EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARA ENGENHARIA ELÉTRICA

TE 315

Aula 06_1

SISTEMAS DE EQUAÇÕES LINEARES DE PRIMEIRA ORDEM: INTRODUÇÃO

INTRODUÇÃO

Existem muitos problemas físicos que envolvem diversos elementos separados associados de alguma forma.

Por exemplo, em circuitos elétricos e em problemas de mecânica.

Nesses e em casos semelhantes, o problema matemático correspondente consiste em um sistema de duas ou mais equações diferenciais (em geral de ordem n), que sempre podem ser escritas como equações de primeira ordem.

Vamos estudar sistemas de equações lineares de primeira ordem, em particular equações com coeficientes constantes.

Em muitos aspectos, esta aula segue a mesma linha que o tratamento dado às equações lineares de segunda ordem das aulas 03.

INTRODUÇÃO

Sistemas de equações diferenciais ordinárias simultâneas (ODE simultâneas) aparecem naturalmente em problemas envolvendo diversas variáveis dependentes, cada uma delas sendo função da mesma variável independente única.

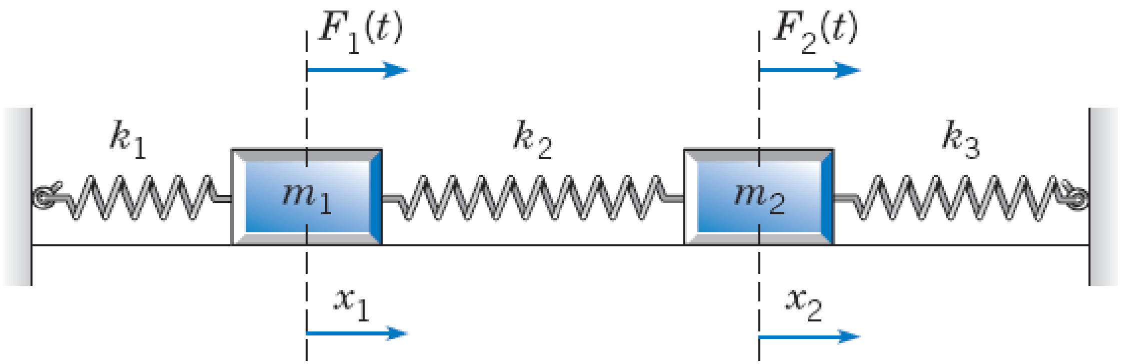
Vamos definir a t como a variável independente e x_1, x_2, x_3,... como as variáveis dependentes, que são funções de t

Vejamos como exemplo os casos de sistemas massa-mola com mais de uma massa e de circuitos RLC em paralelo...

INTRODUÇÃO

Por exemplo, considere o sistema massa-mola abaixo.

As duas massas se movem em uma superfície sem atrito sob a influência de forças externas $F_1(t)$ e $F_2(t)$ e são, também, restringidas em seu movimento pelas três molas com constantes k_1, k_2 e k_3, respectivamente.



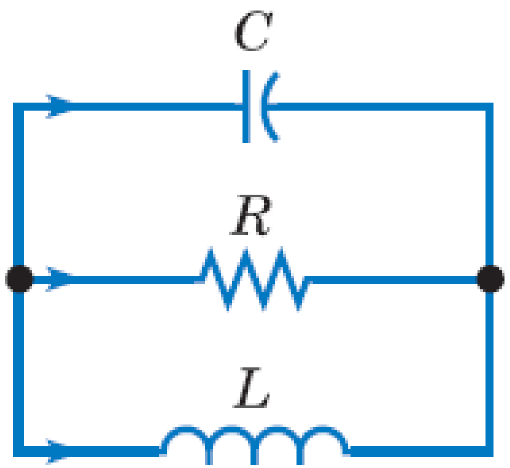
Segundo Newton:

$$m_1 \frac{d^2x_1}{dt^2} = -k_1x_1(t) - k_2\big(x_1(t) - x_2(t)\big) + F_1(t) = -(k_1 + k_2)x_1(t) + k_2x_2(t) + F_1(t)$$

$$m_2 \frac{d^2x_2}{dt^2} = -k_3x_2(t) - k_2\big(x_2(t) - x_1(t)\big) + F_2(t) = -(k_3 + k_2)x_2(t) + k_2x_1(t) + F_2(t)$$

Este é um sistema linear de duas ODE de segunda ordem (não homogêneas)...

