LISTA 05_1 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

Soluções em Série Perto de um Ponto Singular Regular. Parte I

Respostas no final

Gabaritos na página do professor

Em cada um dos problemas de 1 a 10:

(a) Mostre que a equação diferencial dada tem um ponto singular regular em x = 0.

(b) Determine a equação indicial, a relação de recorrência e as raízes da equação indicial.

(c) Encontre a solução em série (x > 0) correspondente à maior raiz.

(d) Se as raízes forem diferentes e não diferirem por um inteiro, encontre também a solução em série correspondente à menor raiz.

1. $2xy'' + y' + xy = 0$
2. $x^2y'' + xy' + \left(x^2 - \frac{1}{9}\right)y = 0$
3. $xy'' + y = 0$
4. $xy'' + y' - y = 0$
5. $3x^2y'' + 2xy' + x^2y = 0$
6. $x^2y'' + xy' + (x - 2)y = 0$
7. $xy'' + (1 - x)y' - y = 0$
8. $2x^2y'' + 3xy' + (2x^2 - 1)y = 0$
9. $x^2y'' - x(x + 3)y' + (x + 3)y = 0$
10. $x^2y'' + \left(x^2 + \frac{1}{4}\right)y = 0$

11. A equação de Legendre de ordem α é

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha+1)y = 0.$$

(A solução dessa equação, perto do ponto ordinário x = 0, foi discutida nos Problemas 22 e 23 da lista de exercícios da aula 5.3. O Exemplo 4 da aula 5.4 mostrou que x = ±1 são pontos singulares regulares)

(a) Determine a equação indicial e suas raízes para o ponto x = 1.

(b) Encontre uma solução em série de potências de (x – 1) para (x – 1) > 0.

Sugestão: Escreva (1 + x) = 2 + (x – 1) e x = 1 + (x – 1). Outra maneira é fazer a mudança de variável (x – 1) = t e determinar uma solução em série de potências de t da forma feita na aula (pois nesse caso o ponto singular é t=0)

12. A equação de Chebyshev é

$$(1 - x^2)y' - xy' + \alpha^2 y = 0$$

em que α é constante; veja o Problema 10 da lista da aula 5.3.

(a) Mostre que x = 1 e x = –1 são pontos singulares regulares, e encontre os expoentes em cada uma dessas singularidades.

(b) Encontre duas soluções em torno de x = 1.

13. A equação diferencial de Laguerre é

$$xy'' + (1 - x)y' + \lambda y = 0.$$

(a) Mostre que x = 0 é um ponto singular regular.

(b) Determine a equação indicial, suas raízes e a relação de recorrência.

(c) Encontre uma solução (x > 0). Mostre que, se λ = m for um inteiro positivo, essa solução se reduzirá a um polinômio. Quando normalizado apropriadamente, esse polinômio é conhecido como o polinômio de Laguerre $L_m(x)$.

14. A equação de Bessel de ordem zero é

$$x^2y'' + xy' + x^2y = 0.$$

(a) Mostre que x = 0 é um ponto singular regular.

(b) Mostre que as raízes da equação indicial são $r_1 = r_2 = 0$.

(c) Mostre que uma solução para x > 0 é

$$J_0(x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n}(n!)^2}.$$

(d) Mostre que a série para $J_0(x)$ converge para todo x. A função J_0 é conhecida como a função de Bessel de primeira espécie de ordem zero.

15. Com referência ao Problema 14, use o método de redução de ordem para mostrar que a segunda solução da equação de Bessel de ordem zero contém um termo logarítmico.

Sugestão: Se $y_2(x) = J_0(x)v(x)$, então

$$y_2(x) = J_0(x) \int \frac{dx}{x[J_0(x)]^2}.$$

Encontre o primeiro termo na expansão em série de $1/[x(J_0(x)]^2$.

16. A equação de Bessel de ordem um é

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - 1)\,y = 0.$$

(a) Mostre que $x = 0$ é um ponto singular regular.

(b) Mostre que as raízes da equação indicial são $r_1 = 1$ e $r_2 = -1$.

(c) Mostre que uma solução para $x > 0$ é

$$J_1(x) = \frac{x}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(n+1)!\,n!\,2^{2n}}.$$

(d) Mostre que a série converge para $J_1(x)$ para todo x. A função J_1 é conhecida como a função de Bessel de primeira espécie de ordem um.

