# EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARA ENGENHARIA ELÉTRICA

# TE 315

## Aula 05_7

## A EQUAÇÃO DE BESSEL

# EQUAÇÃO DE BESSEL

## INTRODUÇÃO

Friedrich Wilhelm Bessel (1784 – 1846) foi um matemático, físico e astrônomo alemão.

Estudou os distúrbios no movimento dos planetas, para o qual em 1824 sistematizou a análise da equação hoje denominada Equação de Bessel.

De fato, a equação de Bessel foi proposta por primeira vez por Daniel Bernoulli. Bessel foi contemporâneo de Carl Friedrich Gauss, também matemático e astrônomo.

Nesta aula vamos estudar a equação de Bessel para ilustrar (como um exemplo) a discussão da aula anterior (Aula 5_6)

# EQUAÇÃO DE BESSEL

## INTRODUÇÃO

Para nossa análise vamos considerar três casos especiais da equação de Bessel abaixo apresentada

$$L[y] \equiv x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0$$

em $\nu$ é uma constante.

É fácil mostrar que x = 0 é um ponto singular regular dessa equação, pois temos

$$p_0 = \lim_{x\to 0} x\frac{Q(x)}{P(x)} = \lim_{x\to 0} x\frac{1}{x} = 1 \qquad e \qquad q_0 = \lim_{x\to 0} x^2\frac{R(x)}{P(x)} = \lim_{x\to 0} x^2\frac{x^2 - \nu^2}{x^2} = -\nu^2$$

A equação indicial (para x=0) é

$$F(r) = r(r-1) + p_0 r + q_0 = r(r-1) + r - \nu^2 = r^2 - \nu^2 = 0$$

com raízes r = $\pm\nu$. Consideraremos três casos $\nu$=0, $\nu$=1/2 e $\nu$=1 para o intervalo x > 0 (x=0 é singular, por isso procuramos no entorno de x=0, neste caso x>0).

# EQUAÇÃO DE BESSEL

## ORDEM ZERO

Neste caso (ordem zero), $\nu=0$, de modo que a equação de Bessel fica reduzida a:

$$x^2y'' + xy' + x^2y = 0$$

A equação indicial é: $F(r) = r(r-1) + p_0r + q_0 = r(r-1) + r = r^2 = 0$

e suas raízes são iguais: $r_1 = r_2 = 0$.

Procuramos (como vimos na aula 05_6) a solução na forma:

$$y(x) = \varphi(r,x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n} \quad \text{para } a_0 \neq 0 \qquad x > 0$$

Agora derivamos e substituímos na equação diferencial para obter a equação indicial (lembre que a equação indicial que obteremos desta forma é exatamente a mesma obtida acima para a equação de Euler, veja aula 05_5 slide 12) e a de recorrência

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n} \qquad y'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (r+n) x^{r+n-1} \qquad y''(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (r+n)(r+n-1) x^{r+n-2}$$

# EQUAÇÃO DE BESSEL

## ORDEM ZERO

Substituindo estas derivadas na equação de Bessel de ordem zero e agrupando termos (como foi feito no desenvolvimento da aula anterior) é fácil chegar à equação para os coeficientes perante as potências de $x^{r+n}$:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (r+n)(r+n-1)x^{r+n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (r+n)x^{r+n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n+2} = 0$$

Que pode ser reescrita assim (explicitando os dois primeiros termos):

$$a_0[r(r-1)+r]x^r + a_1[(r+1)r+(r+1)]x^{r+1} + \sum_{n=2}^{\infty}\{a_n[(r+n)(r+n-1)+(r+n)] + a_{n-2}\}\,x^{r+n} = 0$$

ou:

$$a_0 r^2 x^r + a_1 (r+1)^2 x^{r+1} + \sum_{n=2}^{\infty}\{a_n (r+n)^2 + a_{n-2}\}\,x^{r+n} = 0$$

# EQUAÇÃO DE BESSEL

## ORDEM ZERO

Obtivemos que $a_0 r^2 x^r + a_1 (r+1)^2 x^{r+1} + \sum_{n=2}^{\infty} \{a_n (r+n)^2 + a_{n-2}\} x^{r+n} = 0$

A relação de recorrência (para os coeficientes dentro dos colchetes) é

$$a_n(r) = -\frac{a_{n-2}(r)}{(r+n)^2} \qquad n \geq 2$$

Para determinar a primeira solução $y_1(x)$, utilizamos as raízes, neste caso r=0.

Para que os coeficientes das potências de x sejam zero (para r=0) é necessário que (veja que temos dois conjuntos de coeficientes independentes):
$a_1 = 0$, portanto, da relação de recorrência segue que $a_3 = a_5 = a_7 = \ldots = 0$.
Além disso...se começamos com $a_0$, fazendo n=2m, obtemos

$$a_{2m}(0) = -\frac{a_{2m-2}(0)}{(2m)^2} \qquad m = 1,2,\ldots$$

# EQUAÇÃO DE BESSEL

## ORDEM ZERO

$$a_{2m}(0) = -\frac{a_{2m-2}(0)}{(2m)^2} \qquad m = 1, 2, \ldots$$

Utilizando esta equação obtemos (a partir de $a_0$):

$$a_2 = -\frac{a_0}{2^2} \qquad a_4 = -\frac{a_2}{4^2} = \frac{a_0}{4^2 2^2} = \frac{a_0}{2^4(2\cdot 1)^2} \qquad a_6 = -\frac{a_0}{2^6(3\cdot 2\cdot 1)^2} \qquad \ldots$$

e, em geral,

$$a_{2m} = \frac{(-1)^m a_0}{2^{2m}(m!)^2} \qquad m = 1, 2, \ldots$$

Portanto nossa primeira solução para essa equação diferencial de Bessel de ordem zero será:

$$y_1(x) = a_0\left[1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m}(m!)^2}\right] = a_0\left[\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m}(m!)^2}\right] x > 0$$