INTRODUÇÃO



Outro exemplo, considere o circuito elétrico RLC paralelo

Seja V a diferença de tensão no capacitor e seja I a corrente passando pelo indutor.

Então (em parte vimos isso na aula 01_3 e em problemas da aula 03_5) podemos mostrar que a diferença de tensão e a corrente são descritas pelo sistema de equações

$$\frac{dI}{dt} = \frac{V}{L} \qquad \frac{dV}{dt} = -\frac{I}{C} - \frac{V}{RC}$$

Neste caso temos um sistema linear de duas ODE de primeira ordem (homogêneas)...

INTRODUÇÃO

Uma razão pela qual os sistemas de equações de primeira ordem são particularmente importantes é que as equações de ordem maior sempre podem ser transformadas em tais sistemas.

É assim que funcionam as abordagens numéricas, já que quase todos os softwares para gerar soluções numéricas aproximadas de equações diferenciais de ordem n são escritos para sistemas de equações de primeira ordem.

O exemplo a seguir ilustra o quão fácil é fazer a transformação.

INTRODUÇÃO

EXEMPLO 1

O movimento de determinado sistema massa-mola é descrito pela equação diferencial de segunda ordem

$$u''(t) + 0{,}125u'(t) + u(t) = 0$$

Escreva essa equação como um sistema de equações de primeira ordem.

Sejam $x_1 = u$ e $x_2 = u'$. Então $x_1' = x_2$. Além disso, $u'' = x_2'$. Então, substituindo u, u′ e u″ obtemos:

$$x_2'(t) + 0{,}125x_2\,(t) + x_1 = 0$$

Logo, x_1 e x_2 satisfazem o seguinte sistema de duas equações diferenciais de primeira ordem:

$$x_1' = x_2$$
$$x_2' = -x_1 - 0{,}125x_2$$

INTRODUÇÃO

SISTEMA DE ORDEM N E SISTEMA DE PRIMEIRA ORDEM

Para transformar uma ODE arbitrária de ordem n

$$y^{(n)} = F\left(t, y, y', y'', \dots, y^{(n-1)}\right)$$

em um sistema de n equações de primeira ordem, estendemos o método do Exemplo 1 definindo as novas variáveis x_1, x_2, . . . , x_n por

$$x_1 = y \qquad x_2 = y' \qquad x_3 = y'' \qquad \dots \qquad x_n = y^{(n-1)}$$

De forma que obtemos o sistema:

$$\begin{aligned} x_1' &= x_2 \\ x_2' &= x_3 \\ &\vdots \\ x_{n-1}' &= x_n \\ x_n' &= F(t, x_1, x_2, \dots x_n) \end{aligned}$$

Este caso não é geral o suficiente...numa situação mais geral teremos que:

SISTEMA DE ORDEM N E SISTEMA DE PRIMEIRA ORDEM

Num caso mais geral, teremos um sistema de equações diferenciais do tipo:

$$
\begin{aligned}
x_1' &= F_1(t, x_1, x_2, \dots x_n) \\
x_2' &= F_2(t, x_1, x_2, \dots x_n) \\
&\vdots \\
x_n' &= F_n(t, x_1, x_2, \dots x_n)
\end{aligned}
\qquad (1)
$$

Aplicando este método ao o sistema massa-mola da introdução obteríamos um sistema de quatro equações de primeira ordem da forma acima, enquanto no caso do circuito RLC paralelo, ele já está nesta forma.