(e) Mostre que é impossível determinar uma segunda solução da forma

$$x^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n, \qquad x > 0.$$

RESPOSTAS

Seção 5.5

1. **(b)** $r(2r-1)=0; \quad a_n = -\dfrac{a_{n-2}}{(n+r)[2(n+r)-1]}; \quad r_1 = \frac{1}{2},\ r_2 = 0$

(c)
$$y_1(x) = x^{1/2}\left[1 - \frac{x^2}{2\cdot 5} + \frac{x^4}{2\cdot 4\cdot 5\cdot 9} - \frac{x^6}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 5\cdot 9\cdot 13} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^n n! 5\cdot 9\cdot 13\cdots(4n+1)} + \cdots\right]$$

(d)
$$y_2(x) = 1 - \frac{x^2}{2\cdot 3} + \frac{x^4}{2\cdot 4\cdot 3\cdot 7} - \frac{x^6}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 3\cdot 7\cdot 11} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^n n! 3\cdot 7\cdot 11\cdots(4n-1)} + \cdots$$

2. **(b)** $r^2 - \frac{1}{9} = 0; \quad a_n = -\dfrac{a_{n-2}}{(n+r)^2 - \frac{1}{9}}; \quad r_1 = \frac{1}{3},\ r_2 = -\frac{1}{3}$

(c)
$$y_1(x) = x^{1/3}\left[1 - \frac{1}{1!(1+\frac{1}{3})}\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{2!(1+\frac{1}{3})(2+\frac{1}{3})}\left(\frac{x}{2}\right)^4 + \cdots + \frac{(-1)^m}{m!(1+\frac{1}{3})(2+\frac{1}{3})\cdots(m+\frac{1}{3})}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m} + \cdots\right]$$

(d)
$$y_2(x) = x^{-1/3}\left[1 - \frac{1}{1!(1-\frac{1}{3})}\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \frac{1}{2!(1-\frac{1}{3})(2-\frac{1}{3})}\left(\frac{x}{2}\right)^4 + \cdots + \frac{(-1)^m}{m!(1-\frac{1}{3})(2-\frac{1}{3})\cdots(m-\frac{1}{3})}\left(\frac{x}{2}\right)^{2m} + \cdots\right]$$

Sugestão: Faça $n = 2m$ na relação de recorrência, $m = 1, 2, 3, \ldots$.

3. **(b)** $r(r-1)=0; \quad a_n = -\dfrac{a_{n-1}}{(n+r)(n+r-1)}; \quad r_1 = 1,\ r_2 = 0$

(c)
$$y_1(x) = x\left[1 - \frac{x}{1!2!} + \frac{x^2}{2!3!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{n!(n+1)!}x^n + \cdots\right]$$

4. **(b)** $r^2 = 0; \quad a_n = \dfrac{a_{n-1}}{(n+r)^2}; \quad r_1 = r_2 = 0$

(c)
$$y_1(x) = 1 + \frac{x}{(1!)^2} + \frac{x^2}{(2!)^2} + \cdots + \frac{x^n}{(n!)^2} + \cdots$$

5. **(b)** $r(3r-1)=0; \quad a_n = -\dfrac{a_{n-2}}{(n+r)[3(n+r)-1]}; \quad r_1 = \frac{1}{3},\ r_2 = 0$

(c)
$$y_1(x) = x^{1/3}\left[1 - \frac{1}{1!7}\left(\frac{x^2}{2}\right) + \frac{1}{2!7\cdot 13}\left(\frac{x^2}{2}\right)^2 + \cdots + \frac{(-1)^m}{m!7\cdot 13\cdots(6m+1)}\left(\frac{x^2}{2}\right)^m + \cdots\right]$$

$$+ \frac{(-1)^m}{m!7 \cdot 13 \cdots (6m+1)} \left(\frac{x^2}{2}\right)^m + \cdots \Bigg]$$

(d)
$$y_2(x) = 1 - \frac{1}{1!5}\left(\frac{x^2}{2}\right) + \frac{1}{2!5 \cdot 11}\left(\frac{x^2}{2}\right)^2 + \cdots + \frac{(-1)^m}{m!5 \cdot 11 \cdots (6m-1)}\left(\frac{x^2}{2}\right)^m + \cdots$$

Sugestão: Faça $n = 2m$ na relação de recorrência, $m = 1, 2, 3, \ldots$.

