EQUAÇÕES DIFERENCIAIS
PARA ENGENHARIA ELÉTRICA
TE 315

Aula 05_2

SOLUÇÕES EM SÉRIES DE POTÊNCIAS PERTO DE UM PONTO ORDINÁRIO PARTE I

INTRODUÇÃO

Vamos considerar, agora, métodos para resolver equações lineares de segunda ordem quando os coeficientes são funções da variável independente. Nesta aula, denominaremos a variável independente por x (antes utilizávamos t)...

$$P(x)\frac{d^2y}{dx^2}+Q(x)\frac{dy}{dx}+R(x)y=0$$

Vamos supor inicialmente que P, Q e R são polinômios sem fatores comuns e que queremos resolver a equação acima em uma vizinhança de um ponto x_0.

Um ponto x_0 no qual $P(x_0) \neq 0$ é chamado de ponto ordinário. Como P é contínuo, segue que existe um intervalo em torno de x_0 no qual P(x) nunca se anula. Nesse intervalo, podemos dividir a equação por P(x) para obter

$$\frac{d^2y}{dx^2}+p(x)\frac{dy}{dx}+q(x)y=0 \qquad \text{em que } p(x)=\frac{Q(x)}{P(x)} \qquad q(x)=\frac{R(x)}{P(x)}$$

INTRODUÇÃO

Como $p(x)$ e $q(x)$ são funções contínuas, pelo Teorema 1 de existência e unicidade da aula 3.2, existe uma única solução da equação nesse intervalo que também satisfaz as condições iniciais $y(x_0) = y_0$, $y'(x_0) = y_0'$ para valores arbitrários de y_0.

Por outro lado, se $P(x_0) = 0$, então x_0 é chamado de ponto singular e nesse caso, pelo menos um entre $Q(x_0)$ e $R(x_0)$ é diferente de zero (pois P, Q e R são polinômios sem fatores comuns entre eles)
Em consequência, pelo menos um dos coeficientes p ou q (ou ambos) torna-se ilimitado quando $x \rightarrow x_0$; portanto, o Teorema 1 de existência e unicidade da aula 3.2 não se aplica. Ponto singulares serão tratados mais adiante.

Vamos começar resolvendo a equação em uma vizinhança de um ponto ordinário x_0.

SOLUÇÕES EM SÉRIES. PONTO ORDINARIO PARTE I

Procuramos soluções da forma

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

Entanto se esteja no intervalo de convergência esta série (que representa y(x)) é continua e tem as derivadas de todas as ordens

O modo mais prático de determinar os coeficientes a_n é substituir y, y′ e y″ na equação original utilizando a série acima e suas derivadas. Os exemplos a seguir ilustram esse processo. As operações envolvidas nos procedimentos, como a diferenciação, são justificáveis, desde que permaneçamos no intervalo de convergência.

EXEMPLO 1

Encontre uma solução em série para a equação $y'' + y = 0, -\infty < x < \infty$

Como sabemos, um conjunto fundamental de soluções para essa equação é composto por sen x e cos x, de modo que os métodos de expansão em série não são necessários para resolver a equação.
No entanto, esse exemplo ilustra o uso de séries de potências em um caso relativamente simples.
Neste caso P(x) = 1, Q(x) = 0 e R(x) = 1; logo, todo ponto é um ponto ordinário.
Vamos procurar uma solução em forma de série de potências em torno de $x_0 = 0$, calculamos as derivadas...e substituímos na equação original...

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \qquad y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

SOLUÇÕES EM SÉRIES. PONTO ORDINARIO PARTE I

EXEMPLO 1

A substituição de y e y″ pelas séries na equação original fornece:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0$$

Para combinar as duas séries, precisamos reescrever pelo menos uma delas de modo que ambas tenham o mesmo termo geral. Assim, mudamos o índice do somatório na primeira série substituindo n por n+2 e começando a soma em 0 em vez de 2. Obtemos

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0 \quad \text{ou} \quad \sum_{n=0}^{\infty} [(n+2)(n+1)a_{n+2} + a_n] x^n = 0$$

UFPR
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

EXEMPLO 1

Para que essa equação seja satisfeita para todo x, é preciso que o coeficiente de cada potência de x seja nulo; logo, podemos concluir que

$$\sum_{n=0}^{\infty}[(n+2)(n+1)a_{n+2}+a_n]x^n=0$$

$$(n+2)(n+1)a_{n+2}+a_n=0 \qquad \text{ou} \qquad a_{n+2}=\frac{-a_n}{(n+2)(n+1)} \qquad n=0,1,2,\ldots$$

Este tipo de expressão é conhecida como uma relação de recorrência. Os coeficientes sucessivos podem ser calculados um a um escrevendo-se a relação de recorrência, primeiro para n = 0, depois para n = 1, e assim por diante. Neste caso os coeficientes com índices pares (a_0, a_2, a_4, . . .) e os com índices ímpares (a_1, a_3, a_5, . . .) são determinados separadamente (são independentes).

