LISTA 05_6 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS
Soluções em Série Perto de um Ponto Singular Regular. Parte II
Respostas no final
Gabaritos na página do professor

Em cada um dos problemas de 1 a 12:

(a) Encontre todos os pontos singulares regulares da equação diferencial dada.

(b) Determine a equação indicial e os expoentes na singularidade para cada ponto singular regular.

1. $xy'' + 2xy' + 6e^x y = 0$
2. $x^2 y'' - x(2+x)y' + (2+x^2)y = 0$
3. $x(x-1)y'' + 6x^2 y' + 3y = 0$
4. $y'' + 4xy' + 6y = 0$
5. $x^2 y'' + 3(\text{sen}\, x)y' - 2y = 0$
6. $2x(x+2)y'' + y' - xy = 0$
7. $x^2 y'' + \frac{1}{2}(x + \text{sen}\, x)y' + y = 0$
8. $(x+1)^2 y'' + 3(x^2-1)y' + 3y = 0$
9. $x^2(1-x)y'' - (1+x)y + 2xy = 0$
10. $(x-2)^2(x+2)y'' + 2xy' + 3(x-2)y = 0$
11. $(4-x^2)y'' + 2xy + 3y = 0$
12. $x(x+3)^2 y'' - 2(x+3)y' - xy = 0$

Em cada um dos problemas de 13 a 17:

(a) Mostre que x = 0 é um ponto singular regular da equação diferencial dada.

(b) Encontre os expoentes no ponto singular x = 0.

(c) Encontre os três primeiros termos não nulos em cada uma das duas soluções (que não são múltiplas uma da outra) em torno de x = 0.

13. $xy'' + y' - y = 0$

14. $xy'' + 2xy' + 6e^x y = 0$; veja o Problema 1

15. $x(x-1)y'' + 6x^2 y' + 3y = 0$; veja o Problema 3

16. $xy'' + y = 0$

17. $x^2 y'' + (\text{sen}\, x)y' - (\cos x)y = 0$

18. (a) Mostre que $(\ln x)\, y'' + \frac{1}{2} y' + y = 0$ tem um ponto singular regular em x = 1.

(b) Determine as raízes da equação indicial em x = 1.

(c) Determine os três primeiros termos não nulos na série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^{r+n}$ correspondente à raiz maior. Considere (x – 1) > 0.

(d) Qual o valor que você esperaria para o raio de convergência da série ?

19. Em diversos problemas em física matemática, é necessário estudar a equação diferencial

$$x(1-x)y'' + [\gamma - (1 + \alpha + \beta)x]y' - \alpha\beta y = 0,$$

em que α, β e γ são constantes. Essa equação é conhecida como equação hipergeométrica.

(a) Mostre que x = 0 é um ponto singular regular e que as raízes da equação indicial são 0 e (1 – γ).

(b) Mostre que x = 1 é um ponto singular regular e que as raízes da equação indicial são 0 e (γ – α – β).

(c) Supondo que (1 – γ) não é um inteiro positivo, mostre que uma solução da equação em uma vizinhança de x = 0 é

$$y_1(x) = 1 + \frac{\alpha\beta}{\gamma \cdot 1!}x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)2!}x^2 + \cdots.$$

Qual o valor que você esperaria para o raio de convergência dessa série?

(d) Supondo que 1 – γ não é inteiro positivo nem zero, mostre que uma segunda solução para 0 < x < 1 é

$$y_2(x) = x^{1-\gamma}\left[1 + \frac{(\alpha-\gamma+1)(\beta-\gamma+1)}{(2-\gamma)1!}x\right.$$

$$\left. + \frac{(\alpha-\gamma+1)(\alpha-\gamma+2)(\beta-\gamma+1)(\beta-\gamma+2)}{(2-\gamma)(3-\gamma)2!}x^2 + \cdots\right]$$

20. Considere a equação diferencial

$$x^3y'' + \alpha xy' + \beta y = 0$$

em que α e β são constantes reais e $\alpha \neq 0$.

(a) Mostre que $x = 0$ é um ponto singular irregular.

(b) Ao tentar encontrar uma solução da forma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n}$, mostre que a equação indicial para r é linear e, portanto, existe apenas uma solução formal nessa forma proposta.

(c) Mostre que, se $\beta/\alpha = -1, 0, 1, 2, \ldots$, então a solução formal em série termina e é, portanto, uma solução de fato. Para outros valores de β/α, mostre que a solução formal em série tem raio de convergência nulo; logo, não representa uma solução de fato em nenhum intervalo.

21. Considere a equação diferencial

$$y'' + \frac{\alpha}{x^s}y' + \frac{\beta}{x^t}y = 0,$$

em que $\alpha \neq 0$ e $\beta \neq 0$ são números reais, e s e t são inteiros positivos, arbitrários por enquanto.

(a) Mostre que, se $s > 1$ ou $t > 2$, então o ponto $x = 0$ é um ponto singular irregular.

(b) Tente encontrar uma solução da equação da forma

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n}, \qquad x > 0$$

Mostre que, se $s = 2$ e $t = 2$, então existe apenas um valor possível para r para o qual existe uma solução formal da equação com essa forma.

