EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARA ENGENHARIA ELÉTRICA

TE 315

Aula 05_4

Equação de Euler

Pontos Singulares Regulares.

EQUAÇÃO DE EULER

INTRODUÇÃO

Nosso problema é resolver equações da forma $$P(x)\frac{d^2y}{dx^2} + Q(x)\frac{dy}{dx} + R(x)y = 0$$

na vizinhança de um ponto singular x_0.

Lembre-se de que, se as funções P, Q e R forem polinômios sem fatores comuns, os pontos singulares da equação acima serão os pontos em que $P(x_0) = 0$.

Equações de Euler. Uma equação diferencial relativamente simples que tem um único ponto singular é a equação de Euler a seguir

$$x^2y'' + \alpha xy' + \beta y = 0$$

em que α e β são constantes reais.

Neste caso, $P(x) = x^2$, de modo que $x = 0$ é o único ponto singular regular; todos os outros são pontos ordinários.

EQUAÇÃO DE EULER

INTRODUÇÃO

$$x^2y'' + \alpha xy' + \beta y = 0$$

Por conveniência, vamos considerar primeiro o intervalo x > 0.

Lembre que $(x^r)' = rx^{r-1}$ e $(x^r)'' = r(r-1)x^{r-2}$. Logo, se supusermos que a equação tem uma solução da forma

$$y = x^r$$

obtemos:

$$\begin{aligned} L[x^r] &= x^2(x^r)'' + \alpha x(x^r)' + \beta x^r \\ &= x^2 r(r-1)x^{r-2} + \alpha x(rx^{r-1}) + \beta x^r \\ &= x^r[r(r-1) + \alpha r + \beta]. \end{aligned}$$

Se r for raiz da equação de segundo grau $F(r) = r(r-1) + \alpha r + \beta = 0$

então $L[x^r]$ será zero e $y = x^r$ será uma solução da equação diferencial original

EQUAÇÃO DE EULER

INTRODUÇÃO

$$x^2y'' + \alpha x y' + \beta y = 0$$

Essas raízes são: $r_1, r_2 = \dfrac{-(\alpha - 1) \pm \sqrt{(\alpha - 1)^2 - 4\beta}}{2}$

e $F(r) = (r - r_1)(r - r_2)$

Como no caso de equações diferenciais lineares de segunda ordem com coeficientes constantes, é necessário considerar separadamente três casos:

1. raízes reais e diferentes
2. raízes reais e iguais
3. raízes complexas conjugadas

De fato, a discussão inteira sobre equações de Euler é semelhante ao tratamento de equações diferenciais lineares de segunda ordem com coeficientes constantes com e^{rx} substituído por x^y.

EQUAÇÃO DE EULER

Caso 1: Raízes reais e distintas

$$x^2y'' + \alpha xy' + \beta y = 0$$

Se F(r) = 0 tem raízes reais r_1 e r_2 com $r_1 \neq r_2$, então $y_1(x) = x^{r_1}$ e $y_2(x) = x^{r_2}$ são soluções da equação diferencial original $x^2y'' + \alpha xy' + \beta y = 0$.
Como o wronskiano

$$W(x^{r_1}, x^{r_2}) = (r_2 - r_1)x^{r_1+r_2-1}$$

não se anula se $r_1 \neq r_2$, segue que a solução geral da equação é:

$$y = c_1x^{r_1} + c_2x^{r_2} \qquad x > 0$$

Se r não for racional ... o que significa x^r?

Nesse caso x^r é definida por $x^r = e^{r\ln x}$

Vejamos um exemplo de raízes reais distintas...

EQUAÇÃO DE EULER

EXEMPLO 1

Resolver: $$2x^2y'' + 3xy' - y = 0 \qquad x > 0$$

Fazendo y = x^r obtemos

$$x^r[2r(r-1) + 3r - 1] = x^r(2r^2 + r - 1) = x^r(2r-1)(r+1) = 0$$

Logo, $r_1 = ½$ e $r_2 = –1$, de modo que a solução geral é

$$y = c_1\sqrt{x} + c_2\frac{1}{x} \qquad x > 0$$

Vejamos agora o caso quando as raízes são iguais...neste caso de fato temos uma única solução na forma x^{r_1} pois a outra é igual...

Caso 2: Raízes reais iguais

Nosso problema aqui é obter a segunda solução...

Podemos obter uma segunda solução pelo método de redução de ordem, mas vamos considerar, para nossa discussão futura, um método alternativo.

Como $r_1 = r_2$ a função F(r) fica: $F(r) = (r - r_1)^2$.

Assim, neste caso, além de $F(r_1) = 0$, temos, também que $F'(r_1) = 0$.

Isso sugere a diferenciação de $L[x^r] = x^2y'' + \alpha xy' + \beta y = 0$ em relação a r e, depois, a atribuição r igual a r_1.

