LISTA 05_4 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS
Equação de Euler. Pontos singulares regulares
Respostas no final
Gabaritos na página do professor

Em cada um dos problemas de 1 a 12, determine a solução geral da equação diferencial dada, válida em qualquer intervalo que não inclui o ponto singular.

1. $x^2y'' + 4xy' + 2y = 0$
2. $(x + 1)^2y'' + 3(x + 1)y' + 0{,}75y = 0$
3. $x^2y'' - 3xy' + 4y = 0$
4. $x^2y'' + 3xy' + 5y = 0$
5. $x^2y'' - xy' + y = 0$
6. $(x - 1)^2y'' + 8(x - 1)y' + 12y = 0$
7. $x^2y'' + 6xy' - y = 2.$
8. $2x^2y'' - 4xy' + 6y = 0$
9. $x^2y'' - 5xy' + 9y = 0$
10. $(x - 2)^2y'' + 5(x - 2)y' + 8y = 0$
11. $x^2y'' + 2xy' + 4y = 0$
12. $x^2y'' - 4xy' + 4y' = 0$

Em cada um dos problemas de 13 a 16, encontre a solução do problema de valor inicial dado. Faça o gráfico da solução e descreva como ela se comporta quando x $\to$ 0.

13. $2x^2y'' + xy' - 3y = 0, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 4$

14. $4x^2y'' + 8xy' + 17y = 0, \quad y(1) = 2, \quad y'(1) = -3$

15. $x^2y'' - 3xy' + 4y = 0, \quad y(-1) = 2, \quad y'(-1) = 3$

16. $x^2y'' + 3xy' + 5y = 0, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = -1$

Em cada um dos problemas de 17 a 34, encontre todos os pontos singulares da equação dada e determine se cada um deles é regular ou irregular.

17. $xy'' + (1 - x)y' + xy = 0$
18. $x^2(1 - x)^2y'' + 2xy' + 4y = 0$
19. $x^2(1 - x)y'' + (x - 2)y' - 3xy = 0$
20. $x^2(1 - x^2)y'' + (2/x)y' + 4y = 0$
21. $(1 - x^2)^2y'' + x(1 - x)y' + (1 + x)y = 0$
22. $x^2y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0,$ equação de Bessel
23. $(x + 3)y'' - 2xy' + (1 - x^2)y = 0$
24. $x(1 - x^2)^3y'' + (1 - x^2)^2y' + 2(1 + x)y = 0$
25. $(x + 2)^2(x - 1)y'' + 3(x - 1)y' - 2(x + 2)y = 0$
26. $x(3 - x)y'' + (x + 1)y' - 2y = 0$
27. $(x^2 + x - 2)y'' + (x + 1)y' + 2y = 0$
28. $xy'' + e^xy' + (3\cos x)y = 0$
29. $y'' + (\text{In}\,|x|)y' + 3xy = 0$
30. $x^2y'' + 2(e^x - 1)y' + (e^{-x}\cos x)y = 0$
31. $x^2y'' - 3(\text{sen}\,x)y' + (1 + x^2)y = 0$
32. $xy'' + y' + (\cot x)y = 0$
33. $(\text{sen}\,x)y'' + xy' + 4y = 0$
34. $(x\,\text{sen}\,x)y'' + 3y' + xy = 0$

35. Encontre todos os valores de α para os quais todas as soluções de $x^2y'' + \alpha xy' + (5/2)y = 0$ tendem a zero quando $x \to 0$.

36. Encontre todos os valores de β para os quais todas as soluções de $x^2y'' + \beta y = 0$ tendem a zero quando $x \to 0$.

37. Encontre γ, de modo que a solução do problema de valor inicial $x^2y'' - 2y = 0$, $y(1) = 1$, $y'(1) = \gamma$ permaneça limitada quando $x \to 0$.

38. Encontre todos os valores de α para os quais todas as soluções de $x^2y'' + \alpha xy' + (5/2)y = 0$ tendem a zero quando $x \to \infty$.

39. Considere a equação de Euler $x^2y'' + \alpha xy' + \beta y = 0$. Encontre condições sobre α e β para que:

(a) Todas as soluções tendam a zero quando $x \to 0$.

(b) Todas as soluções permaneçam limitadas quando $x \to 0$.

(c) Todas as soluções tendam a zero quando $x \to \infty$.

(d) Todas as soluções permaneçam limitadas quando $x \to \infty$.