De fato, sistemas da forma (1) acima incluem quase todos os casos de interesse, de modo que grande parte da teoria mais avançada de equações diferenciais é dedicada a tais sistemas.

Como obter a solução deste sistema?

SOLUÇÃO DE SISTEMAS DE PRIMEIRA ORDEM

A solução do sistema (1) no intervalo I: $\alpha < t < \beta$ é um conjunto de n funções

$$x_1 = \varphi_1(t) \qquad x_2 = \varphi_2(t) \qquad \ldots \qquad x_n = \varphi_n(t) \tag{2}$$

diferenciáveis em todos os pontos do intervalo I e que satisfazem o sistema de equações original (1) em todos os pontos desse intervalo.

Além do sistema de equações diferenciais (1), no caso de um problema de valor inicial, devem ser fornecidas também as condições iniciais na forma

$$x_1(t_0) = x_1^0 \qquad x_2(t_0) = x_2^0 \qquad \ldots \qquad x_n(t_0) = x_n^0 \tag{3}$$

INTRODUÇÃO

SOLUÇÃO DE SISTEMAS DE PRIMEIRA ORDEM

A solução (2) pode ser interpretada como um conjunto de equações paramétricas em um espaço de dimensão n.

Para um valor de t dado, esta equações fornecem valores para as coordenadas x_1, . . . , x_n de um ponto deste espaço.

À medida que t varia, as coordenadas, em geral, também mudam.

O conjunto de pontos correspondentes para $\alpha < t < \beta$ forma uma curva no espaço de n dimensões.

Muitas vezes, é útil imaginar a curva como sendo a trajetória ou o caminho percorrido por uma partícula movendo-se de acordo com o sistema de equações diferenciais (1).

As condições iniciais (3) determinam o ponto inicial do movimento da partícula.

Vejamos um exemplo desta trajetória em n dimensões...

INTRODUÇÃO

EXEMPLO 2

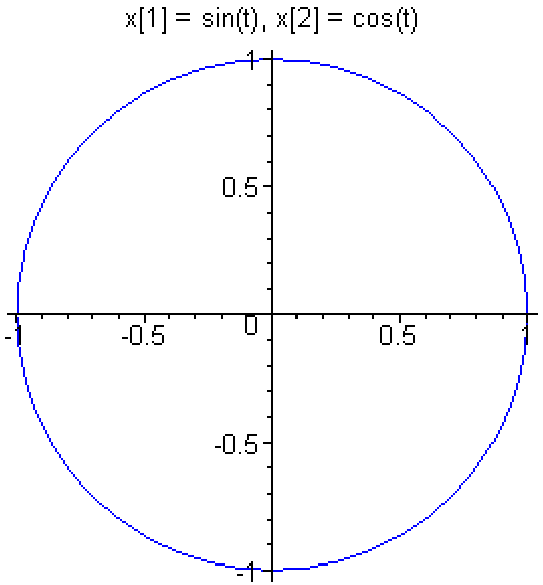
A equação $y'' + y = 0 \qquad 0 < t < 2\pi$

Pode ser escrita como um sistema de duas equações de primeira ordem pela substituição $x_1 = y$ and $x_2 = y'$

$$x_1' = x_2$$
$$x_2' = -x_1$$

A solução deste sistema é $x_1 = \sin(t) \qquad x_2 = \cos(t) \qquad 0 < t < 2\pi$

No espaço de n dimensões (a dimensão neste caso é 2) teremos a descrição paramétrica de um circulo unitário...



Vejamos um teorema sobre a solução deste sistema de equações...