Diferenciando a ODE em relação a r, obtemos

$$\frac{\partial}{\partial r}L[x^r] = \frac{\partial}{\partial r}[x^r F(r)] = \frac{\partial}{\partial r}[x^r (r - r_1)^2] = (r - r_1)^2 x^r \ln(x) + 2(r - r_1)x^r$$

Trocando as ordens de diferenciação em relação a x e em relação a r, obtemos tb:

$$\frac{\partial}{\partial r}L[x^r] = L[\frac{\partial}{\partial r}x^r] = L\,[x^r \ln(x)]$$

EQUAÇÃO DE EULER

Caso 2: Raízes reais iguais

Obtivemos

$$\frac{\partial}{\partial r}L[x^r] = \frac{\partial}{\partial r}[x^r F(r)] = \frac{\partial}{\partial r}[x^r (r-r_1)^2] = (r-r_1)^2 x^r \ln(x) + 2(r-r_1)x^r$$

$$\frac{\partial}{\partial r}L[x^r] = L[\frac{\partial}{\partial r}x^r] = L\,[x^r \ln(x)]$$

Evidentemente que quando r = r_1 a expressão à direita da primeira equação é = 0
Portanto na segunda equação:

$$L\,[x^r \ln(x)] = 0$$

Isso implica que $x^r \ln(x)$ com x>0 é nossa segunda solução!
Vamos verificar calculando o wronskiano de y_1 e y_2

EQUAÇÃO DE EULER

Caso 2: Raízes reais iguais

O wronskiano de y_1 e y_2 é

$$W(x^{r_1}, x^{r_1}\, lnx) = x^{2r_1-1}$$

que não se anula para x>0, então x^{r_1} e x^{r_1} ln(x) formam um conjunto fundamental de soluções para x > 0 e a solução geral é

$$y = (c_1 + c_2\, lnx\,)\, x^{r_1} \qquad\qquad x > 0$$

Vejamos um exemplo...

EQUAÇÃO DE EULER

EXEMPLO 2

Resolver: $$x^2y'' + 5xy' + 4y = 0 \qquad x > 0$$

Fazendo $y = x^r$ obtemos

$$x^r[r(r-1) + 5r + 4\,] = x^r(r^2 + 4r + 4) = 0$$

Logo, $r_1 = r_2 = -2$, de modo que a solução geral é

$$y = (c_1 + c_2\,lnx\,)\,x^{-2} \qquad x > 0$$

Vejamos agora o caso quando as raízes são complexas...

EQUAÇÃO DE EULER

Caso 3: Raízes complexas

Finalmente, suponha que as raízes r_1 e r_2 são complexas conjugadas, $r_1 = \lambda + i\mu$ e $r_2 = \lambda - i\mu$, com $\mu \neq 0$.

O problema aqui é definir o que significa x^r quando r é complexo...se definimos isso, já sabemos que x^r é a solução...

Lembrando que $x^r \equiv e^{r \ln x}$ e aplicando a fórmula de Euler obtemos:

$$x^r = e^{r \ln x} = e^{(\lambda+i\mu)\ln x} = e^{\lambda \ln x} e^{i\mu \ln x} = e^{\ln x^\lambda} e^{i\mu \ln x} = x^\lambda[\cos(\mu \ln x) + i\,\mathrm{sen}(\mu \ln x)], x > 0$$

Assim $y_1(x) = x^{r_1}$ e $y_2(x) = x^{r_2}$ com r_1e r_2 definidas acima, são soluções da ODE. A solução geral é

$$y(x) = c_1 x^{\lambda+i\mu} + c_2 x^{\lambda-i\mu} \qquad x > 0$$

A desvantagem dessa expressão é que as funções $x^{\lambda+i\mu}$ e $x^{\lambda-i\mu}$ assumem valores complexos, mas sabemos que as partes reais são soluções também... Já vimos isso no estudo de equações diferenciais lineares de segunda ordem com coeficientes constantes...

EQUAÇÃO DE EULER

Caso 3: Raízes complexas

Da mesma forma que fizemos anteriormente (aula 3.2), podemos usar o Teorema 6 da aula 3.2 para obter soluções reais usando as partes real e imaginária de $x^{\lambda+i\mu}$, a saber,

$$y_1(x) = x^\lambda \cos(\mu \ln x) \qquad\qquad y_2(x) = x^\lambda \operatorname{sen}(\mu \ln x)$$

Um cálculo direto mostra que

$$W = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \mu x^{2\lambda-1} \neq 0 \text{ para todo } x > 0.$$