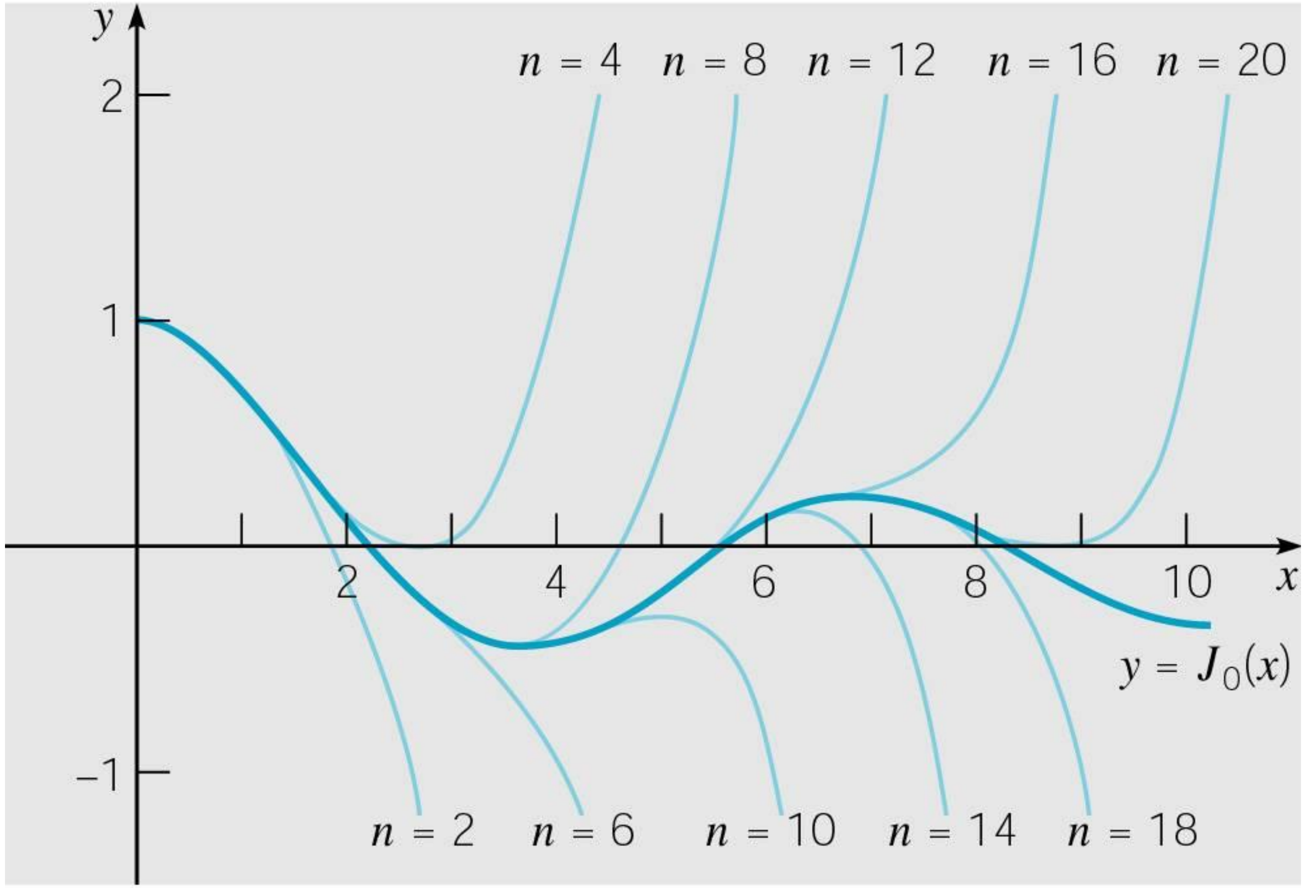
A função entre colchetes é conhecida como a função de Bessel de primeira espécie de ordem zero e é denotada por $J_0(x)$. Segue, do Teorema 1 da aula 05_5 que a série converge para todo x e que $J_0(x)$ é analítica em $x = 0$.

# EQUAÇÃO DE BESSEL

## ORDEM ZERO

A figura mostra os gráficos de $y = J_0(x)$ e de algumas das somas parciais da série.

$$J_0(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m}(m!)^2} \qquad x > 0$$



# EQUAÇÃO DE BESSEL

## ORDEM ZERO SEGUNDA SOLUÇÃO

Como a equação indicial tem raízes repetidas ($r_1$=$r_2$=0), utilizaremos o método descrito na aula 05_6 para este caso.

Nesse método, para determinar a série que representa a função $y_2$(x), precisamos calcular seus coeficientes segundo a equação:

$$a_n'(r)\Big|_{r=0}$$

Lembrando que:

$$a_0(r)r^2x^r + a_1(r)(r+1)^2x^{r+1} + \sum_{n=2}^{\infty}\{a_n(r)(r+n)^2 + a_{n-2}(r)\}\,x^{r+n} = 0$$

Então, como o coeficiente de $x^{r+1}$ tem que ser zero implica que $a_1$(r) = 0 para todo r próximo de r = 0. Então, não só $a_1$(0) = 0, mas também $a_1'$= 0. Da relação de recorrência (5) segue que $a_3'(0) = a_5'(0) =$ ... $= a_{2n+1}'(0) = 0$

Portanto, precisamos apenas calcular $a_{2m}'(0)$ m = 1, 2, 3, ... (os pares)

# EQUAÇÃO DE BESSEL

## ORDEM ZERO SEGUNDA SOLUÇÃO

Os coeficientes pares serão calculados utilizando a equação já obtida no slide 6, com n=2m, ou seja:

$$a_{2m}(r) = -\frac{a_{2m-2}(r)}{(r+2m)^2} \qquad \Rightarrow \qquad a_{2m}(r) = \frac{(-1)^m a_0}{(r+2)^2(r+4)^2 \ldots (r+2m)^2} \qquad m \geq 3$$

A seguir, precisamos dos $a'_{2m}$, eles são mais fáceis de calcular notando que, se

$$f(x) = (x-\alpha_1)^{\beta_1}(x-\alpha_2)^{\beta_2}\ (x-\alpha_3)^{\beta_3} \ldots\ (x-\alpha_n)^{\beta_n}$$

e também se x for diferente de $\alpha_1$, $\alpha_2$, $\alpha_3$,... $\alpha_n$ então (podem verificar)

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{\beta_1}{x-\alpha_1} + \frac{\beta_2}{x-\alpha_2} + \frac{\beta_3}{x-\alpha_3} + \ldots + \frac{\beta_n}{x-\alpha_n}$$

