EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARA ENGENHARIA ELÉTRICA TE 315

Aula 04_3

EQUAÇÕES NÃO HOMOGÊNEAS. MÉTODO DOS COEFICIÊNTES INDETERMINADOS

INTRODUÇÃO

Considere a equação diferencial linear não homogênea de ordem n

$$L[y] = a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = g(t)$$

em que a_0, a_1, . . . , a_n são constantes reais e $a_0 \neq 0$.
O método dos coeficientes indeterminados pode ser aplicado para resolver esta equação sempre que a função g(t) tenha a forma adequada

Como no caso das equações lineares de segunda ordem este método se aplica quando g(t) é a soma ou produto de funções polinomiais, exponenciais, senos e cossenos.

Nesses casos esperamos que seja possível encontrar Y(t) (a solução) através de uma escolha conveniente de combinações de polinômios, exponenciais, etc., multiplicadas por um número de constantes indeterminadas

Exemplo 1

Encontre a solução geral de $y''' - 3y'' + 3y' - y = 4e^t$

No caso homogêneo teremos: $y(t) = e^{rt} \Rightarrow r^3 - 3r^2 + 3r - 1 = 0 \Leftrightarrow (r-1)^3 = 0$

Assim, a solução geral da equação homogênea é $y_C(t) = c_1 e^t + c_2 t e^t + c_3 t^2 e^t$

Para encontrar uma solução particular começamos supondo que: $Y(t) = Ae^t$

No entanto, como e^t, te^t e t^2e^t são todas soluções da equação homogênea, precisamos multiplicar nossa escolha inicial por t^3

$$Y(t) = At^3e^t$$

Para encontrar o valor correto de A (que é o coeficiente indeterminado), diferenciamos Y(t) três vezes e juntamos os termos correspondentes na equação resultante...

Exemplo 1

Dessa forma obtemos: $6Ae^t = 4e^t$

Portanto $A = \frac{2}{3}$

e a solução particular é $Y(t) = \frac{2}{3}t^3e^t$

A solução geral da equação diferencial não homogênea é a soma de $y_c(t)$ e $Y(t)$:

$$y(t) = c_1e^t + c_2te^t + c_3t^2e^t + \frac{2}{3}t^3e^t$$

MÉTODO DOS COEFICIENTES INDETERMINADOS

Exemplo 2

Encontre uma solução particular da equação:

$$y^{(4)} + 2y'' + y = 3\sin t - 5\cos t$$

A equação característica é

$$r^4 + 2r^2 + 1 = (r^2 + 1)\ (r^2 + 1) = 0$$

As raízes são (estudamos isso na aula passada, para raízes repetidas, veja o exemplo 3) r = i, i, -i, -i

A solução da equação homogênea é: $y(t) = c_1 \cos t + c_2 \operatorname{sen} t + \ c_3 t \cos t + c_4 t \operatorname{sen} t$

Nossa hipótese inicial para uma solução particular é Y(t) = A sen t + B cos t, mas precisamos multiplicar essa escolha por t^2 para torná-la diferente de todas as soluções da equação homogênea. Nossa hipótese final é, então:

Exemplo 2

$$Y(t) = A\,t^2 \sin t + B\,t^2 \cos t$$

A seguir, diferenciamos Y(t) quatro vezes, substituímos na equação diferencial original e juntamos os termos correspondentes, obtendo, finalmente,

$$-8A\,\mathrm{sen}\,t - 8B\cos t = 3\,\mathrm{sen}\,t - 5\cos t$$

Assim, A = -3/8 e B = 5/8 e a solução particular é $Y(t) = -\frac{3}{8}t^2 \sin t + \frac{5}{8}t^2 \cos t$

Se g(t) for uma soma de diversas parcelas, é mais fácil, muitas vezes, calcular separadamente a solução particular correspondente a cada parcela que compõe g(t). Como para equações de segunda ordem, a solução particular do problema completo é a soma das soluções particulares dos problemas individuais. Isto está ilustrado no exemplo a seguir.

Exemplo 3

Encontre uma solução particular da equação:

$$y''' - 4y = t + 3\cos t + e^{-2t}$$

Vamos resolver primeiro a equação homogênea. A equação característica é:

$$r^3 - 4r = 0$$

As raízes são 0, ± 2 portanto:

A solução da equação homogênea é: $y_c(t) = c_1 + c_2 e^{2t} + c_3 e^{-2t}$

Podemos escrever uma solução particular da equação original como uma soma das soluções particulares de três equações diferenciais:

$$y''' - 4y = t \qquad y''' - 4y = 3\cos t \qquad y''' - 4y = e^{-2t}$$

MÉTODO DOS COEFICIENTES INDETERMINADOS

Exemplo 3

$y''' - 4y = t \qquad y''' - 4y = 3\cos t \qquad y''' - 4y = e^{-2t}$

Nossa escolha inicial, para uma solução particular $Y_1(t)$ da primeira equação é $A_0t + A_1$, mas, como uma constante já é solução da equação homogênea, multiplicamos por t. Assim,

$$Y_1(t) = t(A_0t + A_1)$$

Para a segunda equação escolhemos...

$$Y_2(t) = B\cos t + C\ sen\ t$$

e não há necessidade de modificar essa escolha inicial, já que cos t e sen t não são soluções da equação homogênea.

Finalmente, para a terceira equação, como e^{-2t} é uma solução da equação homogênea, supomos que...

$$Y_3(t) = Dte^{-2t}$$

As constantes são determinadas substituindo as escolhas nas equações diferenciais individuais...

MÉTODO DOS COEFICIENTES INDETERMINADOS

Exemplo 3

$y''' - 4y = t \qquad y''' - 4y = 3\cos t \qquad y''' - 4y = e^{-2t}$

Essas constantes são A_0 = -1/8, A_1 = 0, B = 0, C = -3/5 e D = 1/8

Portanto, uma solução particular da equação original completa é:

$$Y(t) = -\frac{1}{8}t^2 - \frac{3}{5}\operatorname{sen} t + \frac{1}{8}\mathrm{t}\ e^{-2t}$$

O método de coeficientes indeterminados pode ser usado sempre que for possível inferir a forma correta de Y(t). No entanto, isso é impossível, em geral, para equações diferenciais que não têm coeficientes constantes ou que contêm termos não homogêneos diferentes dos descritos anteriormente. Para problemas mais complicados, podemos usar o método de variação dos parâmetros, que será discutido na próxima aula.

MÉTODO DOS COEFICIENTES INDETERMINADOS

Lista de exercícios disponível em:

http://www.eletrica.ufpr.br/p/professores:patricio:inicial

Disciplina TE315 (Equações Diferenciais para Engenharia Elétrica)

Gabaritos disponíveis no mesmo endereço