EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARA ENGENHARIA ELÉTRICA

TE 315

Aula 05_1

SÉRIES DE POTÊNCIAS

SÉRIES DE POTÊNCIAS

INTRODUÇÃO

Vamos discutir a utilização de séries de potências para construir conjuntos fundamentais de soluções para equações diferenciais lineares de segunda ordem cujos coeficientes são funções da variável independente.

Começamos resumindo alguns resultados sobre séries de potências. Os que precisarem de mais detalhes do que os contidos aqui devem consultar um livro de Cálculo.

1. Uma série de potências $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ converge em um ponto x se existe

$$\lim_{m\to\infty}\sum_{n=1}^{m} a_n(x-x_0)^n$$

A série certamente converge em $x = x_0$ e pode convergir para todo x, ou pode convergir para alguns valores de x e não convergir para outros

SÉRIES DE POTÊNCIAS

2. Uma série de potências

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$

converge absolutamente em um ponto x se a série a seguir converge

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n (x - x_0)^n| = \sum_{n=1}^{\infty} |a_n||x - x_0|^n$$

Pode-se mostrar que, se a série convergir absolutamente, então ela irá convergir; no entanto, a recíproca não é necessariamente verdadeira

SÉRIES DE POTÊNCIAS

3. Um dos testes mais úteis para a convergência absoluta de uma série de potências é o teste da razão. Se $a_n \neq 0$ e se, para um valor fixo de x

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}(x-x_0)^{n+1}}{a_n(x-x_0)^n}\right| = |x-x_0| \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = |x-x_0|L,$$

então converge absolutamente naquele valor de x se $|x – x_0|L < 1$ e diverge se $|x – x_0|L > 1$. Se |x – x0|L = 1, o teste é inconclusivo.

Vejamos um exemplo...

EXEMPLO 1

Para quais valores de x a série de potências a seguir converge?

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\,n(x-2)^n$$

Vamos usar o teste da razão para testar a convergência. Temos:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+2}(n+1)(x-2)^{n+1}}{(-1)^{n+1}n(x-2)^n}\right| = |x-2|\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n} = |x-2|$$

De acordo com o item 3, a série converge absolutamente para |x – 2| < 1, ou 1 < x < 3, e diverge para |x – 2| > 1. Os valores de x para os quais |x – 2| = 1 são x = 1 e x = 3. A série diverge para cada um desses valores de x, já que o n-ésimo termo da série não tende a zero quando n → ∞ (veja a série original).

4. Se a série de potências

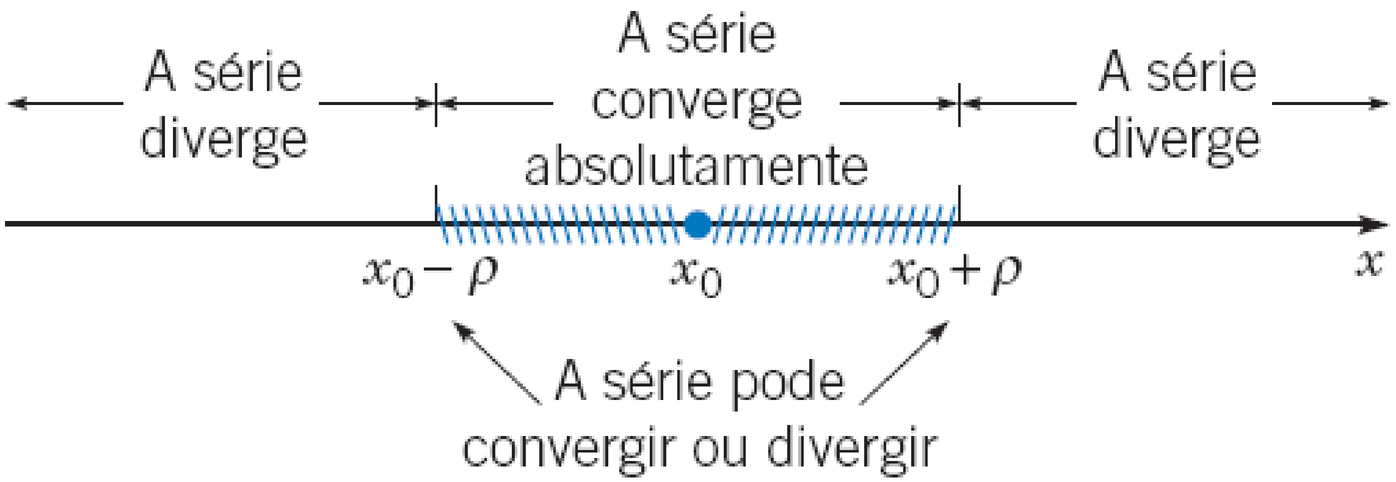
$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$$

convergir em $x = x_1$, então ela convergirá absolutamente para $|x - x_0| < |x_1 - x_0|$; e se ela divergir em $x = x_1$, então irá divergir para $|x - x_0| > |x_1 - x_0|$.