Portanto:

$$\frac{a'_{2m}(r)}{a_{2m}(r)} = -2\left[\frac{1}{r+2} + \frac{1}{r+4} + \cdots + \frac{1}{r+2m}\right]$$

# EQUAÇÃO DE BESSEL

## ORDEM ZERO SEGUNDA SOLUÇÃO

Assim, considerando a raiz r=0 obtemos: $a'_{2m}(0) = -2\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2m}\right] a_{2m}(0)$

Lembrando a relação $a_{2m} = \frac{(-1)^m a_0}{2^{2m}(m!)^2}$ (com m=1, 2, ...) podemos reescrever:

$$a'_{2m}(0) = -H_m \frac{(-1)^m a_0}{2^{2m}(m!)^2} \qquad m = 1, 2, \dots$$

em que: $H_m \equiv 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{m}$

Desta forma podemos agora escrever a segunda solução da equação de Bessel de ordem zero, considerando $a_0 = 1$ e utilizando os resultados da aula 05_6 para o caso de raízes repetidas...

# EQUAÇÃO DE BESSEL

## ORDEM ZERO SEGUNDA SOLUÇÃO

Assim, a segunda solução da equação de Bessel de ordem zero é:

$$y_2(x) = J_0(x)\ln x + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1} H_m}{2^{2m}(m!)^2} x^{2m} \qquad x > 0$$

A seguir uma questão de conveniência...
No lugar da $y_2$ acima, como segunda solução, em geral, é definida outra função.
Esta outra função é uma combinação linear de $J_0$ e da própria $y_2$. (lembrar que qualquer combinação linear duas soluções independentes, pode ser utilizada no conjunto fundamental de soluções).
Esta combinação linear é conhecida como a função de Bessel de segunda espécie de ordem zero e é representada por $Y_0$.

$$Y_0(x) \equiv \frac{2}{\pi}[y_2(x) + (\gamma - \ln 2)J_0(x)]$$

# EQUAÇÃO DE BESSEL

## ORDEM ZERO SEGUNDA SOLUÇÃO

Nesta função de Bessel de segunda espécie de ordem zero

$$Y_0(x) \equiv \frac{2}{\pi}[y_2(x) + (\gamma - \ln 2)J_0(x)]$$

γ é uma constante, conhecida como a constante de Euler-Mascheroni que é definida pela equação

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}(H_n - \ln n) \cong 0.5772$$

Substituindo $y_2(x)$ na definição der $Y_0$ obtemos finalmente

$$Y_0(x) = \frac{2}{\pi}\left[\left(\gamma + \ln\frac{x}{2}\right)J_0(x) + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m+1}H_m}{2^{2m}(m!)^2}x^{2m}\right] \qquad x > 0$$

Agora podemos escrever a solução geral da equação de Bessel de ordem zero para x > 0 é

# EQUAÇÃO DE BESSEL

## SOLUÇÃO GERAL

A solução geral da equação de Bessel de ordem zero para x > 0 é

$$y(x) = c_1 J_0(x) + c_2 Y_0(x)$$

em que (lembrando)

$$J_0(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m}(m!)^2},$$

$$Y_0(x) = \frac{2}{\pi}\left[\left(\gamma + \ln\frac{x}{2}\right) J_0(x) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1} H_m}{2^{2m}(m!)^2} x^{2m}\right]$$

Note que $J_0(x) \to 1$ para $x \to 0$ e que $Y_0(x)$ tem uma singularidade logarítmica em $x = 0$, e se comporta como $(2/\pi) \ln x$ quando $x \to 0$ por valores positivos. Então, se estivermos interessados em soluções da equação de Bessel de ordem zero que sejam finitas na origem, o que ocorre muitas vezes, é que $Y_0$ é descartado.

Como se comportam $J_0$ e $Y_0$ quando x tende a infinito? (próximo slide)

