EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARA ENGENHARIA ELÉTRICA

TE 315

Aula 04_2

ODE DE ORDEM SUPERIOR. COEFICIÊNTES CONSTANTES

ODE DE ORDEM SUPERIOR. COEFICIÊNTES CTES

INTRODUÇÃO

Considere a equação diferencial linear homogênea de ordem n

$$L[y] = a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y = 0$$

em que a_0, a_1, . . . , a_n são constantes reais e $a_0 \neq 0$.
Do que sabemos sobre equações lineares de segunda ordem com coeficientes constantes, esperamos que $y = e^{rt}$ seja solução para valores apropriados de r...de fato:

$$L[e^{rt}] = e^{rt} \underbrace{[a_0 r^n + a_1 r^{n-1} + \cdots + a_{n-1} r + a_n]}_{\text{equação característica } Z\,(r)} = 0$$

Como $a_0 \neq 0$, sabemos que Z(r) é um polinômio de grau n; logo, tem n zeros digamos r_1, r_2, . . . , r_n, alguns dos quais podem ser iguais. Podemos, portanto, escrever o polinômio característico na forma

$$Z(r) = a_0(r - r_1)(r - r_2) \cdots (r - r_n)$$

ODE DE ORDEM SUPERIOR. COEFICIÊNTES CTES

CASO 1. RAIZES REAIS E DIFERENTES

Se as raízes da equação característica são reais e todas são diferentes, então temos n soluções distintas $e^{r_1 t}$, $e^{r_2 t}$, . . . , $e^{r_n t}$. Se essas funções forem linearmente independentes, então a solução geral será

$$y(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t} + \cdots + c_n e^{r_n t}$$

Um modo de estabelecer a independência linear de $e^{r_1 t}$, $e^{r_2 t}$, . . . , $e^{r_n t}$ é calcular seu wronskiano...

Vamos ver um exemplo...

ODE DE ORDEM SUPERIOR. COEFICIÊNTES CTES

Exemplo 1

Encontre a solução geral de

$$y^{(4)} + 2y''' - 13y'' - 14y' + 24y = 0$$
$$y(0) = 1, y'(0) = -1, y''(0) = 0, y'''(0) = -1$$

Supondo que y = e^{rt}, precisamos determinar r resolvendo a equação (característica) polinomial

$$y(t) = e^{rt} \Rightarrow r^4 + 2r^3 - 13r^2 - 14r + 24 = 0$$
$$\Leftrightarrow (r-1)(r+2)(r-3)(r+4) = 0$$

Portanto, a solução geral é

$$y(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-2t} + c_3 e^{3t} + c_4 e^{-4t}$$

Exemplo 1

As condições iniciais exigem que $c_1, \ldots, c_4$ satisfaçam as quatro equações

$$\begin{aligned} &c_1 + c_2 + c_3 + c_4 = 1 \\ &c_1 - 2c_2 + 3c_3 - 4c_4 = -1 \\ &c_1 + 4c_2 + 9c_3 + 16c_4 = 0 \\ &c_1 - 8c_2 + 27c_3 - 64c_4 = -1 \end{aligned}$$

Resolvendo...

$$c_1 = \frac{1}{2}, c_2 = \frac{4}{5}, c_3 = -\frac{11}{70}, c_4 = -\frac{1}{7}$$

Portanto...

$$y(t) = \frac{1}{2}e^{t} + \frac{4}{5}e^{-2t} - \frac{11}{70}e^{3t} - \frac{1}{7}e^{-4t}$$

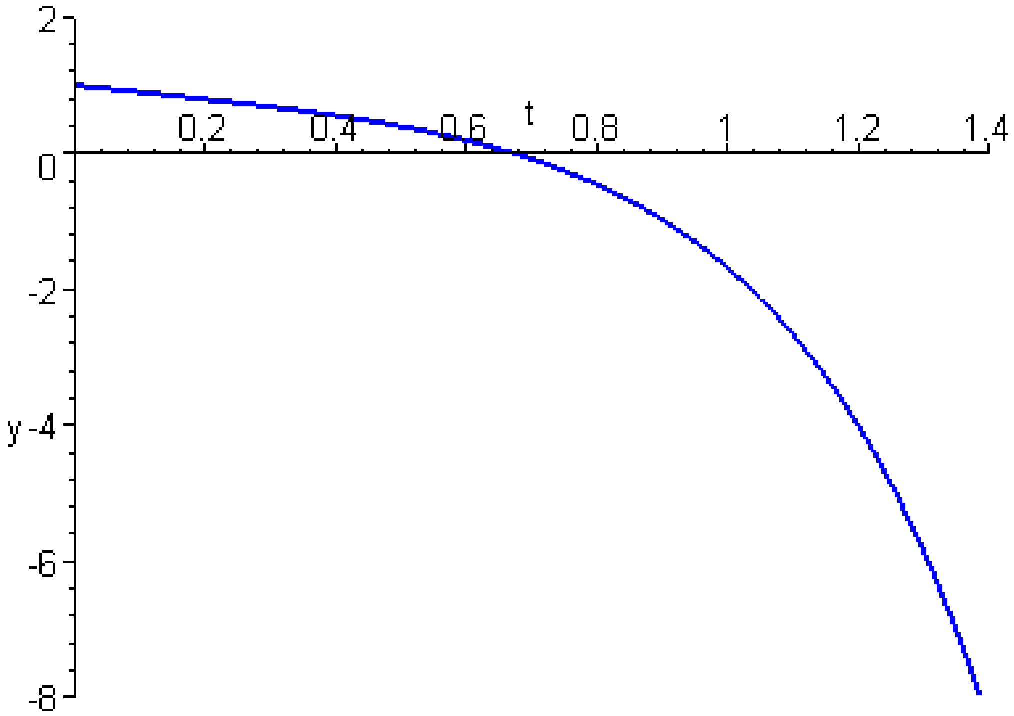
Vejamos o gráfico da solução...