(c) Mostre que, se $s = 1$ e $t = 3$, então não existem soluções da equação nessa forma.

(d) Mostre que os valores máximos de s e de t para os quais a equação indicial é de segundo grau em r (e portanto, podemos esperar encontrar duas soluções nessa acima) são $s = 1$ e $t = 2$. Essas são precisamente as condições que distinguem uma “singularidade fraca”, ou um ponto singular regular, de um ponto singular irregular, como definimos na aula 5.4.

Como aviso, deveríamos esclarecer que, embora seja possível, algumas vezes, obter uma solução formal em série da forma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{r+n}$ em um ponto singular irregular, a série pode não ter raio de convergência positivo. Veja o Problema 20 para um exemplo.

RESPOSTAS

Seção 5.6

1. **(a)** $x = 0$;
   (b) $r(r-1) = 0$; $r_1 = 1$, $r_2 = 0$
2. **(a)** $x = 0$;
   (b) $r^2 - 3r + 2 = 0$; $r_1 = 2$, $r_2 = 1$
3. **(a)** $x = 0$;
   (b) $r(r-1) = 0$; $r_1 = 1$, $r_2 = 0$
   (a) $x = 1$;
   (b) $r(r+5) = 0$; $r_1 = 0$, $r_2 = -5$
4. Não tem ponto singular regular
5. **(a)** $x = 0$;
   (b) $r^2 + 2r - 2 = 0$; $r_1 = -1 + \sqrt{3} \cong 0{,}732$, $r_2 = -1 - \sqrt{3} \cong -2{,}73$
6. **(a)** $x = 0$;
   (b) $r(r - \frac{3}{4}) = 0$; $r_1 = \frac{3}{4}$, $r_2 = 0$
   (a) $x = -2$;
   (b) $r(r - \frac{5}{4}) = 0$; $r_1 = \frac{5}{4}$, $r_2 = 0$
7. **(a)** $x = 0$;
   (b) $r^2 + 1 = 0$; $r_1 = i$, $r_2 = -i$
8. **(a)** $x = -1$;
   (b) $r^2 - 7r + 3 = 0$; $r_1 = (7 + \sqrt{37})/2 \cong 6{,}54$, $r_2 = (7 - \sqrt{37})/2 \cong 0{,}459$
9. **(a)** $x = 1$;
   (b) $r^2 + r = 0$; $r_1 = 0$, $r_2 = -1$
10. **(a)** $x = -2$;
    (b) $r^2 - (5/4)r = 0$; $r_1 = 5/4$, $r_2 = 0$
11. **(a)** $x = 2$;
    (b) $r^2 - 2r = 0$; $r_1 = 2$, $r_2 = 0$
    (a) $x = -2$;
    (b) $r^2 - 2r = 0$; $r_1 = 2$, $r_2 = 0$
12. **(a)** $x = 0$;
    (b) $r^2 - (5/3)r = 0$; $r_1 = 5/3$, $r_2 = 0$
    (a) $x = -3$;
    (b) $r^2 - (r/3) - 1 = 0$; $r_1 = (1 + \sqrt{37})/6 \cong 1{,}18$,
    $r_2 = (1 - \sqrt{37})/6 \cong -0{,}847$

13. **(b)** $r_1 = 0, r_2 = 0$

(c) $y_1(x) = 1 + x + \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{36}x^3 + \cdots$, $y_2(x) = y_1(x)\ln x - 2x - \frac{3}{4}x^2 - \frac{11}{108}x^3 + \cdots$

14. **(b)** $r_1 = 1, r_2 = 0$

(c) $y_1(x) = x - 4x^2 + \frac{17}{3}x^3 - \frac{47}{12}x^4 + \cdots$, $y_2(x) = -6y_1(x)\ln x + 1 - 33x^2 + \frac{449}{6}x^3 + \cdots$

15. **(b)** $r_1 = 1, r_2 = 0$

(c) $y_1(x) = x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{9}{4}x^3 + \frac{51}{16}x^4 + \cdots$, $y_2(x) = 3y_1(x)\ln x + 1 - \frac{21}{4}x^2 - \frac{19}{4}x^3 + \cdots$

16. **(b)** $r_1 = 1, r_2 = 0$

(c) $y_1(x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{12}x^3 - \frac{1}{144}x^4 + \cdots$

$y_2(x) = -y_1(x)\ln x + 1 - \frac{3}{4}x^2 + \frac{7}{36}x^3 - \frac{35}{1728}x^4 + \cdots$

17. **(b)** $r_1 = 1, r_2 = -1$

(c) $y_1(x) = x - \frac{1}{24}x^3 + \frac{1}{720}x^5 + \cdots$, $y_2(x) = -\frac{1}{3}y_1(x)\ln x + x^{-1} - \frac{1}{90}x^3 + \cdots$

18. **(b)** $r_1 = \frac{1}{2},\ r_2 = 0$

(c) $y_1(x) = (x-1)^{1/2}[1 - \frac{3}{4}(x-1) + \frac{53}{480}(x-1)^2 + \cdots]$, **(d)** $\rho = 1$

19. **(c)** *Sugestão:* $(n-1)(n-2) + (1+\lambda+\rho)(n-1) + \lambda\rho = (n-1+\lambda)(n-1+\rho)$