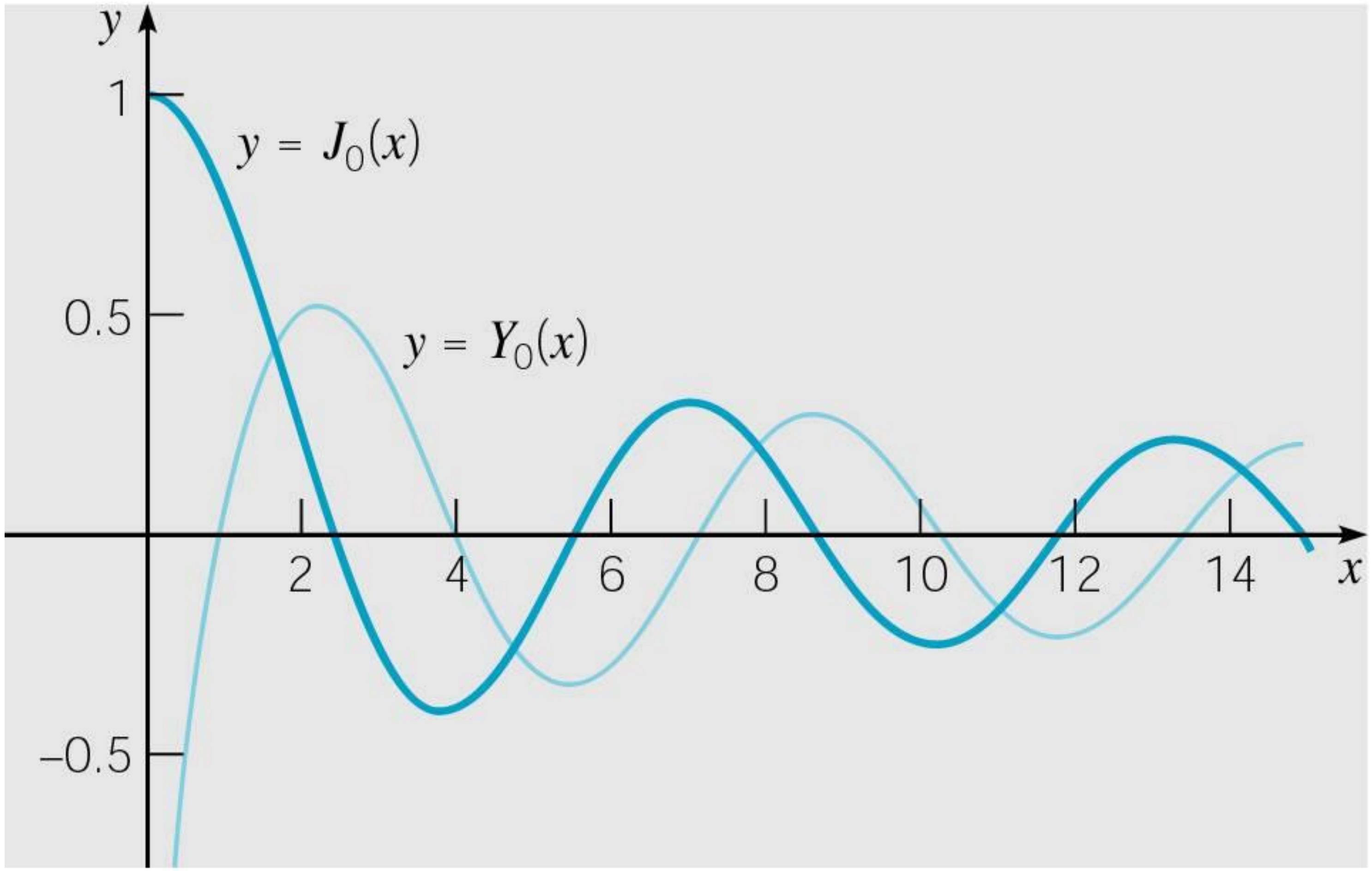
# EQUAÇÃO DE BESSEL

## SOLUÇÃO GERAL

Os gráficos das funções $J_0(x)$ e $Y_0(x)$ estão ilustrados na figura abaixo

O comportamento de $J_0$ e $Y_0$ quando x é grande parece ser similar ao das funções seno e cosseno, exceto pelo fato de que as amplitudes das oscilações decaem para zero quando x tende a infinito.

Este fato era de ser esperado pelo seguinte:



# EQUAÇÃO DE BESSEL

## SOLUÇÃO GERAL

Se tomamos a ODE original, podemos reescrever ela da seguinte forma:

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - v^2)y = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad y'' + \frac{1}{x}y' + \left(1 - \frac{v^2}{x^2}\right)y = 0$$

e quando x é muito grande ficaríamos com os termos: $y'' + y = 0$

que tem senos e cossenos como soluções...

Se desejam saber mais detalhes de como estas funções se comportam quando $x \rightarrow \infty$, é possível mostrar (o que não será feito aqui) que as aproximações assintóticas de $J_0$ e $Y_0$ quando $x \rightarrow \infty$ são:

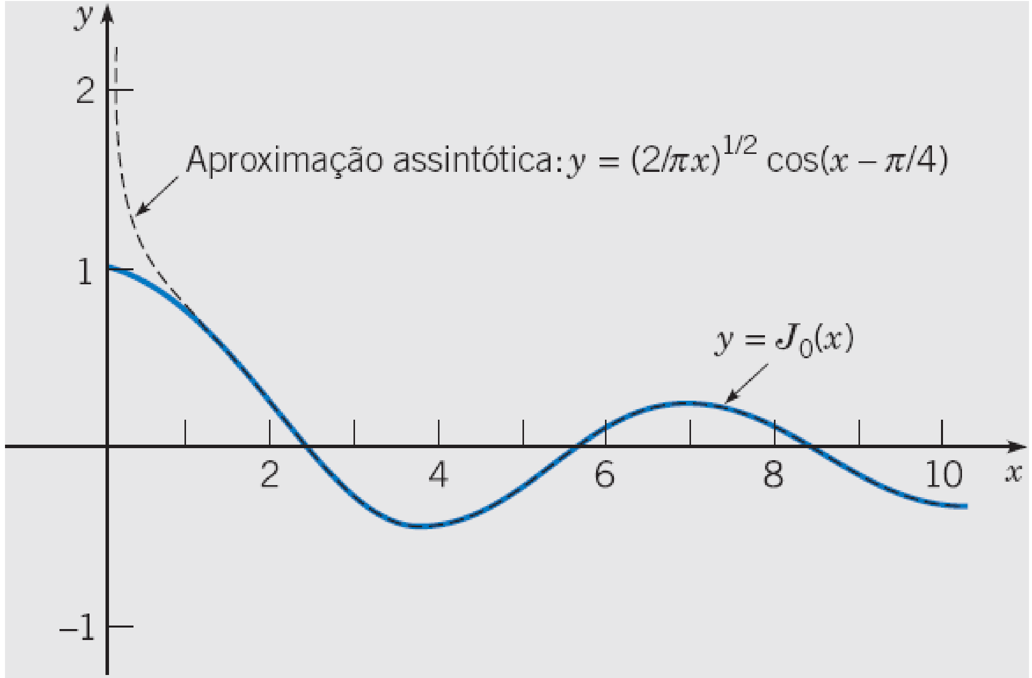
$$J_0(x) \cong \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{\frac{1}{2}} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \text{ para } x \rightarrow \infty \qquad Y_0(x) \cong \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{\frac{1}{2}} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \text{ para } x \rightarrow \infty$$

# EQUAÇÃO DE BESSEL

## SOLUÇÃO GERAL

Essas aproximações assintóticas, quando $x \to \infty$, são, de fato, muito boas. Por exemplo, a figura mostra que a aproximação assintótica para $J_0(x)$ é razoavelmente precisa para todo $x \geq 1$. Assim, para aproximar $J_0(x)$ em todo o intervalo de zero a infinito, podem ser usados dois ou três termos da série que define $J_0$ para $x \leq 1$ e a aproximação assintótica do slide anterior para $x \geq 1$.

Veja o slide 8 para entender o que aconteceria se ficasse só com os dois ou três termos da série que define $J_0$ para $x \leq 1$




Vamos ver agora a função de Bessel de ordem ½

UFPR UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

## EQUAÇÃO DE BESSEL DE ORDEM ½

Esse caso ilustra a situação na qual as raízes da equação indicial diferem por um inteiro positivo, mas a segunda solução não tem termo logarítmico, vamos ver...