EXEMPLO 1

$$a_{n+2} = \frac{-a_n}{(n+2)(n+1)} \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Assim

$$a_2 = -\frac{a_0}{2 \cdot 1},$$
$$a_4 = -\frac{a_2}{4 \cdot 3} = \frac{a_0}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$$
$$a_6 = -\frac{a_4}{6 \cdot 5} = -\frac{a_0}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$$
$$\vdots$$
$$a_{2k} = \frac{(-1)^k a_0}{(2k)!} \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$$

$$a_3 = -\frac{a_1}{3 \cdot 2},$$
$$a_5 = -\frac{a_3}{5 \cdot 4} = \frac{a_1}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$$
$$a_7 = -\frac{a_5}{7 \cdot 6}$$
$$= -\frac{a_1}{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}$$
$$\vdots$$
$$a_{2k+1} = \frac{(-1)^k a_1}{(2k+1)!} \qquad k = 1, 2, 3, \ldots$$

a_0 e a_1 são constantes arbitrárias determinadas pelas condições iniciais.

Substituindo esses coeficientes temos...

EXEMPLO 1

Assim temos que: $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$ $\quad a_{2k} = \frac{(-1)^k}{(2k)!} a_0 \quad a_{2k+1} = \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} a_1$

Portanto, substituindo temos em y(x):

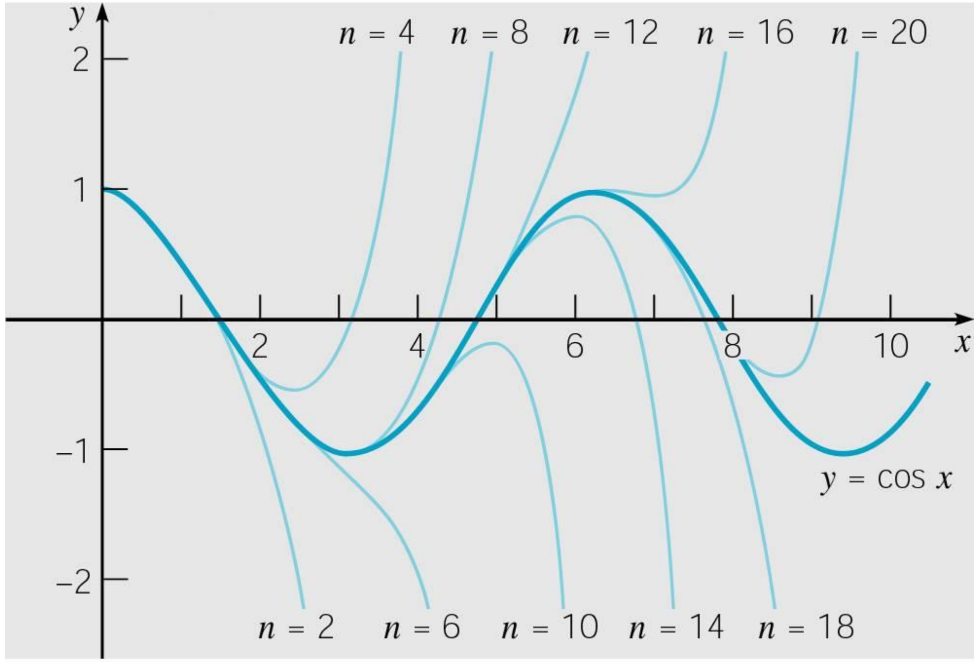
$$y(x) = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} + a_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

