LISTA 05_3 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS
Soluções por séries de potências parte II
Respostas no final
Gabaritos na página do professor

Em cada um dos problemas de 1 a 4, determine $\phi''(x_0)$, $\phi'''(x_0)$ e $\phi^{(4)}(x_0)$ para o ponto dado x_0, se $y = \phi(x_0)$ é uma solução do problema de valor inicial dado.

1. $y'' + xy' + y = 0; \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$
2. $y'' + (\operatorname{sen} x)y' + (\cos x)y = 0; \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$
3. $x^2y'' + (1 + x)y' + 3(\ln x)y = 0; \quad y(1) = 2, \quad y'(1) = 0$
4. $y'' + x^2y' + (\operatorname{sen} x)y = 0; \quad y(0) = a_0, \quad y'(0) = a_1$

Em cada um dos problemas de 5 a 8, determine uma cota inferior para o raio de convergência da solução em série da equação diferencial dada em torno de cada ponto x0 dado

5. $y'' + 4y' + 6xy = 0; \quad x_0 = 0, \quad x_0 = 4$
6. $(x^2 - 2x - 3)y'' + xy' + 4y = 0; \quad x_0 = 4, \quad x_0 = -4, \quad x_0 = 0$
7. $(1 + x^3)y'' + 4xy' + y = 0; \quad x_0 = 0, \quad x_0 = 2$
8. $xy'' + y = 0; \quad x_0 = 1$

9. Determine uma cota inferior para o raio de convergência da solução em série em torno de x_0 dado para cada uma das equações diferenciais dadas nos problemas 1 a 14 da lista 5.2 da aula anterior

10. A Equação de Chebyshev. A equação diferencial de Chebyshev é

$$(1 - x^2)y'' - xy' + \alpha^2 y = 0,$$

em que α é uma constante.

(a) Determine duas soluções em séries de potências de x para |x| < 1 e mostre que elas formam um conjunto fundamental de soluções.

(b) Mostre que, se α for um inteiro não negativo n, então existirá uma solução polinomial de grau n. Esses polinômios, quando normalizados adequadamente, são chamados de polinômios de Chebyshev. São muito úteis em problemas que necessitam de uma aproximação polinomial para uma função definida em $-1 \leq x \leq 1$.

(c) Encontre uma solução polinomial para cada um dos casos em que $\alpha = n = 0, 1, 2, 3$.

Para cada uma das equações diferenciais nos problemas de 11 a 14, encontre os quatro primeiros termos não nulos em cada uma de duas soluções em série em torno da origem. Mostre que elas formam um conjunto fundamental de soluções. Qual o valor que você espera que tenha o raio de convergência de cada solução?

11. $y''\ (\text{sen}\, x)y = 0$

12. $e^x y'' + xy = 0$

13. $(\cos x)y'' + xy' - 2y = 0$

14. $e^{-x}xy'' + \ln(1 + x)y' - xy = 0$

15. Sejam x e x^2 soluções da equação diferencial $P(x)y'' + Q(x)y'' + R(x)y = 0$. Você pode dizer se o ponto $x = 0$ é um ponto ordinário ou um ponto singular? Prove sua resposta.

Equações de Primeira Ordem. Os métodos de expansão em séries discutidos nesta aula são diretamente aplicáveis à equação diferencial linear de primeira ordem $P(x)y' + Q(x)y = 0$ em um ponto x_0, se a função $p = Q/P$ tiver uma expansão em série de Taylor em torno desse ponto.
Tal ponto é chamado de ponto ordinário e, além disso, o raio de convergência da série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ é pelo menos tão grande quanto o raio de convergência da série para Q/P. Em cada um dos problemas de 16 a 21, resolva a equação diferencial dada por uma série de potências em x e verifique se a_0 pode de fato ser arbitrário em cada caso. Os Problemas 20 e 21 envolvem equações diferenciais não homogêneas para as quais os métodos de expansão em séries podem ser estendidos facilmente. Sempre que possível, compare a solução em série com a obtida pelos métodos das aulas 2.1; 2.2;... etc.

16. $y' - y = 0$

17. $y' - xy = 0$

18. $y' = e^{x2}\, y$, apenas três termos

19. $(1 - x)y' = y$

20. $y' - y = x^2$

21. $y' + xy = 1 + x$

A Equação de Legendre. Os problemas de 22 a 29 tratam da equação de Legendre

$(1 - x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha + 1)y = 0.$

Como indicado no Exemplo 3, o ponto x = 0 é um ponto ordinário dessa equação, e a distância da origem ao zero mais próximo de $P(x) = 1 - x^2$ é 1. Logo, o raio de convergência da solução em série em torno de x = 0 é pelo menos 1. Note, também, que basta considerar $\alpha > -1$, pois, se $\alpha \leq -1$, então a substituição $\alpha = -(1 + \gamma)$, em que $\gamma \geq 0$, leva à equação de Legendre $(1 - x^2)y'' - 2xy' + \gamma(\gamma + 1)y = 0$.