Fazendo ν=1/2 na Equação de Bessel obtemos

$$L[y] = x^2 y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{4}\right) y = 0$$

Novamente, procuramos a solução na forma

$$y(x) = \varphi(r, x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n} \qquad \text{com} \quad a_0 \neq 0 \qquad\qquad x > 0$$

Substituindo esta solução na equação diferencial encontramos:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (r+n)(r+n-1) x^{r+n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (r+n) x^{r+n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n+2} - \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n} = 0$$

UFPR UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

## EQUAÇÃO DE BESSEL DE ORDEM ½

Essa última expressão pode ser reescrita (reagrupando termos) da forma:

$$\left(r^2-\frac{1}{4}\right)a_0x^r+\left[(r+1)^2-\frac{1}{4}\right]a_1x^{r+1}+\sum_{n=2}^{\infty}\left\{\left[(r+n)^2-\frac{1}{4}\right]a_n+a_{n-2}\right\}x^{r+n}=0$$

As raízes da equação indicial $r_1$= ½ e $r_2$=-½ (que diferem por um positivo inteiro!)

A relação de recorrência é: $$a_n(r)=-\frac{a_{n-2}(r)}{(r+n)^2-\frac{1}{4}} \qquad n=2,3,\ldots$$

Começamos pela maior raiz $r_1$= ½. Vemos imediatamente que $a_1 = 0$ (e $a_0$ é arbitrário, qualquer um). Logo, $a_3 = a_5 = \ldots = a_{2n+1} = \ldots = 0$

Assim, para os coeficientes pares obtemos:

$$a_{2m}=-\frac{a_{2m-2}}{\left(\frac{1}{2}+2m\right)^2-\frac{1}{4}}=-\frac{a_{2m-2}}{2m(2m+1)} \qquad m=1,2,\ldots$$

# EQUAÇÃO DE BESSEL

## EQUAÇÃO DE BESSEL DE ORDEM ½

$$a_{2m} = -\frac{a_{2m-2}}{2m(2m+1)} \qquad m = 1, 2, 3, \dots$$

Portanto teremos:

$$a_2 = -\frac{a_0}{3!} \qquad a_4 = -\frac{a_2}{5 \cdot 4} = \frac{a_0}{5!} \qquad \dots$$

De forma, que em função de $a_0$ fica: $$a_{2m} = \frac{(-1)^m a_0}{(2m+1)!} \qquad m = 1, 2, 3, \dots$$

Assim, a primeira solução da equação de Bessel de ordem ½, considerando $a_0$=1

$$y_1(x) = x^{1/2}\left[1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} x^{2m}\right] = x^{-1/2}\left[\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m+1)!} x^{2m+1}\right] = x^{-1/2} \sin x$$

Em que x>0 e foi considerado que a série de potências nesta solução é precisamente a série de Taylor para sen x.

## EQUAÇÃO DE BESSEL DE ORDEM ½

$$y_1(x) = x^{-1/2}\sin x$$

A partir desta solução é definida a função de Bessel de primeira espécie de ordem meio, $J_{½}$ como:

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{1}{2}} y_1(x) = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{\frac{1}{2}} \sin x \qquad x > 0$$

Vamos agora obter a segunda solução, considerando agora $r_2 = -½$

Sabemos que:

$$\left(r^2 - \frac{1}{4}\right) a_0 x^r + \left[(r+1)^2 - \frac{1}{4}\right] a_1 x^{r+1} + \sum_{n=2}^{\infty} \left\{\left[(r+n)^2 - \frac{1}{4}\right] a_n + a_{n-2}\right\} x^{r+n} = 0$$

com $r_2 = -½$ vemos que $a_1$ e $a_0$ são agora arbitrários (pois os parêntesis se anulam)

Da relação de recorrência obtemos um conjunto de coeficientes com índices pares correspondendo a $a_0$ e um conjunto de coeficientes com índices ímpares correspondendo a $a_1$ (que são independentes entre si). Então, neste caso, não é necessário um termo logarítmico para obter a segunda solução.

UFPR UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

## EQUAÇÃO DE BESSEL DE ORDEM ½

Desenvolvendo as expressões como já fizemos várias vezes se obtém para os coeficientes pares (considerando $r_2 = -½$)

$$a_{2m} = -\frac{a_{2m-2}}{\left(-\frac{1}{2}+2m\right)^2 - \frac{1}{4}} = -\frac{a_{2m-2}}{2m(2m-1)} \qquad m = 1, 2, \ldots$$

Portanto temos: $a_2 = -\frac{a_0}{2!} \qquad a_4 = -\frac{a_2}{4\cdot 3} = \frac{a_0}{4!} \quad \ldots$

E a expressão geral em função de $a_0$ fica: $a_{2m} = \frac{(-1)^m a_0}{(2m)!} \qquad m = 1, 2, \ldots$

Da mesma forma, se pode obter para os coeficientes impares (verifique): $a_{2m+1} = \frac{(-1)^m a_1}{(2m+1)!} \qquad m = 1, 2, \ldots$

Finalmente podemos escrever a segunda solução como:

# EQUAÇÃO DE BESSEL

## EQUAÇÃO DE BESSEL DE ORDEM ½

$$y_2(x) = x^{-\frac{1}{2}}\left[a_0 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m}}{(2m)!} + a_1 \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m x^{2m+1}}{(2m+1)!}\right] = x^{-\frac{1}{2}}[a_0 \cos x + a_1 \sin x] \qquad x > 0$$

A constante $a_1$ simplesmente introduz um múltiplo de $y_1(x)$ na segunda solução. Por conveniência, a segunda solução da equação de Bessel de ordem meio é escolhida, em geral, como a solução $y_2$ para a qual $a_0 = (2/\pi)^{½}$ e $a_1 = 0$.