SÉRIES DE POTÊNCIAS

5. Para séries típicas como a do Exemplo 1, existe um número positivo ρ, chamado de raio de convergência, tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$$



converge absolutamente para $|x – x_0| < ρ$ e diverge para $|x – x_0| > ρ$.
O intervalo $|x – x_0| < ρ$ é o intervalo de convergência; A série pode convergir ou divergir quando $|x – x_0| = ρ$. Se converge para todos os valores de x então ρ é infinito. Se converge apenas em x_0 implica que $ρ = 0$ e a série não tem intervalo de convergência.
Incluindo esses casos excepcionais, toda série de potências tem um raio de convergência não negativo e, se $ρ > 0$, existe um intervalo de convergência (finito ou infinito) centrado em x_0 (ver figura)

UFPR
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

EXEMPLO 2

Determine o raio de convergência da série de potências $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n 2^n}$

Vamos aplicar o teste da razão:

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{(x+1)^{n+1}\, n\, 2^n}{(n+1)\, 2^{n+1}\, (x+1)^n} \right| = \frac{|x+1|}{2} \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = \frac{|x+1|}{2}$$

Assim, a série converge absolutamente para $|x + 1| < 2$, ou $-3 < x < 1$, e diverge para $|x + 1| > 2$. Qual o raio de convergência?

O raio de convergência da série de potências é $\rho = 2$.

Qual a situação nos extremos do intervalo de convergência?

SÉRIES DE POTÊNCIAS

EXEMPLO 2

Para x=1 temos $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n2^n}$ $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ que diverge lentamente...

Esta série diverge lentamente. A demonstração (feita originalmente na Idade Média por Nicole d'Oresme[1]) faz-se tendo em conta que a série

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \cdots$$

é termo a termo maior que ou igual à série

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^{-\lceil \log_2 k \rceil} = 1 + \left[\frac{1}{2}\right] + \left[\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right] + \left[\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right] + \frac{1}{16} \cdots$$

$$= \quad 1 + \frac{1}{2} + \quad \frac{1}{2} \quad + \quad \frac{1}{2} \quad + \quad \cdots$$

que claramente diverge.

EXEMPLO 2

Para x=-3 temos $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-3+1)^n}{n2^n} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$$

que converge mas não absolutamente, para mais detalhes ver o link: https://pt.wikipedia.org/wiki/Teste_da_s%C3%A9rie_alternada. Neste caso dizemos que a série converge condicionalmente em x = –3.

Resumindo: a série de potências dada converge para $-3 \leq x < 1$ e diverge, caso contrário. Ela converge absolutamente em $-3 < x < 1$ e tem raio de convergência 2.

SÉRIES DE POTÊNCIAS

Suponha que as séries abaixo convergem para f(x) e g(x) respectivamente para $|x - x_0| < \rho$ sendo $\rho > 0$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n \qquad \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x - x_0)^n$$

6. As duas séries acima podem ser somadas ou subtraídas termo a termo e a série resultante converge pelo menos para $|x - x_0| < \rho$

$$f(x) \pm g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n)(x - x_0)^n$$

SÉRIES DE POTÊNCIAS

Suponha que as séries abaixo convergem para f(x) e g(x) respectivamente para $|x - x_0| < \rho$ sendo $\rho > 0$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \qquad \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n$$

7. As duas séries acima podem ser multiplicadas formalmente termo a termo e a série resultante converge pelo menos para $|x - x_0| < \rho$

$$f(x) \cdot g(x) = \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n\right]\left[\sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n\right] = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n$$

em que $c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdot \cdot \cdot + a_n b_0$. A série resultante converge pelo menos quando $|x - x_0| < \rho$. Além disso, se $g(x_0) \neq 0$, a série para f (x) pode ser formalmente dividida pela série para g(x)

SÉRIES DE POTÊNCIAS

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} d_n (x - x_0)^n$$

Na maioria dos casos, os coeficientes d_n podem ser obtidos mais facilmente igualando-se os coeficientes correspondentes na relação equivalente a seguir:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = \left[\sum_{n=0}^{\infty} d_n (x - x_0)^n\right]\left[\sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n\right]$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} d_k b_{n-k}\right)(x - x_0)^n.$$

No caso da divisão, o raio de convergência da série de potências resultante pode ser menor do que ρ

SÉRIES DE POTÊNCIAS

8. Se a série do slide 11 converge para f(x) então a função f(x) é contínua e tem derivadas de todas as ordens para $|x - x_0| < \rho$. Além disso, f′, f″,… podem ser calculadas derivando-se a série termo a termo, ou seja,

