EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARA ENGENHARIA ELÉTRICA

TE 315

Aula 05_3

SOLUÇÕES EM SÉRIES DE POTÊNCIAS PERTO DE UM PONTO ORDINÁRIO PARTE II

SOLUÇÕES EM SÉRIES. PONTO ORDINARIO PARTE II

CONTINUAÇÃO

Já vimos, na aula anterior, o problema de encontrar soluções de

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)y = 0 \qquad \text{em que } p(x) = \frac{Q(x)}{P(x)} \qquad q(x) = \frac{R(x)}{P(x)}$$

em que P, Q e R são polinômios, na vizinhança de um ponto ordinário x_0. Supondo que a equação tem, de fato, uma solução y = ϕ(x) e que ϕ tem uma série de Taylor

$$y = \phi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

A propriedade mais importante que usamos na determinação dos coeficientes a_n (e portanto para encontrar a solução da equação diferencial) é que podemos calcular uma infinidade de derivadas das funções p e q. Para isso é necessário supor que as funções p e q são analíticas em x_0; ou seja, que elas têm expansões em série de Taylor que convergem em algum intervalo em torno do ponto x_0 ou seja:

SOLUÇÕES EM SÉRIES. PONTO ORDINARIO PARTE II

$$p(x) = p_0 + p_1(x - x_0) + \cdots + p_n(x - x_0)^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} p_n(x - x_0)^n$$

$$q(x) = q_0 + q_1(x - x_0) + \cdots + q_n(x - x_0)^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} q_n(x - x_0)^n$$

Com essa ideia em mente, podemos generalizar as definições de ponto ordinário e ponto singular da seguinte maneira: se as funções p = Q/P e q = R/P forem analíticas em x_0, então o ponto x_0 será dito um ponto ordinário da equação diferencial; caso contrário, ele será um ponto singular.

Vamos agora considerar o intervalo de convergência (onde ela é válida).

Se não é possível encontrar uma expressão para o coeficiente geral a_n em função de n (como vimos na aula anterior), essa questão pode ser respondida imediatamente, para uma classe ampla de problemas, pelo teorema a seguir:

SOLUÇÕES EM SÉRIES. PONTO ORDINARIO PARTE II

TEOREMA 1

Se x_0 for um ponto ordinário da equação diferencial $P(x)\dfrac{d^2y}{dx^2}+Q(x)\dfrac{dy}{dx}+R(x)y=0$

ou seja, se p = Q/P e q = R/P forem analíticas em x_0, então a solução geral da equação será:

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n=a_0y_1(x)+a_1y_2(x)$$

em que a_0 e a_1 são arbitrários, e y_1 e y_2 são duas soluções desenvolvidas em séries de potências que são analíticas em x_0.

As soluções y_1 e y_2 formam um conjunto fundamental de soluções. Além disso, o raio de convergência de cada uma das soluções em série y_1 e y_2 é pelo menos tão grande quanto o menor dos raios de convergência das séries para p e q.

Como encontrar os raios de convergência de p e q?

UFPR
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

TEOREMA 1

Isso pode ser feito de duas maneiras.

1. Novamente, uma possibilidade é calcular as séries de potências para p e q e depois determinar seus raios de convergência usando um dos testes de convergência para séries infinitas.

2. No entanto, existe um modo mais fácil **quando P, Q e R são polinômios sem fatores comuns**, pode ser demonstrado que, nesse caso, as razões Q/P e R/P **são analíticas em torno de um ponto x_0 se $P(x_0) \neq 0$** e que o raio de convergência da série de potências para Q/P e R/P em torno do ponto x_0 é exatamente a distância de x_0 até o ponto mais próximo onde $P(x) = 0$. Ao determinar essa distância, precisamos lembrar que $P(x) = 0$ pode ter raízes complexas, e estas também têm que ser levadas em consideração.

Vejamos alguns exemplos:

SOLUÇÕES EM SÉRIES. PONTO ORDINARIO PARTE II

Exemplo 1

Qual é o raio de convergência da série de Taylor para $(1 + x^2)^{-1}$ em torno de $x_0 = 0$?

Um modo de proceder é encontrar a série de Taylor em questão, a saber:

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots + (-1)^n x^{2n} + \cdots$$

utilizando o teste da razão...

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^{n+1} x^{2n+2}}{(-1)^n x^{2n}} \right| = \lim_{n\to\infty} x^2 < 1, \qquad \text{for } |x| < 1$$

pode-se verificar que ρ = 1.

Outra abordagem seria notar que os zeros de $1 + x^2$ são $x = \pm i$. Como a distância de 0 a i, ou a –i, no plano complexo é 1, o raio de convergência da série de potências em torno de x = 0 é 1.

SOLUÇÕES EM SÉRIES. PONTO ORDINARIO PARTE II

UFPR
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

Exemplo 2

Qual é o raio de convergência da série de Taylor para $(x^2 – 2x + 2)^{-1}$ em torno de $x_0 = 0$ e em torno de $x_0=1$?

Em primeiro lugar, note que $(x^2 - 2x + 2)^{-1} = 0$

tem soluções x = 1 ± i.