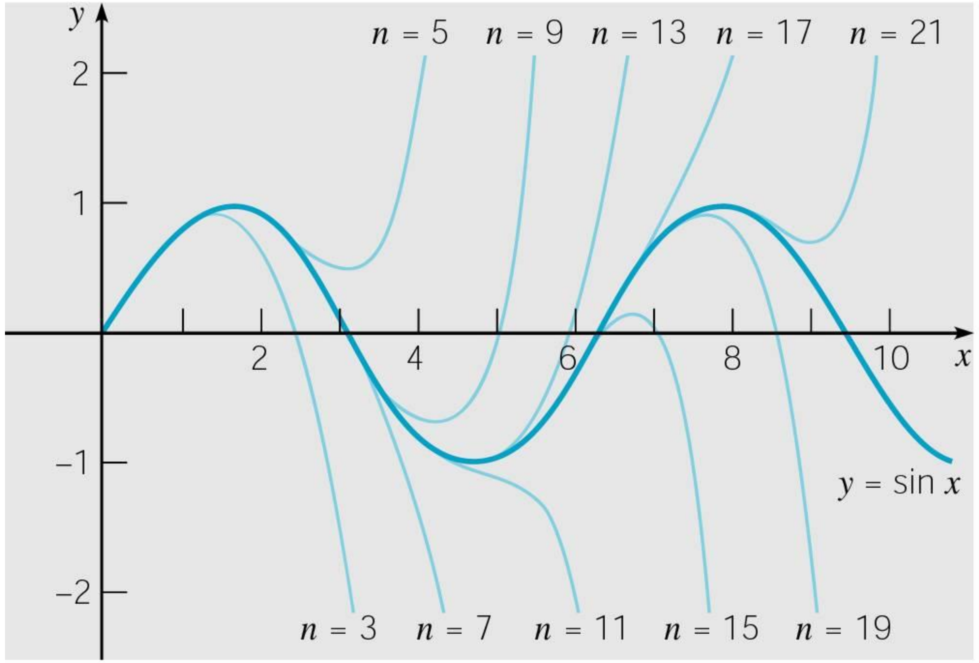
Usando o teste da razão, é fácil mostrar que cada uma das séries acima converge para todo x. De fato, reconhecemos que a primeira série é exatamente a série de Taylor para cos x em torno de x = 0 e que a segunda é a série de Taylor para sen x em torno de x = 0. Assim, **como esperado**, obtivemos a solução $y(x) = a_0 \cos x + a_1 \text{sen}\, x$ que são as soluções fundamentais da equação $y'' + y = 0$ com coeficientes constantes.

EXEMPLO 1

As figuras abaixo mostram como as somas parciais das séries aproximam as funções cos x e sen x.

No entanto uma série de potências truncada fornece apenas uma aproximação local da solução em uma vizinhança do ponto inicial x = 0; ela não pode representar adequadamente a solução para valores grandes de |x| (ver figuras)





EXEMPLO 1

Comentários

Embora você tenha visto, provavelmente, as funções seno e cosseno pela primeira vez de um modo mais elementar em termos de triângulos retângulos, é interessante que essas funções podem ser definidas como soluções de certas equações diferenciais lineares de segunda ordem simples.

Para ser preciso, a função sen x pode ser definida como a única solução do problema de valor inicial $y'' + y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$; analogamente, cos x pode ser definido como a única solução do problema de valor inicial $y'' + y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 0$.

Muitas outras funções importantes em física matemática também são definidas como soluções de determinados problemas de valor inicial. Para a maioria dessas funções, não existe maneira mais simples ou mais elementar de estudá-las.

SOLUÇÕES EM SÉRIES. PONTO ORDINARIO PARTE I

EXEMPLO 2 - A equação de Airy

Encontre uma solução em série de potências de x para a equação de Airy

$$y'' - xy = 0, -\infty < x < \infty$$

Olhando para essa equação, P(x) = 1, Q(x) = 0 e R(x) = –x; logo, todo ponto é um ponto ordinário (pois $P(x_0) \neq 0$ para todo x_0). Vamos escolher $x_0=0$

Vamos assumir que a solução pode ser escrita como uma série de potências e procedemos a aplicar nosso método:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \qquad y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

Substituindo estas expressões na equação original...

EXEMPLO 2 - A equação de Airy – combinando as séries

Assim a equação original $y'' - xy = 0$ fica:

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} = 0$$

Deslocando os índices...

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}x^n - \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}x^n = 0 \quad \text{ou} \quad 2\cdot 1\cdot a_2 + \sum_{n=1}^{\infty}[(n+2)(n+1)a_{n+2} - a_{n-1}]x^n = 0$$

Novamente, para que essa igualdade a zero seja satisfeita para todo x (em algum intervalo), os coeficientes das potências iguais de x a ambos lados da igualdade devem ser iguais; portanto, $a_2 = 0$ e obtemos a relação de recorrência...

