LISTA 04_2 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS
Equações de ordem superior. Coeficientes Constantes
Respostas no final
Gabaritos na página do professor

Em cada um dos problemas de 1 a 6, expresse o número complexo dado na forma R(cos θ + i sen θ) = $Re^{i\theta}$.

1. $1 + i$
2. $-1 + \sqrt{3}i$
3. -3
4. $-i$
5. $\sqrt{3} - i$
6. $-1 - i$

Em cada um dos problemas de 7 a 10, siga o procedimento ilustrado no Exemplo 5 da aula para determinar as raízes indicadas do número complexo dado.

7. $1^{1/3}$
8. $(1 - i)^{1/2}$
9. $1^{1/4}$
10. $[2(\cos \pi/3 + i \operatorname{sen} \pi/3)]^{1/2}$

Em cada um dos problemas de 11 a 28, encontre a solução geral da equação diferencial dada.

11. $y''' - y'' - y' + y = 0$
12. $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$
13. $2y''' - 4y'' - 2y' + 4y = 0$
14. $y^{(4)} - 4y''' + 4y'' = 0$
15. $y^{(6)} + y = 0$
16. $y^{(4)} - 5y'' + 4y = 0$
17. $y^{(6)} - 3y^{(4)} + 3y'' - y = 0$
18. $y^{(6)} - y'' = 0$
19. $y^{(5)} - 3y^{(4)} + 3y''' - 3y'' + 2y' = 0$

20. $y^{(4)} - 8y' = 0$

21. $y^{(8)} + 8y^{(4)} + 16y = 0$

22. $y^{(4)} + 2y'' + y = 0$

23. $y''' - 5y'' + 3y' + y = 0$

24. $y''' + 5y'' + 6y' + 2y = 0$

25. $18y''' + 21y'' + 14y' + 4y = 0$

26. $y^{(4)} - 7y''' + 6y'' + 30y' - 36y = 0$

27. $12y^{(4)} + 31y''' + 75y'' + 37y' + 5y = 0$

28. $y^{(4)} + 6y''' + 17y'' + 22y' + 14y = 0$

Em cada um dos problemas de 29 a 36, encontre a solução do problema de valor inicial dado e faça seu gráfico. Como a solução se comporta quando $t \to \infty$?

29. $y''' + y' = 0$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = 2$

30. $y^{(4)} + y = 0$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = -1$, $y'''(0) = 0$

31. $y^{(4)} - 4y''' + 4y'' = 0$; $y(1) = -1$, $y'(1) = 2$, $y''(1) = 0$, $y'''(1) = 0$

32. $y''' - y'' + y' - y = 0$; $y(0) = 2$, $y'(0) = -1$, $y''(0) = -2$

33. $2y^{(4)} - y''' - 9y'' + 4y' + 4y = 0$; $y(0) = -2$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = -2$, $y'''(0) = 0$

34. $4y''' + y' + 5y = 0$; $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = -1$

35. $6y''' + 5y'' + y' = 0$; $y(0) = -2$, $y'(0) = 2$, $y''(0) = 0$

36. $y^{(4)} + 6y''' + 17y'' + 22y' + 14y = 0$; $y(0) = 1$, $y'(0) = -2$, $y''(0) = 0$, $y'''(0) = 3$

37. Mostre que a solução geral de $y^{(4)} - y = 0$ pode ser escrita como

$$y = c_1 \cos t + c_2 \operatorname{sen} t + c_3 \cosh t + c_4 \operatorname{senh} t.$$

Determine a solução que satisfaz as condições iniciais $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 1$, $y'''(0) = 1$. Por que é conveniente usar as soluções $\cosh t$ e $\operatorname{senh} t$, em vez de e^t e e^{-t}?

38. Considere a equação $y^{(4)} - y = 0$.

(a) Use a fórmula de Abel [Problema 20(d) da Seção 4.1] para encontrar o wronskiano de um conjunto fundamental de soluções da equação dada.

(b) Determine o wronskiano das soluções e^t, e^{-t}, $\cos t$ e $\operatorname{sen} t$.

(c) Determine o wronskiano das soluções $\cosh t$, $\operatorname{senh} t$, $\cos t$ e $\operatorname{sen} t$.

39. Considere o sistema mola-massa ilustrado na Figura 4.2.4 consistindo em duas massas unitárias suspensas de molas com constantes 3 e 2, respectivamente. Suponha que não há

amortecimento no sistema.

(a) Mostre que os deslocamentos u_1 e u_2 das massas a partir de suas respectivas posições de equilíbrio satisfazem as equações

$$u_1'' + 5u_1 = 2u_2, \qquad u_2'' + 2u_2 = 2u_1. \tag{i}$$

(b) Resolva a primeira das Eqs. (i) para u_2 e substitua o resultado na segunda equação, obtendo, assim, a seguinte equação de quarta ordem para u_1:

$$u_1^{(4)} + 7u_1'' + 6u_1 = 0. \tag{ii}$$

Encontre a solução geral da Eq. (ii).