Portanto, essas soluções formam um conjunto fundamental de soluções para x > 0, e a solução geral é:

$$y(x) = c_1 x^\lambda \cos(\mu \ln x) + c_2 x^\lambda \operatorname{sen}(\mu \ln x) \qquad\qquad x > 0$$

EQUAÇÃO DE EULER

EXEMPLO 3

Resolver: $$x^2y'' + xy' + y = 0 \qquad x > 0$$

Fazendo y = x^r obtemos

$$x^r[r(r-1) + r + 1] = x^r(r^2 + 1) = 0$$

Logo, $r_1 = \pm i$, de modo que a solução geral é

$$y(x) = c_1x^0\cos(\ln x) + c_2x^0\,\mathrm{sen}(\ln x) = c_1\cos(\ln x) + c_2\,\mathrm{sen}(\ln x) \qquad x > 0$$

Vamos analisar agora o comportamento qualitativo das soluções da equação de Euler $x^2y'' + \alpha xy' + \beta y = 0$ perto do ponto singular x = 0

EQUAÇÃO DE EULER

Equação de Euler perto do ponto singular x=0

O comportamento depende inteiramente dos valores dos expoentes r_1 e r_2 (ou seja das raízes).

1. Se r for real e positivo, $x^r \to 0$ quando x tende a zero assumindo apenas valores positivos.

2. se r for real e negativo, então x^r tornar-se-á ilimitado.

3. se $r = 0$, $x^r = 1$.

4. Se r for complexo, a solução será $x^\lambda \cos(\mu \ln x)$. Essa função torna-se ilimitada ou tende a zero se λ for, respectivamente, negativo ou positivo, e também oscila cada vez mais rapidamente quando $x \to 0$. Se $\lambda = 0$, a oscilação tem amplitude constante

5. se as raízes forem repetidas, então uma das soluções terá a forma $x^r \ln x$, que tende a zero se $r > 0$, e é ilimitada se $r \leq 0$