SOLUÇÕES EM SÉRIES. PONTO ORDINARIO PARTE I

EXEMPLO 2 - A equação de Airy – relação recorrente

Como vimos a igualdade a zero implica que:

$$a_2 = 0 \qquad [(n+2)(n+1)a_{n+2} - a_{n-1}]x^n = 0$$

A relação de recorrência para os coeficientes é de 3 em 3.
a_0 determina a_3, que por sua vez determina a_6, . . . ;
a_1 determina a_4, que determina a_7, . . . ;
portanto teremos 3 conjuntos de coeficientes, sendo que em um conjunto os elementos são todos zeros (o que começa com o a_2=0 e portanto a_5 = a_8 = … = 0)
Logo:

$$a_{n+2} = \frac{a_{n-1}}{(n+2)(n+1)} \qquad \text{ou} \qquad a_{n+3} = \frac{a_n}{(n+3)(n+2)} \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

EXEMPLO 2 - A equação de Airy – coeficientes

Resumindo obtemos que: $a_2 = 0$ $\quad a_{n+3} = \dfrac{a_n}{(n+3)(n+2)}$ $\quad n = 0, 1, 2, \ldots$

Como $a_2=0$, então $a_5 = a_8 = a_{11} = \ldots = 0$

Para a sequência a_0, a_3, a_6, a_9, . . . , fazendo n = 0, 3, 6, 9, . . . na relação de recorrência obtemos

$$a_3 = \frac{a_0}{2\cdot 3} \qquad a_6 = \frac{a_3}{5\cdot 6} = \frac{a_0}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6} \qquad a_9 = \frac{a_6}{8\cdot 9} = \frac{a_0}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6\cdot 8\cdot 9}$$

Esses resultados sugerem a fórmula geral...

$$a_{3n} = \frac{a_0}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6\cdot 8\cdot 9\cdot (3n-1)(3n)} \qquad n \geq 4$$

EXEMPLO 2 - A equação de Airy – coeficientes

Para a sequência a_1, a_4, a_7, a_{10}, . . . , fazendo n = 1, 4, 7, 10, . . . na relação de recorrência obtemos

$$a_4 = \frac{a_1}{3 \cdot 4} \qquad a_7 = \frac{a_4}{6 \cdot 7} = \frac{a_1}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} \qquad a_{10} = \frac{a_7}{9 \cdot 10} = \frac{a_1}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 10} \quad \cdots$$

Esses resultados sugerem a fórmula geral...

$$a_{3n+1} = \frac{a_1}{3 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 10\,(3n)(3n+1)} \qquad n \geq 4$$

Assim, a solução geral da equação de Airy é:

SOLUÇÕES EM SÉRIES. PONTO ORDINARIO PARTE I

EXEMPLO 2 - A equação de Airy – solução geral

$$y(x) =$$
$$= a_0\left[1+\frac{x^3}{2\cdot 3}+\frac{x^6}{2\cdot 3\cdot 5\cdot 6}+\cdots+\frac{x^{3n}}{2\cdot 3\cdots(3n-1)(3n)}+\cdots\right]$$
$$+ a_1\left[x+\frac{x^4}{3\cdot 4}+\frac{x^7}{3\cdot 4\cdot 6\cdot 7}+\cdots+\frac{x^{3n+1}}{3\cdot 4\cdots(3n)(3n+1)}+\cdots\right]$$

ou....

$$y(x) = a_0\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n}}{2\cdot 3\cdots(3n-1)(3n)}\right]+a_1\left[x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n+1}}{3\cdot 4\cdots(3n)(3n+1)}\right]$$

Em que a_0 e a_1 são arbitrarias (definidas pelas condições iniciais)
Essas series convergem?

EXEMPLO 2 - A equação de Airy – análise

$$y(x) = a_0\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n}}{2\cdot 3\cdots(3n-1)(3n)}\right]+a_1\left[x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n+1}}{3\cdot 4\cdots(3n)(3n+1)}\right]$$

É fácil usar o teste da razão para mostrar que ambas as séries convergem para todo x.

