 0$, obtemos o autovetor

$$\mathbf{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Qualquer múltiplo não nulo de $x^{(2)}$ também é um autovetor.
Um segundo autovetor independente pode ser encontrado para outra escolha de c_1 e c_2, por exemplo, $c_1 = 0$ e $c_2 = 1$. Nesse caso, obtemos

$$\mathbf{x}^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

que é linearmente independente de $\mathbf{x}^{(2)}$. Portanto, nesse exemplo, existem dois autovetores linearmente independentes associados ao autovalor duplo λ_2.

AUTOVALORES E AUTOVETORES

EXEMPLO 5

Resumindo: temos três autovetores linearmente independentes de **A**

$$\mathbf{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{x}^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Sendo que $\mathbf{x}^{(2)}$ e $\mathbf{x}^{(2)}$ correspondem ao autovalor duplo $\lambda = -1$.
Portanto a matriz **A** é uma matriz simétrica 3x3 ($\mathbf{A}=\mathbf{A}^T$) com três autovalores reais e três autovetores linearmente independentes.
Poderíamos ter escolhido

$$\mathbf{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{x}^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

de forma que seus produtos escalares $\left(\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(2)}\right) = 0 \quad \left(\mathbf{x}^{(1)}, \mathbf{x}^{(3)}\right) = 0 \quad \left(\mathbf{x}^{(2)}, \mathbf{x}^{(3)}\right) = 0$

de forma que seus os autovetores sejam também ortogonais entre si

MATRIZES HERMITIANAS (AUTOADJUNTAS)

Uma classe importante de matrizes, chamadas de autoadjuntas ou hermitianas, é formada pelas matrizes que satisfazem **A*** = **A** (lembrando que $\mathbf{A}^* \equiv \bar{\mathbf{A}}^T$ e $\bar{\mathbf{A}}$ é a matriz de cofatores de **A**) ou seja, $\bar{a}_{ji} = a_{ij}$.

A classe das matrizes hermitianas inclui, como subclasse, as matrizes simétricas reais, ou seja, matrizes com todos os elementos reais tais que $A^T = A$.

Os autovalores e autovetores de matrizes autoadjuntas têm as seguintes propriedades úteis:

1. Todos os autovalores são reais.
2. Sempre existe um conjunto completo de n autovetores linearmente independentes, independente das multiplicidades algébricas dos autovalores.
3. Se $x^{(1)}$ e $x^{(2)}$ forem autovetores correspondentes a autovalores distintos, então $(x^{(1)}, x^{(2)}) = 0$. Logo, se todos os autovalores forem simples, os autovetores associados formarão um conjunto ortogonal de vetores.
4. É possível escolher m autovetores ortogonais entre si associados a um autovalor de multiplicidade algébrica m. Assim, o conjunto completo de n autovetores sempre pode ser escolhido de modo que seja um conjunto ortogonal, além de linearmente independente.

AUTOVALORES E AUTOVETORES

Lista de exercícios disponível em:

http://www.eletrica.ufpr.br/p/professores:patricio:inicial

Disciplina TE315 (Equações Diferenciais para Engenharia Elétrica)

Gabaritos disponíveis no mesmo endereço