Essas possibilidades estão ilustradas nas figuras a seguir

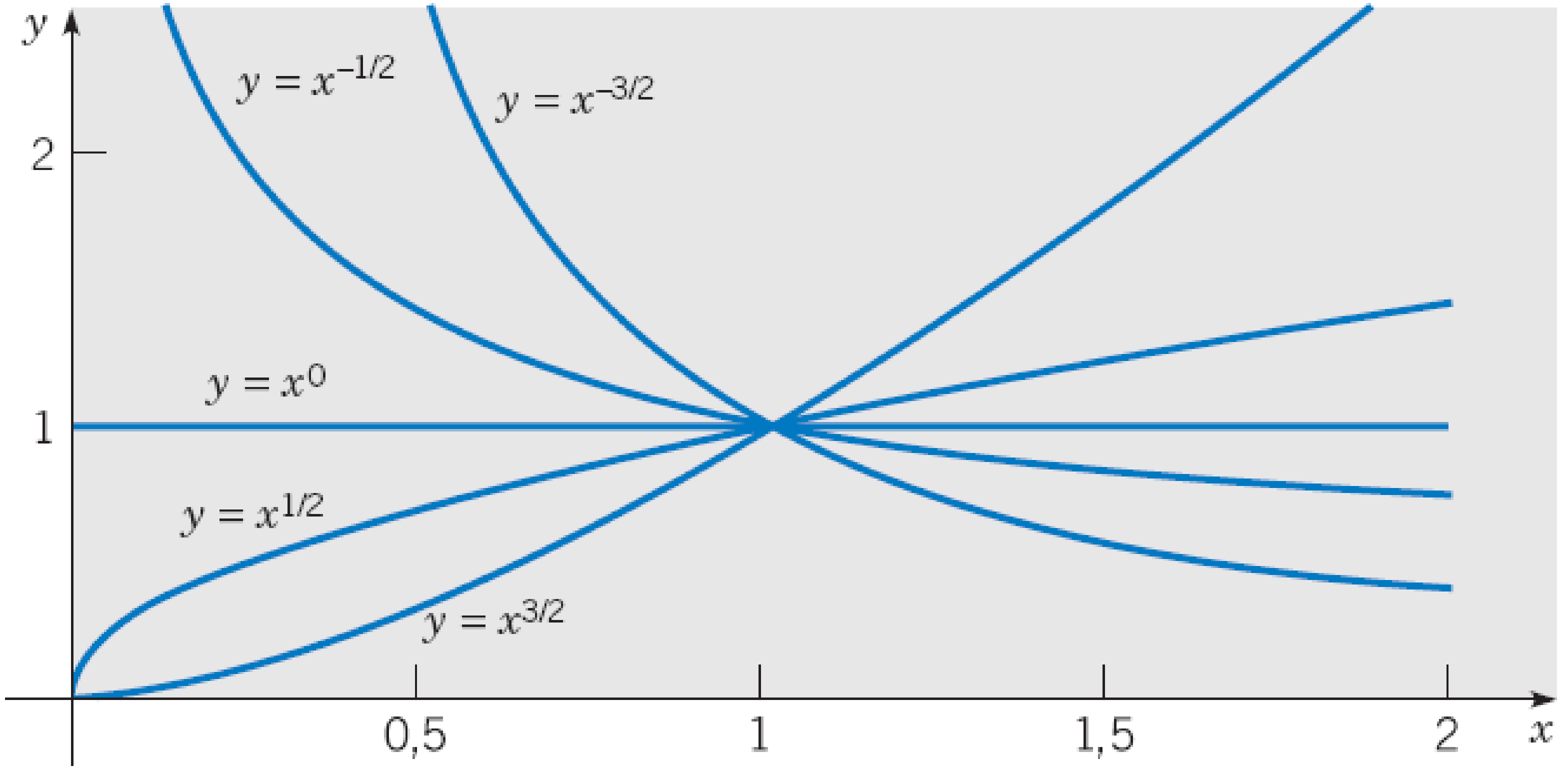
EQUAÇÃO DE EULER

Equação de Euler perto do ponto singular x=0

1. Se r for **real e positivo**, $x^r \to 0$ quando x tende a zero assumindo apenas valores positivos.

2. se r for **real e negativo**, então x^r tornar-se-á ilimitado.

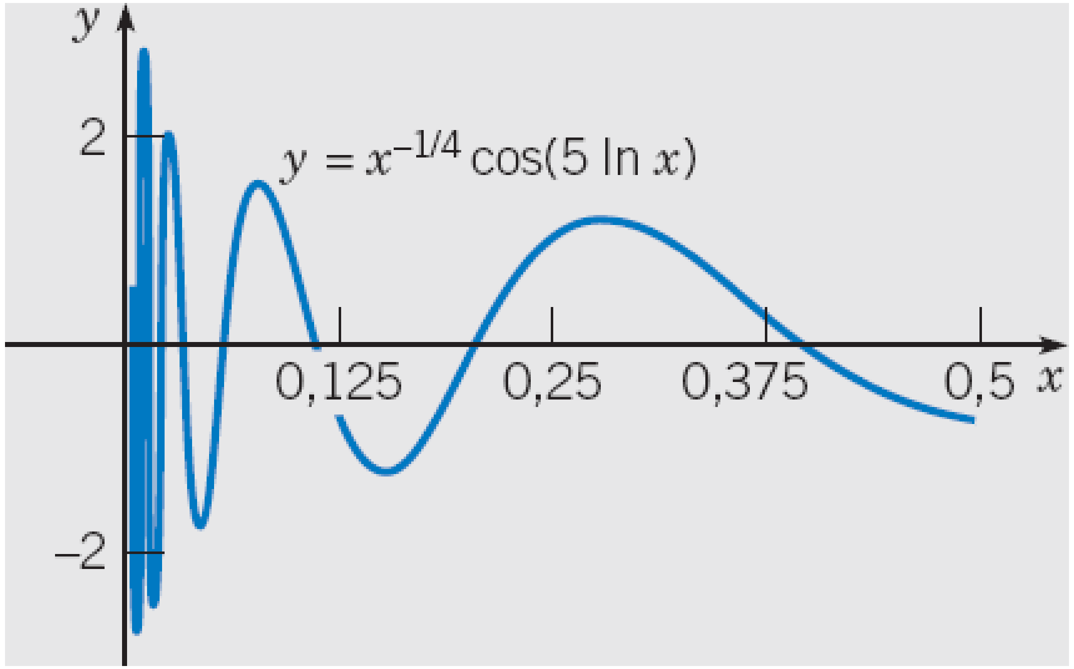
3. se **r = 0**, $x^r = 1$.