Vamos considerar dois casos:

(1) $a_0 = 1$, $a_1 = 0$ e $y(0) = 1$ $y'(0) = 0$
(2) $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ e $y(0) = 0$ $y'(0) = 1$

Chamando y_1 e y_2 às funções definidas no primeiro e no segundo par de colchetes, é fácil ver que y_1 e y_2 são soluções da equação inicial pois y_1 satisfaz a condição (1) e y_2 satisfaz a condição (2).

EXEMPLO 2 - A equação de Airy – análise

$$y(x) = a_0\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n}}{2\cdot 3\cdots(3n-1)(3n)}\right] + a_1\left[x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n+1}}{3\cdot 4\cdots(3n)(3n+1)}\right]$$

Portanto, $W(y_1, y_2)(0) = 1 \neq 0$ e, em consequência, y_1 e y_2 formam um conjunto fundamental de soluções...

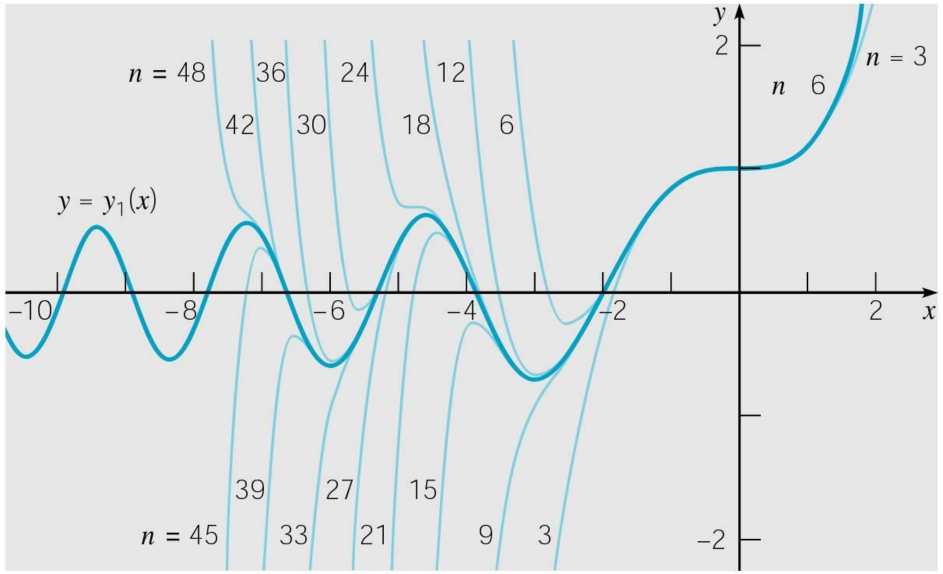
$$W(y_1, y_2)(0) = \begin{vmatrix} y_1(0) & y_2(0) \\ y_1'(0) & y_2'(0) \end{vmatrix} = y_1(0)y_2'(0) - y_1'(0)y_2(0) = 1$$

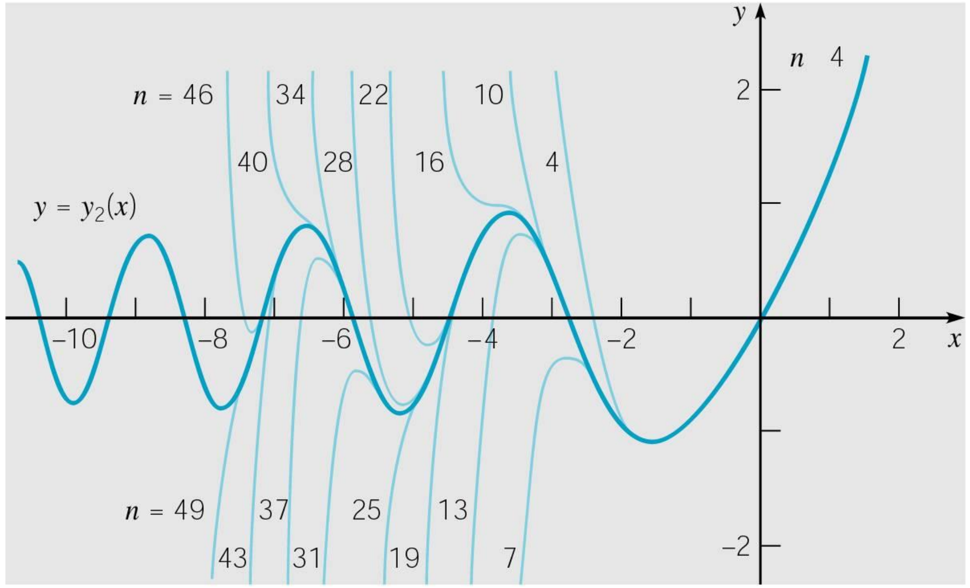
Logo, a solução geral da equação de Airy é: $y(x) = a_0\, y_1(x) + a_1\, y_2(x) \qquad -\infty < x < \infty$

Vamos ver agora os gráficos das soluções y_1 e y_2, respectivamente, da equação de Airy, assim como os gráficos de diversas somas parciais destas duas séries entre colchetes...