Ela é denominada por $J_{-½}$

$$J_{-\frac{1}{2}}(x) = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{\frac{1}{2}} \cos x \qquad x > 0$$

Com estas definições, finalmente a solução geral da equação de Bessel de ordem ½ é:

$$y(x) = c_1 J_{1/2}(x) + c_2 J_{-1/2}(x)$$

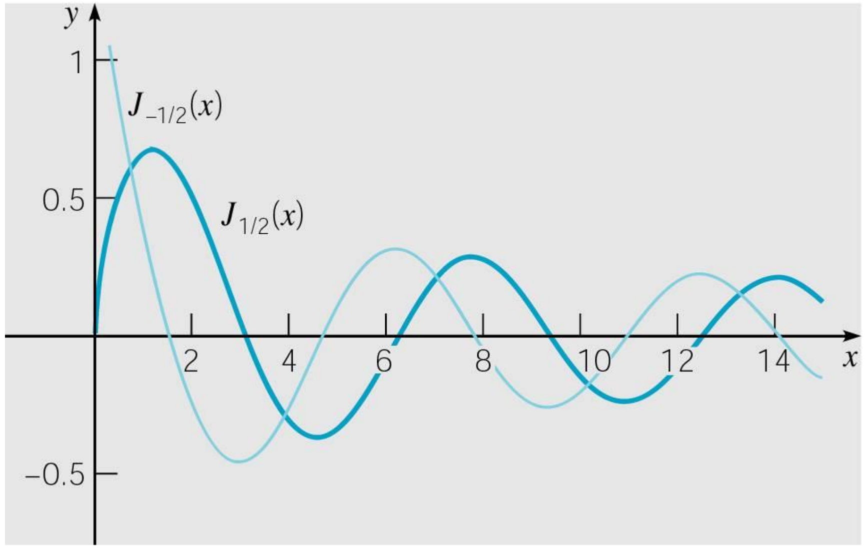
# EQUAÇÃO DE BESSEL

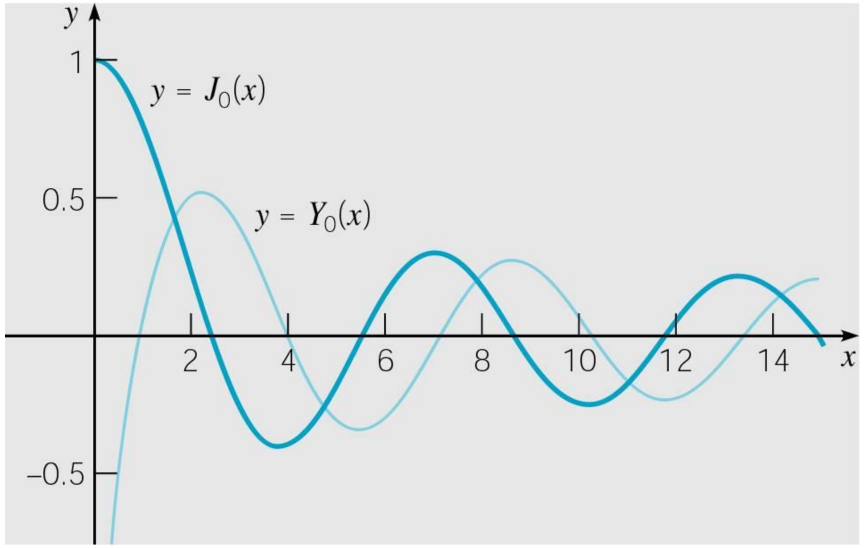
## EQUAÇÃO DE BESSEL DE ORDEM ½

Vejamos os gráficos destas funções $J_{-½}$ e $J_{-½}$ e comparemos com os gráficos das funções já obtidas $J_0$ e $Y_0$ para a aproximação de grandes valores de x

$$J_{-\frac{1}{2}}(x) = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{\frac{1}{2}} \cos x \qquad J_{\frac{1}{2}}(x) = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{\frac{1}{2}} \sin x$$

$$J_0(x) \cong \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{\frac{1}{2}} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \qquad Y_0(x) \cong \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{\frac{1}{2}} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \text{ para } x \to \infty$$




A diferença entre elas é simplesmente um deslocamento de fase de $\pi/4$

## EQUAÇÃO DE BESSEL DE ORDEM 1

Esse caso vai ilustrar a situação na qual as raízes da equação indicial diferem por um inteiro positivo e a segunda solução sim envolve um termo logarítmico. Fazendo ν=1 na Equação de Bessel (do slide 3) obtemos

$$L[y] = x^2y'' + xy' + (x^2 - 1)y = 0$$

Substituindo y pela série abaixo (e suas derivadas, que assumimos como sendo solução desta equação)

$$y(x) = \varphi(r,x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n} \qquad \text{com } a_0 \neq 0 \qquad x > 0$$

obtemos:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(r+n)(r+n-1)x^{r+n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n(r+n)x^{r+n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n+2} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n} = 0$$

UFPR
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

## EQUAÇÃO DE BESSEL DE ORDEM 1

Agrupando termos, essa expressão pode ser reescrita como:

$$(r^2-1)a_0x^r+[(r+1)^2-1]a_1x^{r+1}+\sum_{n=2}^{\infty}\{[(r+n)^2-1]a_n+a_{n-2}\}\,x^{r+n}=0$$

As raízes da equação indicial são $r_1$ = 1 e $r_2$ = –1. A relação de recorrência é

$$a_n(r)=-\frac{a_{n-2}(r)}{(r+n)^2-1}\qquad n=2,3,\ldots$$

Correspondendo à raiz maior r = 1, a relação de recorrência fica

$$a_n(r)=-\frac{a_{n-2}(1)}{(n+2)n}\qquad n=2,3,\ldots$$

Evidentemente como $a_1$ tem que ser zero, temos que $a_3 = a_5 = \ldots = 0$ e para os termos pares fica (começando por $a_0$)...

# EQUAÇÃO DE BESSEL

## EQUAÇÃO DE BESSEL DE ORDEM 1

$$a_n(r) = -\frac{a_{n-2}(r)}{(n+2)n} \qquad n = 2, 3, \ldots$$

Para os termos pares (n=2m) fica:

$$a_{2m} = -\frac{a_{2m-2}}{(2m+2)\,(2m)} = -\frac{a_{2m-2}}{2^2(m+1)m} \qquad m = 1, 2, \ldots$$

Ou seja teremos: $a_2 = -\frac{a_0}{2^2 \cdot 2 \cdot 1}$ $\qquad a_4 = -\frac{a_2}{2^2 \cdot 3 \cdot 2} = \frac{a_0}{2^4 3!\, 2!}$ $\qquad \ldots$

e

$$a_{2m} = \frac{(-1)^m a_0}{2^{2m}(m+1)!\, m!} \qquad m = 1, 2, \ldots$$

Desta forma a primeira solução é:

$$y_1(x) = a_0 x\left[1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2^{2m}(m+1)!\, m!} x^{2m}\right] \qquad x > 0$$

## EQUAÇÃO DE BESSEL DE ORDEM 1

$$y_1(x) = a_0 x\left[1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2^{2m}(m+1)!\,m!} x^{2m}\right]$$

A função de Bessel de primeira espécie de ordem um, denotada por $J_1$, é obtida escolhendo-se $a_0 = ½$

$$J_1(x) = \frac{x}{2}\left[\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2^{2m}(m+1)!\,m!} x^{2m}\right] \qquad x > 0$$

A série acima converge absolutamente para todo x (aplique o método para verificar a convergência absoluta e verifique), de modo que $J_1$ é analítica em toda parte.