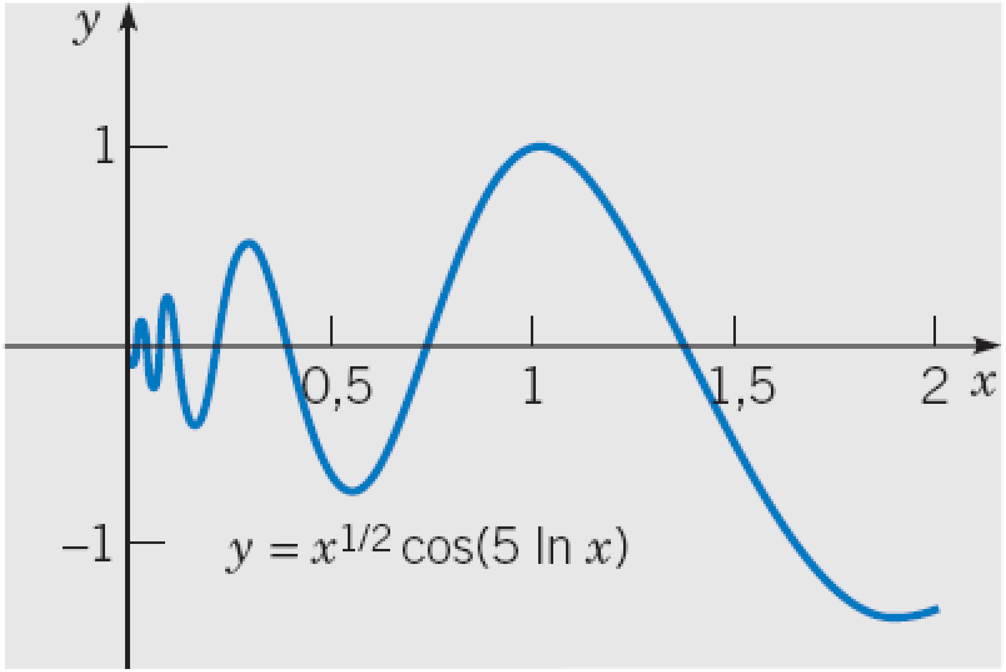
Observe o comportamento de y quando $x \to 0$ para distintos expoentes reais de x

Equação de Euler perto do ponto singular x=0

4. Se r for **complexo**, a solução será $x^\lambda \cos(\mu \ln x)$. Essa função torna-se ilimitada ou tende a zero se **λ** for, respectivamente, **negativo ou positivo**, e também oscila cada vez mais rapidamente quando $x \to 0$. Se $\lambda = 0$, a oscilação tem amplitude constante