EXEMPLO 2 - A equação de Airy – análise

$$y(x)=a_0\left[1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n}}{2\cdot 3\cdots(3n-1)(3n)}\right]+a_1\left[x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{3n+1}}{3\cdot 4\cdots(3n)(3n+1)}\right]$$

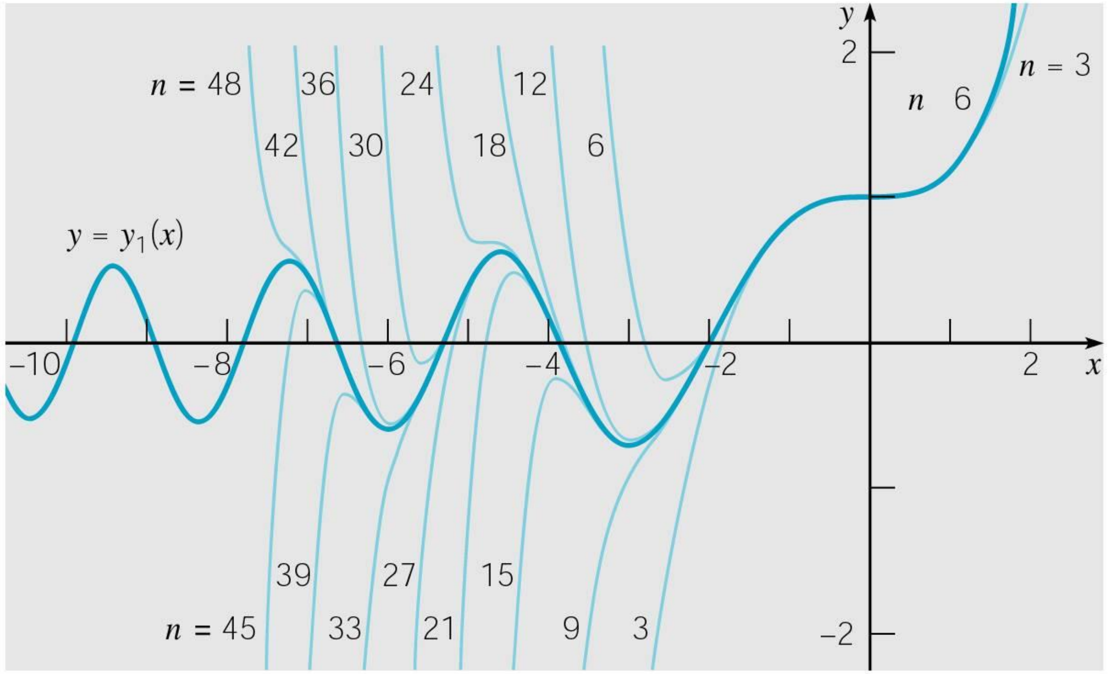




Aproximações polinomiais da solução $y_1(x)$ e $y_2(x)$ da equação de Airy. O valor de n é o grau do polinômio na aproximação. As somas parciais fornecem aproximações locais para as soluções em uma vizinhança da origem x=0

SOLUÇÕES EM SÉRIES. PONTO ORDINARIO PARTE I

EXEMPLO 2 - A equação de Airy – análise



Embora a qualidade da aproximação melhore à medida que aumenta o número de termos, nenhum polinômio pode representar de modo adequado y_1 ou y_2 para valores grandes de $|x|$. Por exemplo, na figura de y_1 os gráficos para n = 24 e n = 27 começam a se separar em torno de x = –9/2. Portanto, além desse ponto, a soma parcial de grau 24 não serve como uma aproximação da solução

Observe que ambas as funções y_1 e y_2 são monótonas para x > 0 e oscilatórias para x < 0. As oscilações não são uniformes, mas decaem em amplitude e aumentam em frequência quando aumenta a distância da origem. As soluções y_1 e y_2 da equação de Airy não são funções elementares que você já encontrou em Cálculo.