22. Mostre que duas soluções da equação de Legendre para $|x| < 1$ são

$$y_1(x) = 1 - \frac{\alpha(\alpha+1)}{2!}x^2 + \frac{\alpha(\alpha-2)(\alpha+1)(\alpha+3)}{4!}x^4$$

$$+ \sum_{m=3}^{\infty}(-1)^m \frac{\alpha\cdots(\alpha-2m+2)(\alpha+1)\cdots(\alpha+2m-1)}{(2m)!}x^{2m},$$

$$y_2(x) = x - \frac{(\alpha-1)(\alpha+2)}{3!}x^3 + \frac{(\alpha-1)(\alpha-3)(\alpha+2)(\alpha+4)}{5!}x^5$$

$$+ \sum_{m=3}^{\infty}(-1)^m \frac{(\alpha-1)\cdots(\alpha-2m+1)(\alpha+2)\cdots(\alpha+2m)}{(2m+1)!}x^{2m+1}.$$

23. Mostre que, se α for zero ou um inteiro positivo par $2n$, a solução em série y_1 se reduzirá a um polinômio de grau $2n$ contendo apenas potências pares de x. Encontre os polinômios correspondentes a $\alpha = 0$, 2 e 4. Mostre que, se α for um inteiro positivo ímpar $2n + 1$, a solução em série y_2 se reduzirá a um polinômio de grau $2n + 1$ contendo apenas potências ímpares de x. Encontre os polinômios correspondentes a $\alpha = 1$, 3 e 5.

24. O polinômio de Legendre $P_n(x)$ é definido como a solução polinomial da equação de Legendre com $\alpha = n$ que satisfaz, também, a condição $P_n(1) = 1$.

(a) Usando os resultados do Problema 23, encontre os polinômios de Legendre $P_0(x), \ldots, P_5(x)$.

(b) Faça os gráficos de $P_0(x), \ldots, P_5(x)$ para $-1 \leq x \leq 1$.

(c) Encontre os zeros de $P_0(x), \ldots, P_5(x)$.

25. Pode-se mostrar que a fórmula geral para $P_n(x)$ é

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor}\frac{(-1)^k(2n-2k)!}{k!(n-k)!(n-2k)!}x^{n-2k},$$

em que $\lfloor n/2 \rfloor$ denota o piso de $n/2$, ou seja, o maior inteiro menor ou igual a $n/2$. Observando a forma de $P_n(x)$ para n par e ímpar, mostre que $P_n(-1) = (-1)^n$.

26. Os polinômios de Legendre têm um papel importante em física matemática. Por exemplo, ao resolver a equação de Laplace (equação do potencial) em coordenadas esféricas, encontramos a equação

$$\frac{d^2F(\varphi)}{d\varphi^2} + \cot\varphi \frac{dF(\varphi)}{d\varphi} + n(n+1)F(\varphi) = 0, \qquad 0 < \varphi < \pi\ ,$$

em que n é um inteiro positivo. Mostre que a mudança de variável $x = \cos\phi$ leva a uma equação de Legendre com $\alpha = n$ para $y = f(x) = F(\text{arccos}\ x)$.

27. Mostre que, para $n = 0, 1, 2, 3$, o polinômio de Legendre correspondente é dado por

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n.$$

Essa fórmula, conhecida como fórmula de Rodrigues,[9] é válida para todos os inteiros positivos n.

28. Mostre que a equação de Legendre também pode ser escrita como

$$[(1-x^2)y']' = -\alpha(\alpha+1)y.$$

Segue, então, que

$$[(1-x^2)P'_n(x)]' = -n(n+1)P_n(x) \qquad \text{e} \qquad [(1-x^2)P'_m(x)]' = -m(m+1)P_m(x).$$

Multiplicando a primeira equação por $P_m(x)$, a segunda por $P_n(x)$, integrando por partes e depois subtraindo uma equação da outra, mostre que

$$\int_{-1}^{1} P_n(x)P_m(x)\,dx = 0 \qquad \text{se} \quad n \neq m.$$

Essa propriedade dos polinômios de Legendre é conhecida como a propriedade de ortogonalidade. Se $m = n$, pode-se mostrar que o valor da integral acima é $2/(2n + 1)$.