Parte real (λ) negativa

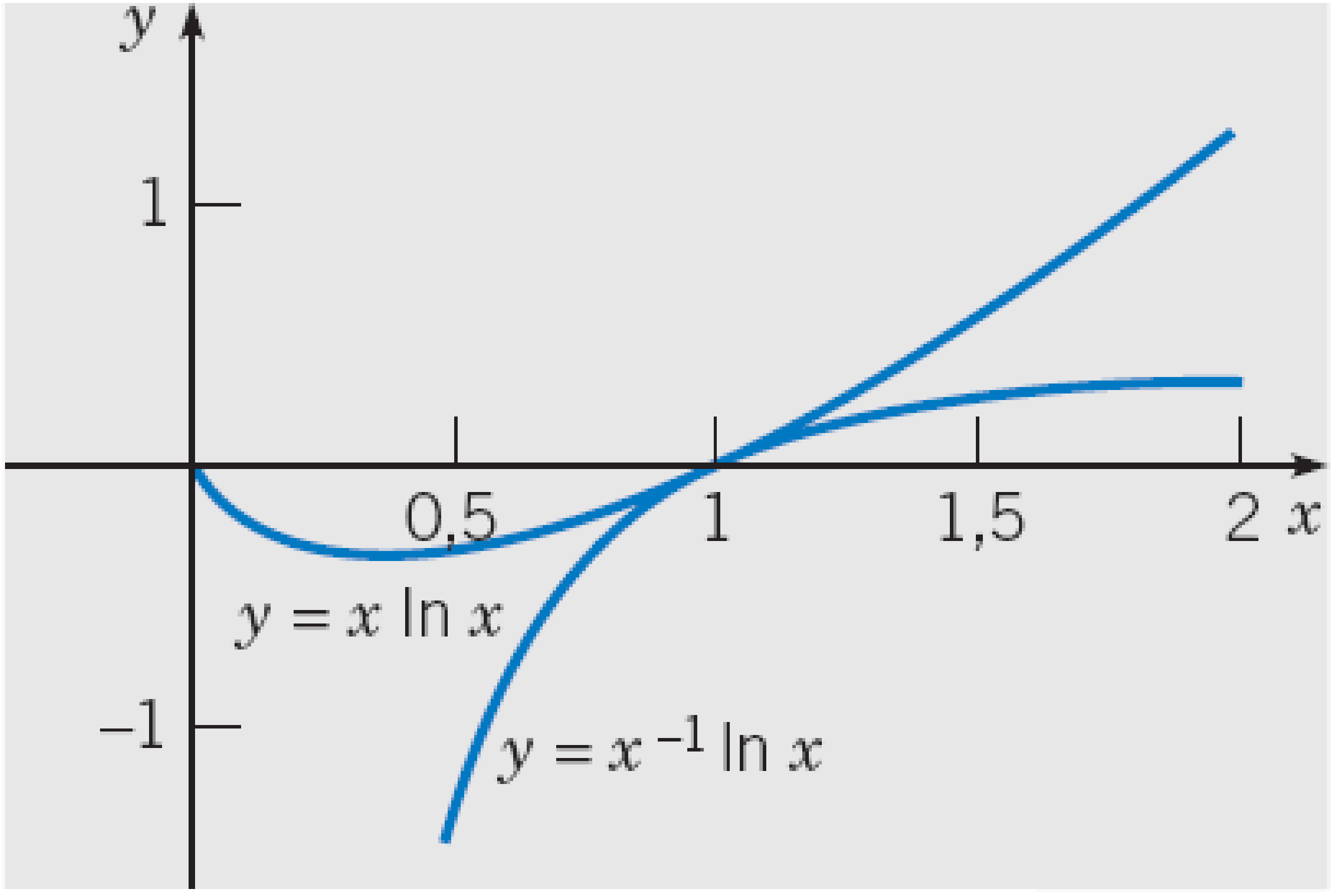


Parte real (λ) positiva

EQUAÇÃO DE EULER

Equação de Euler perto do ponto singular x=0

5. se as **raízes** forem **repetidas**, então uma das soluções terá a forma $x^r \ln x$, que tende a zero se $r > 0$, e é ilimitada se $r \leq 0$



EQUAÇÃO DE EULER

O que acontece se x<0 ?

A extensão das soluções da equação de Euler para o intervalo $x < 0$ pode ser feita de modo relativamente direto. A dificuldade está em compreender o significado de x^r quando além de $x<0$ temos r negativo e não inteiro; também temos o problema que ln x não está definido para $x < 0$.

As soluções da equação de Euler que encontramos para $x > 0$ são válidas para $x < 0$, mas, em geral, são complexas. Assim, no Exemplo 1, a solução $x^{1/2}$ é imaginária para $x < 0$.

Sempre é possível obter soluções reais da equação de Euler no intervalo $x < 0$ fazendo a mudança de variável a seguir. Seja $x = -\xi$, em que $\xi > 0$, e seja $y = u(\xi)$. Temos, então,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{du}{d\xi}\frac{d\xi}{dx} = -\frac{du}{d\xi}, \qquad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{d\xi}\left(-\frac{du}{d\xi}\right)\frac{d\xi}{dx} = \frac{d^2u}{d\xi^2}$$

EQUAÇÃO DE EULER

O que acontece se x<0 ?

Substituindo na equação obtemos: $\xi^2 \dfrac{d^2u}{d\xi^2} + \alpha\xi \dfrac{du}{d\xi} + \beta u = 0 \qquad \xi > 0$

Mas, exceto pelos nomes das variáveis, esta é exatamente a mesma equação original de Euler com x>0, portanto, pelo que já vimos teremos as seguintes soluções:

$$\begin{array}{ll} r_1 \neq r_2: & u(\xi) = c_1 \xi^{r_1} + c_2 \xi^{r_2} \\ r_1 = r_2: & u(\xi) = (c_1 + c_2 \ln \xi)\xi^{r_1} \\ r_1, r_2 \text{ complexas:} & u(\xi) = c_1 \xi^{\lambda} \cos(\mu \ln \xi) + c_2 \xi^{\lambda} \operatorname{sen}(\mu \ln \xi)\,, \end{array}$$

dependendo se os zeros de F(r) = r(r – 1) + αr + β são reais e diferentes, reais e iguais, ou complexos conjugados (como já vimos)

Para obter u em função de x, substituímos ξ por –x nessa soluções acima e assim podemos combinar os resultados para todos os valores de x (excluindo x=0 que é a origem)...ou seja:

EQUAÇÃO DE EULER

Solução para todo x diferente de zero

Podemos combinar os resultados para $x > 0$ e $x < 0$ lembrando que $|x| = x$ quando $x > 0$ e $|x| = -x$ quando $x < 0$.

Logo, precisamos apenas substituir x por |x| nas soluções encontradas para os casos de raízes reais distintas, reais iguais e complexas, para obter soluções reais válidas em qualquer intervalo que não contém a origem.

Portanto, a solução geral da equação de Euler $x^2y'' + \alpha xy' + \beta y = 0$ em qualquer intervalo que não contém a origem é determinada pelas raízes r_1 e r_2 da equação $F(r) = r(r-1) + \alpha r + \beta = 0$ como segue:

$$
\begin{array}{ll}
r_1 \neq r_2: & y(x) = c_1|x|^{r_1} + c_2|x|^{r_2} \\
r_1 = r_2: & y(x) = (c_1 + c_2 \ln|x|)|x|^{r_1} \\
r_1, r_2 \text{ complexas:} & y(x) = c_1|x|^{\lambda}\cos(\mu \ln|x|) + c_2 x^{\lambda}\,\mathrm{sen}(\mu \ln|x|),
\end{array}
$$

em que $r_1, r_2 = \lambda \pm i\mu$.