6. **(b)** $r^2 - 2 = 0; \quad a_n = -\dfrac{a_{n-1}}{(n+r)^2 - 2}; \quad r_1 = \sqrt{2},\ r_2 = -\sqrt{2}$

(c)
$$y_1(x) = x^{\sqrt{2}} \left[1 - \frac{x}{1(1+2\sqrt{2})} + \frac{x^2}{2!(1+2\sqrt{2})(2+2\sqrt{2})} + \cdots \right.$$
$$\left. + \frac{(-1)^n}{n!(1+2\sqrt{2})(2+2\sqrt{2})\cdots(n+2\sqrt{2})} x^n + \cdots \right]$$

(d)
$$y_2(x) = x^{-\sqrt{2}} \left[1 - \frac{x}{1(1-2\sqrt{2})} + \frac{x^2}{2!(1-2\sqrt{2})(2-2\sqrt{2})} + \cdots \right.$$
$$\left. + \frac{(-1)^n}{n!(1-2\sqrt{2})(2-2\sqrt{2})\cdots(n-2\sqrt{2})} x^n + \cdots \right]$$

7. **(b)** $r^2 = 0; \quad (n+r)a_n = a_n{-}1; \quad r_1 = r_2 = 0$

(c)
$$y_1(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots = e^x$$

8. **(b)** $2r^2 + r - 1 = 0; \quad (2n + 2r - 1)(n + r + 1)a_n + 2a_{n-2} = 0;$

$r_1 = \frac{1}{2},\ r_2 = -1$

(c)
$$y_1(x) = x^{1/2}\left(1 - \frac{x^2}{7} + \frac{x^4}{2!7 \cdot 11} - \cdots + \frac{(-1)^m x^{2m}}{m!7 \cdot 11 \cdots (4m+3)} + \cdots\right)$$

(d)
$$y_2(x) = x^{-1}\left(1 - x^2 + \frac{x^4}{2!5} - \cdots + \frac{(-1)^m x^{2m}}{m!5 \cdot 9 \cdots (4m-3)} + \cdots\right)$$

9. **(b)** $r^2 - 4r + 3 = 0$; $(n + r - 3)(n + r - 1)a_n - (n + r - 2)a_n{-}1 = 0$; $r_1 = 3$, $r_2 = 1$

(c)
$$y_1(x) = x^3\left(1 + \frac{2}{3}x + \frac{x^2}{4} + \cdots + \frac{2x^n}{n!(n+2)} + \cdots\right)$$

10. **(b)** $r^2 - r + \frac{1}{4} = 0; \quad (n + r - \frac{1}{2})^2 a_n + a_{n-2} = 0; \quad r_1 = r_2 = 1/2$

(c)
$$y_1(x) = x^{1/2}\left(1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^2 4^2} - \cdots + \frac{(-1)^m x^{2m}}{2^{2m}(m!)^2} + \cdots\right)$$

11. **(a)** $r^2 = 0$; $r_1 = 0$, $r_2 = 0$

(b)
$$y_1(x) = 1 + \frac{\alpha(\alpha+1)}{2 \cdot 1^2}(x-1) - \frac{\alpha(\alpha+1)[1 \cdot 2 - \alpha(\alpha+1)]}{(2 \cdot 1^2)(2 \cdot 2^2)}(x-1)^2 + \cdots$$
$$+ (-1)^{n+1}\frac{\alpha(\alpha+1)[1 \cdot 2 - \alpha(\alpha+1)]\cdots[n(n-1) - \alpha(\alpha+1)]}{2^n(n!)^2}(x-1)^n$$
$$+ \cdots$$

12. **(a)** $r_1 = \frac{1}{2},\ r_2 = 0$ em $x = \pm 1$

(b) $y_1(x) = |x-1|^{1/2}$

$$\times \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n(1+2\alpha)\cdots(2n-1+2\alpha)(1-2\alpha)\cdots(2n-1-2\alpha)}{2^n(2n+1)!}(x-1)^n\right]$$

$y_2(x) = 1$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n\alpha(1+\alpha)\cdots(n-1+\alpha)(-\alpha)(1-\alpha)\cdots(n-1-\alpha)}{n!1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)}(x-1)^n$$

13.

(b) $r^2 = 0; \quad r_1 = 0, \quad r_2 = 0; \quad a_n = \dfrac{(n-1-\lambda)a_{n-1}}{n^2}$

(c) $$y_1(x) = 1 + \frac{-\lambda}{(1!)^2}x + \frac{(-\lambda)(1-\lambda)}{(2!)^2}x^2 + \cdots + \frac{(-\lambda)(1-\lambda)\cdots(n-1-\lambda)}{(n!)^2}x^n$$

$$+ \cdots$$

Para $\lambda = n$, os coeficientes de todos os termos depois de x^n são nulos.

16. (e) $[(n-1)^2 - 1]b_n = -b_{n-2}$ e é impossível determinar b_2.