A distância de x = 0 a x=1+i, ou a x=1–i, no plano complexo é $\sqrt{2}$; logo, o raio de convergência da expansão em série de Taylor $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ em torno de x = 0 é $\sqrt{2}$.

E para $x_0=1$?

A distância no plano complexo de x=1 a x=1+i, ou a x=1–i, é 1; logo, o raio de convergência da expansão em série de Taylor $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ em torno de x = 1 é 1

SOLUÇÕES EM SÉRIES. PONTO ORDINARIO PARTE II

Comentário

Se tivéssemos aplicado nosso Teorema 1 às soluções em série da equação de Airy dos exemplos 2 e 3 da aula anterior, teríamos obtido que elas convergem para todos os valores de x, já que, em cada um dos exemplos, $P(x) = 1$ e, portanto, nunca se anula.

Uma solução em série pode convergir para outros valores de x, além dos indicados pelo raio de convergência do Teorema 1, de modo que o teorema fornece, de fato, apenas uma cota inferior para o raio de convergência da solução em série. Isto pode ser ilustrado pelos polinômios de Legendre, que satisfazem a equação de Legendre dada no próximo exemplo...

Exemplo 3

Determine uma cota inferior para o raio de convergência das soluções em série em torno de $x_0 = 0$ da equação de Legendre

$$(1-x^2)y'' - 2xy' + a(a+1)y = 0 \qquad a \text{ é uma constante}$$

Temos que $P(x) = 1-x^2$, $Q(x) = -2x$ e $R(x) = a(a+1)$ são polinômios e que os zeros de P, a saber, $x = \pm 1$, distam 1 de $x_0 = 0$.
Logo, uma solução em série da forma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge pelo menos para $|x| < 1$ e, possivelmente, para valores maiores de x.
De fato, pode-se mostrar que, se a for um inteiro positivo, uma das soluções em série terminará após um número finito de termos e, portanto, convergirá para todo x e não apenas para $|x| < 1$.
Por exemplo, se $a = 1$, a solução polinomial é $y = x$. Veja os problemas propostos de 22 a 29 para uma discussão mais completa da equação de Legendre.

SOLUÇÕES EM SÉRIES. PONTO ORDINARIO PARTE II

Exemplo 4

Determine uma cota inferior para o raio de convergência da solução em série da equação diferencial em torno do ponto $x_0 = 0$ e em torno do ponto $x_0 = -0{,}5$.

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + 4x^2y = 0$$

Novamente, Q, P e R são polinômios e P tem raízes x = ±i.

A distância no plano complexo de -0,5 até ±i é $\sqrt{1 + \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{5}}{2}$.

Assim, no primeiro caso a série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ converge pelo menos para |x| < 1 e, no segundo, a série $\sum_{n=0}^{\infty} b_n \left(x + \frac{1}{2}\right)^n$ converge pelo menos para $\left|x + \frac{1}{2}\right| < \frac{\sqrt{5}}{2}$.

SOLUÇÕES EM SÉRIES. PONTO ORDINARIO PARTE II

Comentário

Uma observação interessante que podemos fazer sobre esta equação $(1-x^2)y''-2xy'+4x^2y=0$ segue do Teorema 1 da aula 3.2 e do Teorema 1 desta aula.

Suponha que são dadas as condições iniciais $y(0) = y_0$ e $y'(0) = y'_0$.

Como $1 + x^2 \neq 0$ para todo x, sabemos, do Teorema 1 da aula 3.2 , que o problema de valor inicial tem uma única solução em $-\infty < x < \infty$ (**para todo x**).

Por outro lado, o Teorema 1 desta aula garante apenas uma solução em série da forma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ (com $a_0 = y_0$, $a_1 = y_0'$) **apenas** para $-1 < x < 1$

Como se explica? Ao final existe ou não a solução para todo x?

A resposta é que a solução única no intervalo $-\infty < x < \infty$ pode não ter expansão em séries de potências em torno de $x_0 = 0$ que convirja para todo x.

SOLUÇÕES EM SÉRIES. PONTO ORDINARIO PARTE II

Exemplo 5

Podemos determinar uma solução em série em torno de x = 0 para a equação diferencial? e se for o caso, qual é o raio de convergência?

$$y'' + (\sin x)y' + (1 + x^2)y = 0$$

Para essa equação diferencial, p(x) = sen x e q(x) = 1 + x^2 portanto p(x) não é polinomial!

Mas lembre-se, do Cálculo, de que sen x tem uma expansão em série de Taylor em torno de x = 0 que converge para todo x.

Além disso, q também tem uma expansão em série de Taylor em torno de x = 0, a saber, q(x) = 1 + x^2, que converge para todo x.

Portanto, a equação tem uma solução em série da forma $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, com a_0 e a_1 arbitrários, e a série converge para todo x (o raio de convergência é infinito).

SOLUÇÕES EM SÉRIES. PONTO ORDINARIO PARTE I

Lista de exercícios disponível em:

http://www.eletrica.ufpr.br/p/professores:patricio:inicial

Disciplina TE315 (Equações Diferenciais para Engenharia Elétrica)

Gabaritos disponíveis no mesmo endereço