Agora precisamos encontrar a segunda solução para r=-1...que, segundo o teorema da aula 05_6 tem a forma:

# EQUAÇÃO DE BESSEL

## EQUAÇÃO DE BESSEL DE ORDEM 1

Para o caso em que $r_2=-1$ a solução garantida (pelo teorema da aula 05_6) tem a forma:

$$y_2(x) = aJ_1(x)\ln x + x^{-1}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n\, x^n\right] \qquad x > 0$$

O cálculo do termo geral $c_n$ dessa série acima é bastante complicado, mas os primeiros coeficientes podem ser encontrados facilmente.

Para isso, procedemos como sempre, substituímos essa expressão acima na ODE deslocamos os índices, etc...e obtemos a relação de recorrência (utilizando o fato de que $J_1(x)$ é uma solução de $L[y] = x^2y'' + xy' + (x^2-1)y = 0$) que é:

$$2axJ_1'(x) + \sum_{n=0}^{\infty}[(n-1)(n-2)c_n + (n-1)c_n - c_n]x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n\, x^{n+1} = 0$$

Em que (por conveniência) $c_0=1$, agora temos que substituir $J_1(x)$ pela sua série...

UFPR UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

## EQUAÇÃO DE BESSEL DE ORDEM 1

Substituindo $J_1(x)$ por sua expressão (slide 28), mudando os índices dos somatórios nas duas séries e efetuando diversos cálculos algébricos, chegamos a

$$-c_1 + [0 \cdot c_2 + c_0]x + \sum_{n=2}^{\infty} [(n^2 - 1)c_{n+1} + c_{n-1}]x^n = -a\left[x + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m (2m+1) x^{2m+1}}{2^{2m}(m+1)!\, m!}\right]$$

Notamos primeiro que $c_1 = 0$ (pela igualdade para $x^0$) e $a = -c_0 = -1$.
Além disso, como a expressão à direita do sinal de igualdade contém apenas potências ímpares de x, o coeficiente de cada potência par de x na expressão à esquerda do sinal de igualdade tem que ser nulo o que significa que:
como $c_1 = 0$, e ele determina os próximos, temos $c_3 = c_5 = . . . = 0$.
No caso das potências ímpares de x, obtemos a relação de recorrência a seguir (faça n = 2m + 1 na série à esquerda do sinal de igualdade na equação acima)...

## EQUAÇÃO DE BESSEL DE ORDEM 1

Substituindo n = 2m + 1 na série à esquerda do sinal de igualdade obtemos:

$$[(2m+1)^2-1]c_{2m+2}+c_{2m}=\frac{(-1)^m(2m+1)}{2^{2m}(m+1)!\,m!} \qquad m=1,2,\ldots$$

Fazendo m=1 obtemos: $$[3^2-1]c_4+c_2=\frac{-1\,(3)}{2^2(2)!}$$

Nesta expressão $c_2$ é arbitrário (o motivo é que este coeficiente só gera um múltiplo de $J_1$ na solução, pois todos os coeficientes pares da relação de recorrência acima são zero e os impares correspondem a $J_1$ (pois vem da igualdade) e como todos os coeficientes impares serão relacionados ao primeiro deles, que é $c_2$, ele sai da somatória e fica como um múltiplo), assim, $c_2$ é aleatório. Logo ele determina $c_4$ e assim por diante (mas paramos em $c_4$)

# EQUAÇÃO DE BESSEL

## EQUAÇÃO DE BESSEL DE ORDEM 1

Note também que no coeficiente de x em

$$-c_1 + [0 \cdot c_2 + c_0]x + \sum_{n=2}^{\infty}[(n^2-1)c_{n+1} + c_{n-1}]x^n = -a\left[x + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^m(2m+1)x^{2m+1}}{2^{2m}(m+1)!\,m!}\right]$$

$c_2$ aparece multiplicado por 0, e essa equação foi usada para determinar "a" ($a = -c_0$). Mais um motivo para ele poder ser aleatório.

O coeficiente $c_2$ é arbitrário pois $c_2$ é o primeiro coeficiente (o coeficiente de $x^1$) na expressão da solução $y_2$ do slide 29

$$x^{-1}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n x^n\right]$$

Em consequência, todos os outros coeficientes serão relacionados a ele, assim $c_2$ gera, simplesmente, um múltiplo de $J_1$ e como $y_2$ inclui todos os múltiplos de $J_1$ (em outras palavras, $y_2$ está determinada a menos de um múltiplo de $J_1$) portanto podemos utilizar qualquer $c_2$ na solução.

# EQUAÇÃO DE BESSEL

## EQUAÇÃO DE BESSEL DE ORDEM 1

Retornando a nossa expressão com m=1 para $c_4$:

$$[3^2 - 1]c_4 + c_2 = \frac{-1\,(3)}{2^2(2)!}$$

Com $c_2$ = 1/4 obtemos

$$c_4 = \frac{\frac{-1\,(3)}{2^2(2)!} - c_2}{[3^2 - 1]} = \frac{-1\,(3)}{2^3 2^2(2)!} - \frac{c_2}{2^3} = \frac{-1}{2^4(2)!}\left[\left(1 + \frac{1}{2}\right) + 1\right]$$

Definindo $H_m$ obtemos

$$c_4 \equiv \frac{-1}{2^4(2)!}[H_2 + H_1] \qquad H_m \equiv \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2m}$$

É possível mostrar que a solução da relação de recorrência ($m \geq 1$ e com $H_0 \equiv 0$) é:

$$c_{2m} \equiv \frac{(-1)^{m+1}[H_m + H_{m-1}]}{2^{2m} m!\,(m-1)!}$$

De forma que agora podemos escrever  a segunda solução...