EQUAÇÃO DE EULER

Equação de Euler deslocada

Finalmente, as soluções de uma equação de Euler deslocada por x_0 com a forma

$$(x - x_0)^2 y'' + \alpha(x - x_0)y' + \beta y = 0$$

são semelhantes às já descritas em todos os casos analisados.
Se procurarmos soluções da forma $y = (x - x_0)^r$, então a solução geral é dada pelas mesmas soluções encontradas substituindo x por $x - x_0$.
Outra maneira é reduzir a equação de Euler deslocada para a forma original fazendo uma mudança da variável independente $t = x - x_0$.

Agora vamos voltar a considerar a nossa primeira equação (do slide 2) ou seja a equação geral $P(x)\frac{d^2y}{dx^2} + Q(x)\frac{dy}{dx} + R(x)y = 0$ em que x_0 é um ponto singular. Isto significa que $P(x_0) = 0$ e consideramos evidentemente que pelo menos um entre Q e R não se anula em x_0 (senão tudo é zero na nossa equação).

PONTOS SINGULARES REGULARES

Continuação

Infelizmente, se tentarmos usar os métodos descritos nas aulas anteriores para os casos de pontos ordinários para resolver a equação $P(x)\frac{d^2y}{dx^2} + Q(x)\frac{dy}{dx} + R(x)y = 0$ na vizinhança de um ponto singular x_0, descobriremos que esses métodos não funcionam.

Isso se deve ao fato de que, frequentemente, as soluções desta equação não são analíticas em x_0 e, portanto, não podem ser representadas por uma série de Taylor em potências de $x - x_0$.

Os Exemplos 1, 2 e 3 que vimos, ilustram esse fato; em cada um desses exemplos, a solução não tem uma expansão em séries de potências em torno do ponto singular $x = 0$.

Portanto, para termos alguma chance de resolver a equação na vizinhança de um ponto singular, precisamos usar um tipo de expansão em série geral.

PONTOS SINGULARES REGULARES

Justificativa

Como uma equação diferencial tem, em geral, poucos pontos singulares, poderíamos especular se eles não poderiam ser, simplesmente, ignorados.

No entanto, isto não é possível. Os pontos singulares determinam as características principais das soluções de forma muito mais profunda do que poderíamos suspeitar à primeira vista.

Na vizinhança de um ponto singular, a solução torna-se muito grande em módulo, ou experimenta mudanças rápidas. Veja os Exemplos 1, 2 e 3 que ilustram isso.

Assim, o comportamento do sistema físico modelado pela equação diferencial é, com frequência, mais interessante em uma vizinhança de um ponto singular. Muitas vezes, singularidades geométricas em um problema físico, como bicos ou arestas, geram pontos singulares na equação diferencial correspondente.

Então, embora queiramos, inicialmente, evitar os poucos pontos em que uma equação diferencial é singular, é precisamente nesses pontos que é necessário estudar a equação com muito cuidado.

PONTOS SINGULARES REGULARES

Procedimento

Nosso objetivo é estender o método já desenvolvido para resolver a equação diferencial perto de um ponto ordinário de modo que ele possa também ser aplicado na vizinhança de um ponto singular x_0.

Para fazer isto de modo razoavelmente simples, é necessário restringirmo-nos a casos nos quais as singularidades das funções Q/P e R/P em $x = x_0$ não são muito severas – ou seja, vamos restringir a um tipo de singularidade chamada “singularidade fraca” que cumprem a seguinte condição:

$$\lim_{x \to x_0} (x - x_0) \frac{Q(x)}{P(x)} \text{ é finito}$$

$$\lim_{x \to x_0} (x - x_0)^2 \frac{R(x)}{P(x)} \text{ é finito}$$

Tal ponto é chamado de **ponto singular regular** da equação diferencial

PONTOS SINGULARES REGULARES

Procedimento

O que significam estas condições?

$$\lim_{x \to x_0} (x - x_0) \frac{Q(x)}{P(x)} \text{ é finito}$$

$$\lim_{x \to x_0} (x - x_0)^2 \frac{R(x)}{P(x)} \text{ é finito}$$

Isto significa que a singularidade em Q/P não pode ser pior do que $(x - x_0)^{-1}$, e a singularidade em R/P não pode ser pior do que $(x - x_0)^{-2}$.

No caso da equação de Euler, as condições acima são satisfeitas (verifique).

Logo, a singularidade em uma equação de Euler é um ponto singular regular. De fato, veremos que todas as equações da forma $P(x)\frac{d^2y}{dx^2} + Q(x)\frac{dy}{dx} + R(x)y = 0$ se comportam de modo muito parecido com as equações de Euler perto de um ponto singular regular. Ou seja, soluções perto de um ponto singular regular podem incluir potências de x com expoentes negativos ou que não sejam inteiros, logaritmos, ou senos ou cossenos com argumentos logarítmicos.