(c) Suponha que as condições iniciais são

$$u_1(0) = 1, \qquad u_1'(0) = 0, \qquad u_2(0) = 2, \qquad u_2'(0) = 0. \tag{iii}$$

Use a primeira das Eqs. (i) e as condições iniciais (iii) para obter os valores de $u_1''(0)$ e de $u_1'''(0)$. Depois mostre que a solução da Eq. (ii) que satisfaz as quatro condições iniciais em u_1 é $u_1(t) = \cos t$. Mostre que a solução correspondente u_2 é $u_2(t) = 2 \cos t$.

(d) Suponha, agora, que as condições iniciais são

$$u_1(0) = -2, \qquad u_1'(0) = 0, \qquad u_2(0) = 1, \qquad u_2'(0) = 0. \tag{iv}$$

Proceda como no item (c) para mostrar que as soluções correspondentes são $u_1(t) = -2 \cos \sqrt{6}\, t$.

(e) Observe que as soluções obtidas nos itens (c) e (d) descrevem dois modos de vibração distintos. No primeiro, a frequência do movimento é 1, e as duas massas se movem em fase, ambas se movendo para cima ou para baixo, juntas; a segunda massa se move duas vezes mais rápido do que a primeira. O segundo movimento tem frequência $\sqrt{6}$, e as massas se movem fora de fase uma em relação à outra, uma movendose para baixo enquanto a outra se move para cima, e vice-versa. Nesse modo, a primeira massa se move duas vezes mais rápido do que a segunda. Para outras condições iniciais que não são proporcionais à Eq. (iii) nem à Eq. (iv), o movimento das massas é uma combinação desses dois modos de vibração.

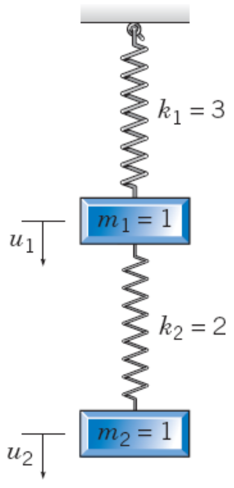

Figura 4.2.2

40. Nesse problema, esquematizamos um modo de mostrar que, se $r_1, \ldots, r_n$ forem reais e distintos, então $e^{r_1 t}, \ldots, e^{r_n t}$ serão linearmente independentes em $-\infty < t < \infty$. Para isso, vamos considerar a relação linear

$$c_1 e^{r_1 t} + \cdots + c_n e^{r_n t} = 0, \qquad -\infty < t < \infty \tag{i}$$

e mostrar que todas as constantes são nulas.

(a) Multiplique a Eq. (i) por $e^{r}1t$ e derive em relação a t obtendo, assim,

$$c_2(r_2 - r_1)e^{(r_2 - r_1)t} + \cdots + c_n(r_n - r_1)e^{(r_n - r_1)t} = 0.$$

(b) Multiplique o resultado do item (a) por $e^{(r_2 - r_1)t}$ e derive em relação a t para obter

$$c_2(r_2 - r_1)e^{(r_3 - r_2)t} + \cdots + c_n(r_n - r_1)e^{(r_n - r_1)t} = 0.$$

(c) Continue o procedimento iniciado nos itens (a) e (b) obtendo, finalmente,

$$c_n(r_n - r_{n-1}) \cdots (r_n - r_1)e^{(r_n - r_{n-1})t} = 0.$$

Logo, $c_n = 0$ e, portanto,

$$c_1 r^{r_1 t} + \cdots + c_{n-1} e^{r_{n-1} t} = 0.$$

(d) Repita o argumento precedente para mostrar que $c_{n-1} = 0$. De maneira análoga, segue que $c_{n-2} = \cdots = c_1 = 0$. Portanto, as funções $e^{r_1 t}, \ldots, e^{r_n t}$ são linearmente independentes.