## EQUAÇÃO DE BESSEL DE ORDEM 1

Assim:

$$y_2(x) = -J_1(x)\ln x + x^{-1}\left[1 - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m (H_m + H_{m-1})}{2^{2m} m!\,(m-1)!} x^{2m}\right] \qquad x > 0$$

O cálculo desta $y_2(x)$ usando outro procedimento (veja o slide 25 da aula 05_6) no qual determinamos $c_n(r_2)$ é ligeiramente mais fácil. Em particular, aquele procedimento da aula 05_6 fornece uma fórmula geral para $c_{2m}$ sem a necessidade de resolver uma relação de recorrência da forma do slide 31 desta aula (o Problema 10 a seguir solicitará a você fazer isso).

Nesse sentido, você pode querer, também, comparar os cálculos da segunda solução da equação de Bessel de ordem zero da aula e a apresentada no Problema 9 a seguir.

## EQUAÇÃO DE BESSEL DE ORDEM 1

Em geral, por conveniência, a função $y_2$ não é utilizada como a segunda solução da equação de Bessel de ordem 1. No seu lugar é utilizada a chamada função de Bessel de segunda espécie de ordem um $Y_1$, que é escolhida, como uma determinada combinação linear de $J_1$ e $y_2$ a seguir:

$$Y_1(x) \equiv \frac{2}{\pi}[-y_2(x) + (\gamma - \ln 2)J_1(x)] \qquad x > 0$$

em que γ é a constante de Euler-Mascheroni que já vimos.
Assim, a solução geral para x > 0 é

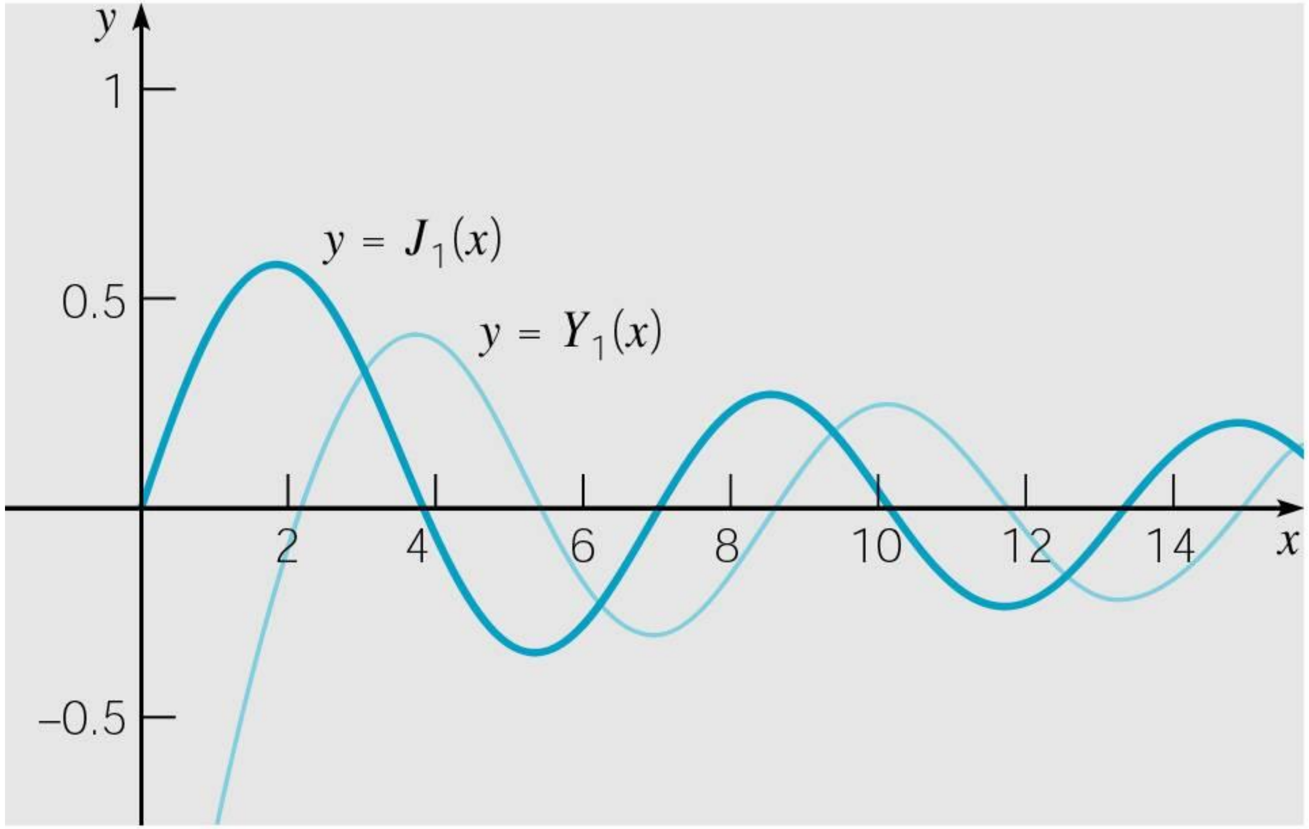
$$y(x) = c_1 J_1(x) + c_2 Y_1(x) \qquad x > 0$$

Para finalizar só resta ver o gráfico desta função...

## EQUAÇÃO DE BESSEL DE ORDEM 1

$$J_1(x) \equiv \frac{x}{2}\left[\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{2^{2m}(m+1)!\,m!} x^{2m}\right] \quad x > 0$$

$$Y_1(x) \equiv \frac{2}{\pi}[-y_2(x) + (\gamma - \ln 2)J_1(x)] \quad x > 0$$




Note que, enquanto $J_1$ é analítica em x = 0, a segunda solução $Y_1$ torna-se ilimitada do mesmo modo que 1/x quando $x \to 0$

# EQUAÇÃO DE BESSEL

**Lista de exercícios disponível em:**

**http://www.eletrica.ufpr.br/p/professores:patricio:inicial**

**Disciplina TE315 (Equações Diferenciais para Engenharia Elétrica)**

**Gabaritos disponíveis no mesmo endereço**