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= a_1 + 2a_2(x - x_0) + \cdots + na_n(x - x_0)^{n-1} + \cdots \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} na_n(x - x_0)^{n-1}, \\
f''(x) &= 2a_2 + 6a_3(x - x_0) + \cdots + n(n-1)a_n(x - x_0)^{n-2} + \cdots \\
&= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n(x - x_0)^{n-2},
\end{aligned}
$$

e assim por diante, e cada uma dessas séries converge absolutamente no intervalo $|x - x_0| < \rho$

SÉRIES DE POTÊNCIAS

9. O valor do coeficiente a_n da série de f(x) do slide 11 é dado por

$$a_n = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$$

e a série é chamada de **série de Taylor** para a função f(x) em torno de $x = x_0$.

10. Se $$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n$$ para todo x em algum intervalo aberto centrado em x_0, então $a_n = b_n$ para n = 0, 1, 2, 3,...

Em particular, se: $$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = 0$$ para cada um desses x acima mencionados, então $a_0 = a_1 = \ldots = a_n = \ldots = 0$.

SÉRIES DE POTÊNCIAS

Uma função f(x) que tem uma expansão em série de Taylor em torno de $x = x_0$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

com raio de convergência $\rho > 0$ é dita **analítica em $x = x_0$**.

Todas as funções usuais do Cálculo são analíticas, exceto talvez em alguns pontos facilmente reconhecíveis. Por exemplo, sen x e e^x são analíticas em todos os pontos, $1/x$ é analítica, exceto em $x = 0$, e tg x é analítica, exceto em múltiplos ímpares de $\pi/2$.

Se f e g forem analíticas em x_0, então $f \pm g$, $f \cdot g$ e f/g (desde que $g(x0) \neq 0$) também serão analíticas em $x = x_0$.

Vejamos exemplos...

EXEMPLO 3

Escreva $\sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n$ como uma série cujo primeiro termo corresponde a n = 0, em vez de n = 2.

Seja m = n – 2; então n = m + 2 e n = 2 corresponde a m = 0. Logo,

$$\sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n = \sum_{m=0}^{\infty} a_{m+2} x^{m+2} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2} x^{n+2}$$

De fato, deslocamos o índice para cima de 2 unidades e compensamos começando a contar 2 níveis mais baixos do que originalmente.

EXEMPLO 4

Escreva a série $$\sum_{n=2}^{\infty}(n+2)(n+1)a_n(x-x_0)^{n-2}$$

como uma série cujo termo geral envolve $(x - x_0)^n$, em vez de $(x - x_0)^{n-2}$.

Deslocando o índice de 2 unidades...

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+4)(n+3)a_{n+2}(x-x_0)^n$$

EXEMPLO 5

Escreva a série $$x^2 \sum_{n=0}^{\infty} (r+n) a_n x^{r+n-1}$$

como uma série cujo termo geral envolve x^{r+n}

Coloque primeiro x^2 dentro do somatório, obtendo $$\sum_{n=0}^{\infty} (r+n) a_n x^{r+n+1}$$

A seguir, mude o índice do somatório de 1 unidade e comece a contar 1 unidade acima. Assim,

$$\sum_{n=0}^{\infty} (r+n) a_n x^{r+n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} (r+n-1) a_{n-1} x^{r+n}$$

SÉRIES DE POTÊNCIAS

EXEMPLO 6

Suponha que $$\sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

para todo x, e determine o que isso implica sobre os coeficientes a_n.

Para isso vamos utilizar a afirmação **10** do slide 15 para igualar os coeficientes correspondentes nas duas séries. Para isso, precisamos primeiro escrever as séries de modo que as duas tenham a mesma potência de x em seus termos gerais.

Por exemplo, podemos substituir n por n + 1 na série à esquerda do sinal de igualdade e começar a contar de 1 unidade a menos. Assim:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

EXEMPLO 6

De acordo com a afirmação 10, podemos concluir que

$$(n+1)a_{n+1} = a_n \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

ou

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{(n+1)} \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Logo, atribuindo valores sucessivos a n, temos

$$a_1 = a_0 \qquad a_2 = \frac{a_1}{2} = \frac{a_0}{2} \qquad a_3 = \frac{a_2}{3} = \frac{a_0}{3!} \quad \ldots \quad a_n = \frac{a_0}{n!} \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Portanto, usando estes coeficientes permitem reescrever:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = a_0 e^x$$

Lista de exercícios disponível em:

http://www.eletrica.ufpr.br/p/professores:patricio:inicial

Disciplina TE315 (Equações Diferenciais para Engenharia Elétrica)

Gabaritos disponíveis no mesmo endereço