A seguir (nesta e nas próximas aulas), discutiremos como resolver estas equações na vizinhança de um ponto singular regular.

PONTOS SINGULARES REGULARES

EXEMPLO 4

Determine os pontos singulares da equação de Legendre e determine se eles são regulares ou irregulares.

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha + 1)y = 0$$

Nesse caso, $P(x) = 1 - x^2$, de modo que os pontos singulares são $x = 1$ e $x = -1$. Observe que, quando dividimos a equação por $1 - x^2$, os coeficientes de y' e de y ficam iguais a $-2x/(1 - x^2)$ e $\alpha(\alpha + 1)/(1 - x^2)$, respectivamente.

Vamos considerar primeiro o ponto $x = 1$

$$\lim_{x \to x_0} (x - x_0)\frac{Q(x)}{P(x)} = \lim_{x \to 1}(x - 1)\left(\frac{-2x}{1 - x^2}\right) = \lim_{x \to 1}\left(\frac{2x}{x + 1}\right) = 1,$$

$$\lim_{x \to x_0} (x - x_0)^2\frac{R(x)}{P(x)} = \lim_{x \to 1}(x - 1)^2\left(\frac{\alpha(\alpha + 1)}{1 - x^2}\right) = \lim_{x \to 1}(x - 1)\left(\frac{\alpha(\alpha + 1)}{x + 1}\right) = 0$$

Como esses limites são finitos, o ponto $x = 1$ é um ponto singular regular. Pode-se mostrar, de maneira semelhante, que $x = -1$ também é um ponto singular regular.

PONTOS SINGULARES REGULARES

EXEMPLO 5

Determine os pontos singulares da equação abaixo e determine se eles são regulares ou irregulares.

$$2x(x-2)^2y'' + 3xy' + (x-2)y = 0$$

x=0 é um ponto singular e é regular pois:

$$\lim_{x\to x_0}(x-x_0)\,\frac{Q(x)}{P(x)} = \lim_{x\to 0} x\left(\frac{3x}{2x(x-2)^2}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{3x}{2(x-2)^2} = 0 < \infty$$

$$\lim_{x\to x_0}(x-x_0)^2\frac{R(x)}{P(x)} = \lim_{x\to 0} x^2\left(\frac{x-2}{2x(x-2)^2}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{x}{2(x-2)} = 0 < \infty$$

Para x = 2, teremos...

PONTOS SINGULARES REGULARES

EXEMPLO 5

Para x = 2, teremos...

$$\lim_{x\to x_0}(x-x_0)\frac{Q(x)}{P(x)}=\lim_{x\to 2}(x-2)\left(\frac{3x}{2x(x-2)^2}\right)=\lim_{x\to 2}\frac{3x}{2x(x-2)}$$

Para x = 2, o limite não existe portanto é um ponto singular irregular

Vejamos a seguir um exemplo onde os coeficientes da equação diferencial não são polinômios, mas são funções que podem ser decompostas por séries de Taylor convergentes em torno de x_0 — ou seja, se as funções “coeficientes” forem analíticas em $x = x_0$.

EXEMPLO 6

Determine os pontos singulares da equação abaixo e determine se eles são regulares ou irregulares.

$$(x-\pi/2)^2 y'' + (\cos x)y' + (\operatorname{sen} x)y = 0$$

O único ponto singular é x = π/2. Para estudá-lo, vamos analisar se as funções "coeficientes" são analíticas em π/2, explicitamente as funções:

$$(x-\pi/2)\frac{\cos x}{(x-\pi/2)^2} = \frac{\cos x}{x-\pi/2} \qquad (x-\pi/2)^2\frac{\operatorname{sen} x}{(x-\pi/2)^2} = \operatorname{sen} x$$

Lembrando de cálculo que a série de Taylor para cos x em torno de x = π/2, é:

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!}(x-\pi/2)^{2n+1}$$

PONTOS SINGULARES REGULARES

EXEMPLO 6

Assim:

$$\frac{\cos x}{x - \pi/2} = -1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!}(x - \pi/2)^{2n},$$

que converge para todo x e portanto é analítica em π/2.
Analogamente, sen x é analítica em x = π/2 pois a série de Taylor para sen x em torno de x = π/2, é:

$$\operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n}}{(2n)!}(x - \pi/2)^{2n}$$

que converge para todo x.
Portanto, concluímos que π/2 é um ponto singular regular para essa equação.

PONTOS SINGULARES REGULARES

Lista de exercícios disponível em:

http://www.eletrica.ufpr.br/p/professores:patricio:inicial

Disciplina TE315 (Equações Diferenciais para Engenharia Elétrica)

Gabaritos disponíveis no mesmo endereço