(e) Todas as soluções permaneçam limitadas quando $x \to 0$ e quando $x \to \infty$.

40. Usando o método de redução de ordem, mostre que, se r_1 for uma raiz repetida de

$$r(r - 1) + \alpha r + \beta = 0$$

então e x^{r1} e $x^{r1} \ln x$ serão soluções de $x^2y'' + \alpha xy' + \beta y = 0$ para $x > 0$.

Em cada um dos Problemas 41 e 42, mostre que o ponto $x = 0$ é um ponto singular regular. Tente, em cada problema, encontrar soluções da forma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Mostre que (exceto por múltiplos constantes) existe apenas uma solução não nula dessa forma para o Problema 41 e que não existem soluções não nulas dessa forma para o Problema 42. Assim, em nenhum dos casos a solução geral pode ser encontrada desse modo. Isso é típico de equações com pontos singulares.

41. $2xy'' + 3y' + xy = 0$

42. $2x^2y'' + 3xy' - (1 + x)y = 0$

RESPOSTAS

Seção 5.4

1. $y = c_1x^{-1} + c_2x^{-2}$
2. $y = c_1|x + 1|^{-1/2} + c_2|x + 1|^{-3/2}$
3. $y = c_1x^2 + c_2x^2 \ln |x|$
4. $y = c_1x^{-1} \cos(2 \ln |x|) + c_2x^{-1} \operatorname{sen}(2 \ln |x|)$
5. $y = c_1x + c_2x \ln |x|$
6. $y = c_1(x - 1)^{-3} + c_2(x - 1)^{-4}$
7. $y = c_1|x|^{(-5+\sqrt{29})/2} + c_2|x|^{(-5-\sqrt{29})/2}$
8. $y = c_1|x|^{3/2} \cos(\frac{1}{2} \sqrt{3} \ln |x|) + c_2|x|^{3/2} \operatorname{sen}(\frac{1}{2} \sqrt{3} \ln |x|)$
9. $y = c_1x^3 + c_2x^3 \ln |x|$
10. $y = c_1(x - 2)^{-2} \cos(2 \ln |x - 2|) + c_2(x - 2)^{-2} \operatorname{sen}(2 \ln |x - 2|)$
11. $y = c_1|x|^{-1/2} \cos(\frac{1}{2} \sqrt{15} \ln |x|) + c_2|x|^{-1/2} \operatorname{sen}(\frac{1}{2} \sqrt{15} \ln |x|)$
12. $y = c_1x + c_2x^4$
13. $y = 2x^{3/2} - x^{-1}$
14. $y = 2x^{-1/2} \cos(2 \ln x) - x^{-1/2} \operatorname{sen}(2 \ln x)$
15. $y = 2x^2 - 7x^2 \ln |x|$
16. $y = x^{-1} \cos(2 \ln x)$
17. $x = 0$, regular

18. $x = 0$, regular; $x = 1$, irregular

19. $x = 0$, irregular; $x = 1$, regular

20. $x = 0$, irregular; $x = \pm 1$, regular

21. $x = 1$, regular; $x = -1$, irregular

22. $x = 0$, regular

23. $x = -3$, regular

24. $x = 0, -1$, regular; $x = 1$, irregular

25. $x = 1$, regular; $x = -2$, irregular

26. $x = 0, 3$, regular

27. $x = 1, -2$, regular

28. $x = 0$, regular

29. $x = 0$, irregular

30. $x = 0$, regular

31. $x = 0$, regular

32. $x = 0, \pm n\pi$, regular

33. $x = 0, \pm n\pi$, regular

34. $x = 0$, irregular; $x = \pm n\pi$, regular

35. $\alpha < 1$

36. $\beta \to 0$

37. $\gamma = 2$

38. $\alpha > 1$

39. **(a)** $\alpha < 1$ e $\beta > 0$

(b) $\alpha < 1$ e $\beta \geq 0$, ou $\alpha = 1$ e $\beta > 0$

(c) $\alpha > 1$ e $\beta > 0$

(d) $\alpha \to 1$ e $\rho \geq 0$, ou $\alpha = 1$ e $\rho > 0$

(e) $\alpha = 1$ e $\rho \to 0$

41.

$$y = a_0\left(1 - \frac{x^2}{2 \cdot 5} + \frac{x^4}{2 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 9} - \cdots\right)$$