RESPOSTAS

1. $\sqrt{2}\, e^{i[(\pi/4)+2m\pi]}$
2. $2e^{i[(2\pi/3)+2m\pi]}$
3. $3e^{i(\pi+2m\pi)}$
4. $e^{i[(3\pi/2)+2m\pi]}$
5. $2e^{i[(11\pi/6)+2m\pi]}$
6. $\sqrt{2}e^{i[(5\pi/4)+2m\pi]}$
7. $1,\ \frac{1}{2}(-1+i\sqrt{3}),\ \frac{1}{2}(-1-i\sqrt{3})$
8. $2^{1/4}\, e^{-\pi i/8},\ 2^{1/4}e^{-\pi i/8}$
9. $1, i, -1, -i$
10. $\left(\sqrt{3}+i\right)/\sqrt{2},\ -\left(\sqrt{3}+i\right)/\sqrt{2}$
11. $y = c_1e^t + c_2te^t + c_3e^{-t}$
12. $y = c_1e^t + c_2te^t + c_3t^2e^t$
13. $y = c_1e^t + c_2e^{2t} + c_3e^{-t}$
14. $y = c_1 + c_2t + c_3e^{2t} + c_4te^{2t}$
15. $y = c_1\cos t + c_2\,\text{sen}\, t + e^{\sqrt{3}t/2}\,(c_3\cos\frac{1}{2}t + c_4\,\text{sen}\,\frac{1}{2}t) + e^{-\sqrt{3}t/2}(c_5\cos\frac{1}{2}t + c_6\,\text{sen}\,\frac{1}{2}t)$
16. $y = c_1e^t + c_2e^{-t} + c_3e^{2t} + c_4e^{-2t}$
17. $y = c_1e^t + c_2te^t + c_3t^2e^t + c_4e^{-t} + c_5te^{-t} + c_6t^2e^{-t}$
18. $y = c_1 + c_2t + c_3e^t + c_4e^{-t} + c_5\cos t + c_6\,\text{sen}\, t$
19. $y = c_1 + c_2e^t + c_3e^{2t} + c_4\cos t + c_5\,\text{sen}\, t$
20. $y = c_1 + c_2e^{2t} + e^{-t}(c_3\cos\sqrt{3}\,t + c_4\,\text{sen}\,\sqrt{3}\,t)$
21. $y = e^t[(c_1 + c_2t)\cos t + (c_3 + c_4t)\,\text{sen}\, t\,] + e^{-t}[(c_5 + c_6t)\cos t + (c_7 + c_8t)\,\text{sen}\, t]$
22. $y = (c_1 + c_2t)\cos t + (c_3 + c_4t)\,\text{sen}\, t$
23. $y = c_1e^t + c_2e^{(2+\sqrt{5})t} + c_3e^{(2-\sqrt{5})t}$
24. $y = c_1e^{-t} + c_2e^{(-2+\sqrt{2})t} + c_3e^{(-2-\sqrt{2})t}$
25. $y = c_1e^{-t/2} + c_2e^{-t/3}\cos\,(t/\sqrt{3}) + c_3e^{-t/3}\,\text{sen}\,(t/\sqrt{3})$
26. $y = c_1e^{3t} + c_2e^{-2t} + c_3e^{(3+\sqrt{3})t} + c_4e^{(3-\sqrt{3})t}$
27. $y = c_1e^{-t/3} + c_2e^{-t/4} + c_3e^{-t}\cos 2t + c_4e^{-t}\,\text{sen}\, 2\,t$
28. $y = c_1e^{-t}\cos t + c_2e^{-t}\,\text{sen}\, t + c_3e^{-2t}\cos(\sqrt{3}\,t) + c_4e^{-2t}\,\text{sen}\,(\sqrt{3}\,t)$
29. $y = 2 - 2\cos t + \text{sen}\, t$
30. $y = \frac{1}{2}e^{-t/\sqrt{2}}\ \text{sen}(t/\sqrt{2}) - \frac{1}{2}e^{t/\sqrt{2}}\ \text{sen}(t/\sqrt{2})$

31. $y = 2t - 3$

32. $y = 2\cos t - \operatorname{sen} t$

33. $y = -\frac{2}{3}e^{t} - \frac{1}{10}e^{2t} - \frac{1}{6}e^{-2t} - \frac{16}{15}e^{-t/2}$

34. $y = -\frac{2}{3}e^{t} - \frac{1}{10}e^{2t} - \frac{1}{6}e^{-2t} - \frac{16}{15}e^{-t/2}$

35. $y = 8 - 18e^{-t/3} + 8e^{-t/2}$

36. $$y = \frac{21}{13}e^{-t}\cos t - \frac{38}{13}e^{-t}\operatorname{sen} t - \frac{8}{13}e^{-2t}\cos(\sqrt{3}\,t) + \frac{17\sqrt{3}}{39}e^{-2t}\operatorname{sen}(\sqrt{3}\,t)$$

37. $y = \frac{1}{2}(\cosh t - \cos t) + \frac{1}{2}(\operatorname{senh} t - \operatorname{sen} t)$

38. **(a)** $W(t) = c$, a constante

(b) $W(t) = -8$

(c) $W(t) = 4$

39. **(b)** $u_1 = c_1 \cos t + c_2 \operatorname{sen} t + c_3 \cos\sqrt{6}t + c_4 \operatorname{sen}\sqrt{6}t$