29. Dado um polinômio f de grau n, é possível expressar f como uma combinação linear de $P_0, P_1, P_2, \ldots, P_n$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k P_k(x).$$

Usando o resultado do Problema 28, mostre que

$$a_k = \frac{2k+1}{2}\int_{-1}^{1} f(x)P_k(x)\,dx.$$

RESPOSTAS

1. $\phi''(0) = -1, \quad \phi'''(0) = 0, \quad \phi^{(4)}(0) = 3$

2. $\phi''(0) = 0, \quad \phi'''(0) = -2, \quad \phi^{(4)}(0) = 0$

3. $\phi''(1) = 0, \quad \alpha'''(1) = -6, \quad \phi^{(4)}(1) = 42$

4. $\phi''(0) = 0, \quad \phi'''(0) = -a_0, \quad \alpha^{(4)}(0) = -4a_1$

5. $\rho = \infty, \quad \rho = \infty$

6. $\rho = 1, \quad \rho = 3, \quad \rho = 1$

7. $\rho = 1, \quad \rho = \sqrt{3}$

8. $\rho = 1$

9. **(a)** $\rho = \infty$

(b) $\rho = \infty$

(c) $\rho = \infty$

(d) $\rho = \infty$

(e) $\rho = \infty$

(f) $\rho = \sqrt{2}$

(g) $\rho = \infty$

(h) $\rho = 1$

(i) $\rho = 1$

(j) $\rho = 2$

(k) $\rho = \sqrt{3}$

10. **(a)**

$$y_1(x) = 1 - \frac{\alpha^2}{2!}x^2 - \frac{(2^2 - \alpha^2)\alpha^2}{4!}x^4 - \frac{(4^2 - \alpha^2)(2^2 - \alpha^2)\alpha^2}{6!}x^6 - \cdots$$
$$- \frac{[(2m-2)^2 - \alpha^2]\cdots(2^2 - \alpha^2)\alpha^2}{(2m)!}x^{2m} - \cdots$$

$$y_2(x) = x + \frac{1 - \alpha^2}{3!}x^3 + \frac{(3^2 - \alpha^2)(1 - \alpha^2)}{5!}x^5 + \cdots$$
$$+ \frac{[(2m-1)^2 - \alpha^2]\cdots(1 - \alpha^2)}{(2m+1)!}x^{2m+1} + \cdots$$

(b) $y_1(x)$ ou $y_2(x)$ termina com x^n quando $\alpha = n$ é par ou ímpar

11. $y_1(x) = 1 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 + \frac{1}{180}x^6 + \cdots, \quad y_2(x) = x - \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{180}x^6 + \frac{1}{504}x^7 + \cdots,$
$\rho = \infty$

12. $y_1(x) = 1 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{40}x^5 + \cdots, \quad y_2(x) = x - \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{20}x^5 - \frac{1}{60}x^6 + \cdots,$
$\rho = \infty$

13. $y_1(x) = 1 + x^2 + \frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{120}x^6 + \cdots, \quad y_2(x) = x + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{60}x^5 + \frac{1}{560}x^7 + \cdots,$
$\rho = \pi/2$

14. $y_1(x) = 1 + \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{12}x^4 - \frac{1}{120}x^6 + \cdots, \quad y_2(x) = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + \frac{7}{120}x^5 + \cdots,$
$\rho = 1$

15. Não é possível especificar condições iniciais arbitrárias em $x = 0$; logo, $x = 0$ é um ponto singular.

16. $$y = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots = e^x$$

17. $$y = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2 \cdot 4} + \frac{x^6}{2 \cdot 4 \cdot 6} + \cdots + \frac{x^{2n}}{2^n \cdot n!} + \cdots$$

18. $y = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3 + \cdots$

19. $$y = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots = \frac{1}{1 - x}$$

20. $$y = a_0\left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots\right) + 2\left(\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots\right)$$
$$= a_0e^x + 2\left(e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2}\right) = ce^x - 2 - 2x - x^2$$

21. $$y = a_0\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{2^2 2!} - \frac{x^6}{2^3 3!} + \cdots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^n n!} + \cdots\right)$$
$$+ \left(x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{2 \cdot 4} + \frac{x^5}{3 \cdot 5} + \cdots\right)$$
$$= a_0 e^{-x^2/2} + \left(x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{2 \cdot 4} + \frac{x^5}{3 \cdot 5} + \cdots\right)$$

23. $1,\ 1 - 3x^2,\ 1 - 10x^2 + \frac{35}{3}x^4; \quad x,\ x - \frac{5}{3}x^3,\ x - \frac{14}{3}x^3 + \frac{21}{5}x^5$

24. **(a)** 1, x, $(3x^2 - 1)/2$, $(5x^3 - 3x)/2$, $(35x^4 - 30x^2 + 3)/8$, $(63x^5 - 70x^3 + 15x)/8$

(c) P_1, 0; P_2, ±0,57735; P_3, 0, ±0,77460; P_4, ±0,33998, ±0,86114; P_5, 0, ±0,53847, ±0,90618