INTRODUÇÃO

TEOREMA 1

Suponha que cada uma das funções $F_1, \ldots, F_n$ do sistema (1) e suas derivadas parciais, $\partial F_1/\partial x_1, \ldots, \partial F_1/\partial x_n, \ldots, \partial F_n/\partial x_1, \ldots, \partial F_n/\partial x_n$, sejam contínuas em uma região R do espaço t, $x_1 \ldots x_n$ definidas em $\alpha < t < \beta$, $\alpha_1 < x_1 < \beta_1, \ldots, \alpha_n < x_n < \beta_n$, e suponha que o ponto "inicial" $t_0, x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$ pertença a R.

Então, existe um intervalo $|t - t_0| < h$ (em torno de t_0) no qual existe uma única solução $x_1 = \phi_1(t), \ldots, x_n = \phi_n(t)$ do sistema de equações diferenciais (1) que também satisfaz as condições iniciais (3) (estas condições são suficientes mas não são necessárias).

Estas condições sobre $F_1, F_2, \ldots, F_n$, são facilmente verificadas em problemas específicos e são suficientes para garantir que o problema de valor inicial tenha uma solução única

Este Teorema 1 é análogo ao Teorema de existência e unicidade da aula 02_5 (para uma única equação de primeira ordem). Veja que no teorema acima não se diz nada sobre as derivadas parciais de $F_1 \ldots F_n$ em relação à variável independente t!

INTRODUÇÃO

SISTEMA LINEAR

Se cada uma das funções $F_1, \ldots, F_n$ nas Eqs. (1) for uma função linear das variáveis dependentes $x_1, \ldots, x_n$, então o sistema de equações é linear; caso contrário, é não linear. Assim, o sistema mais geral de n equações lineares tem a forma

$$\begin{aligned} x_1' &= p_{11}(t)x_1 + p_{12}(t)x_2 + \cdots + p_{1n}(t)x_n + g_1(t) \\ x_2' &= p_{21}(t)x_1 + p_{22}(t)x_2 + \cdots + p_{2n}(t)x_n + g_2(t) \\ &\vdots \\ x_n' &= p_{n1}(t)x_1 + p_{n2}(t)x_2 + \cdots + p_{nn}(t)x_n + g_n(t) \end{aligned} \qquad (4)$$

Se todas as funções $g_1(t), \ldots, g_n(t)$ forem identicamente nulas no intervalo I, então o sistema (4) é dito homogêneo; caso contrário, ele é não homogêneo.

Para o sistema linear (4), o teorema de existência e unicidade a seguir (Teorema 2) é mais simples e também tem uma conclusão mais forte.

Ele é análogo aos Teoremas correspondentes para equações lineares de primeira ordem (Teorema da existência e unicidade da aula 02_5) e de segunda ordem (Teorema 1 da existência e unicidade da aula 03_2), vejamos:

INTRODUÇÃO

TEOREMA 2

Se as funções $p_{11}, p_{12}, . . . , p_{nn}, g_1, . . . , g_n$ forem contínuas em um intervalo aberto I: $\alpha < t < \beta$, então existirá uma única solução $x_1 = \phi_1(t), \ldots , x_n = \phi_n(t)$ do sistema (4) que também satisfaz as condições iniciais (3), em que t_0 é qualquer ponto em I, e $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$ são números dados. Além disso, a solução existe em todo o intervalo I.

Note que, em contraste com a situação para um sistema não linear, a existência e unicidade de solução para um sistema linear estão garantidas em todo o intervalo no qual as hipóteses são satisfeitas.

Além disso, para um sistema linear, os valores iniciais (3) em $t = t_0$ são inteiramente arbitrários, enquanto, no caso não linear, o ponto inicial tem que estar contido na região R definida no Teorema 1 desta aula.

O restante do nosso estudo é dedicado a sistemas lineares de equações de primeira ordem
Para simplificar vamos utilizar notação matricial (lembrar álgebra linear)

INTRODUÇÃO

Lista de exercícios disponível em:

http://www.eletrica.ufpr.br/p/professores:patricio:inicial

Disciplina TE315 (Equações Diferenciais para Engenharia Elétrica)

Gabaritos disponíveis no mesmo endereço