E se desejamos obter uma aproximação em x_0=1? ...vejamos o exemplo a seguir...

UFPR UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

EXEMPLO 3 - A equação de Airy em x_0=1

Encontre uma solução da equação de Airy em potências de x – 1.

$$y'' - xy = 0, -\infty < x < \infty$$

Como sabemos, P(x) = 1, Q(x) = 0 e R(x) = –x; e todo ponto (incluindo x_0=1) é um ponto ordinário (pois $P(x_0) \neq 0$ para todo x_0)

Vamos assumir que a solução pode ser escrita como uma série de potências e procedemos a aplicar nosso método:

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad y'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \qquad y''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

Substituindo estas expressões na equação original e deslocando os índices...

EXEMPLO 3 - A equação de Airy – combinando as séries

Assim a equação original $y'' - xy = 0$ fica:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}(x-1)^n = x\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-1)^n$$

Para igualar os coeficientes das potências iguais de (x – 1), precisamos escrever x em potências de (x – 1); ou seja, escrevemos x = 1 + (x – 1) (note que essa é precisamente a série de Taylor de x em torno de x = 1). Então, teremos...

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}(x-1)^n = [1+(x-1)]\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-1)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-1)^n + \sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-1)^{n+1} = \sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-1)^n + \sum_{n=1}^{\infty}a_{n-1}(x-1)^n$$

EXEMPLO 3 - A equação de Airy – relação recorrente

Assim chegamos nesta expressão:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)a_{n+2}(x-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-1)^n + \sum_{n=1}^{\infty}a_{n-1}(x-1)^n$$

Igualando os coeficientes das potências iguais de x – 1, encontramos

$$2a_2 = a_0 \Rightarrow a_2 = \frac{a_0}{2},$$

$$3\cdot 2a_3 = a_1 + a_0 \Rightarrow a_3 = \frac{a_0}{6} + \frac{a_1}{6},$$

$$4\cdot 3a_4 = a_2 + a_1 \Rightarrow a_4 = \frac{a_0}{24} + \frac{a_1}{12},$$

$$\vdots$$

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} = a_n + a_{n-1}, (n \geq 1)$$

SOLUÇÕES EM SÉRIES. PONTO ORDINARIO PARTE I

EXEMPLO 3 - A equação de Airy – solução

Portanto, a solução em torno de $x_0 = 1$ é:

$$y(x) = a_0\left[1 + \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{6} + \frac{(x-1)^4}{24} + \cdots\right] + a_1\left[(x-1) + \frac{(x-1)^3}{6} + \frac{(x-1)^4}{12} + \cdots\right]$$

Nos não encontramos uma expressão para o termo geral pois, quando a relação de recorrência tem mais de dois termos, como neste caso (temos 3 termos) a determinação de uma fórmula para a_n em função de a_0 e a_1 é bem complicada, se não impossível.

Sem tal fórmula, não podemos testar a convergência das duas séries por métodos diretos, como o teste da razão.

Isto significa que nossas manipulações para chegar à solução são suspeitas. No entanto, veremos na sequencia que é possível mostrar que as duas séries entre colchetes convergem para todo x. Além disso, elas definem as funções y_3 e y_4 que formam um conjunto fundamental de soluções da equação de Airy, ou seja:

EXEMPLO 3 - A equação de Airy – solução

O conjunto fundamental de soluções da equação de Airy é:

$$y(x) = a_0 y_3(x) + a_1 y_4(x)$$

Nos Exemplos 2 e 3, encontramos dois conjuntos de soluções da equação de Airy, as funções y_1 e y_2 , que formam um conjunto fundamental de soluções para todo x, o que também é verdade para as funções y_3 e y_4 definidas pelas duas últimas séries (do exemplo 3)...**o que isso significa?**

De acordo com a teoria geral de equações lineares de segunda ordem, cada uma das duas primeiras funções pode ser expressa como combinação linear das duas últimas funções, e vice-versa – um resultado que, certamente, não é óbvio examinando-se apenas as séries.

Lista de exercícios disponível em:

http://www.eletrica.ufpr.br/p/professores:patricio:inicial

Disciplina TE315 (Equações Diferenciais para Engenharia Elétrica)

Gabaritos disponíveis no mesmo endereço