ODE DE ORDEM SUPERIOR. COEFICIÊNTES CTES

Exemplo 1

O gráfico da solução está ilustrado na figura

$$y(t) = \frac{1}{2}e^{t} + \frac{4}{5}e^{-2t} - \frac{11}{70}e^{3t} - \frac{1}{7}e^{-4t}$$



ODE DE ORDEM SUPERIOR. COEFICIÊNTES CTES

CASO 2. RAIZES COMPLEXAS

Se a equação característica tiver raízes complexas, elas têm que aparecer em pares conjugados, $\lambda \pm i\mu$
Não é obrigatório que todas as raízes sejam complexas.
As soluções para casos com raízes complexas são da forma:

$$e^{(\lambda+i\mu)t} = e^{\lambda t}\cos\mu\, t + ie^{\lambda t}\operatorname{sen}\mu\, t$$
$$e^{(\lambda-i\mu)t} = e^{\lambda t}\cos\mu\, t - ie^{\lambda t}\operatorname{sen}\mu\, t$$

Em que da mesma forma que para equações de segunda ordem, substituímos as soluções complexas $e^{(\lambda+i\mu)t}$ e $e^{(\lambda-i\mu)t}$ pelas soluções reais

$$e^{\lambda t}\cos\mu\, t \quad e \quad e^{\lambda t}\operatorname{sen}\mu\, t$$

Vamos ver um exemplo...

ODE DE ORDEM SUPERIOR. COEFICIÊNTES CTES

Exemplo 2

Encontre a solução geral de $y''' - y = 0$

Teremos: $y(t) = e^{rt} \Rightarrow r^3 - 1 = 0 \Leftrightarrow (r-1)(r+r+1) = 0$

Em que:

$$r^2 + r + 1 = 0 \Leftrightarrow r = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$$

Portanto, a solução geral é

$$y(t) = c_1 e^{t} + c_2 e^{-t/2} \cos\left(\sqrt{3}t/2\right) + c_3 e^{-t/2} \operatorname{sen}\left(\sqrt{3}t/2\right)$$

Exemplo 3

Encontre a solução do problema de valor inicial a seguir:

$$y^{(4)} - y = 0 \qquad y(0) = \frac{7}{2} \qquad y'(0) = -4 \qquad y''(0) = \frac{5}{2} \qquad y'''(0) = -2$$

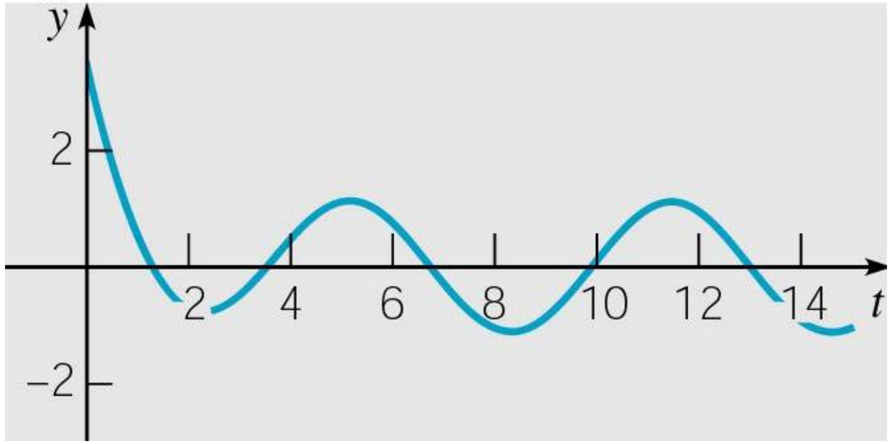
Teremos: $y(t) = e^{rt} \Rightarrow r^4 - 1 = 0 \Leftrightarrow (r^2 - 1)(r^2 + 1) = 0$

Logo, as raízes são r = 1, r = –1, r = i e r = –i, e a solução geral é

$$y(t) = c_1 e^{t} + c_2 e^{-t} + c_3 \cos(t) + c_4 \operatorname{sen}(t)$$

Se impusermos as condições iniciais encontraremos

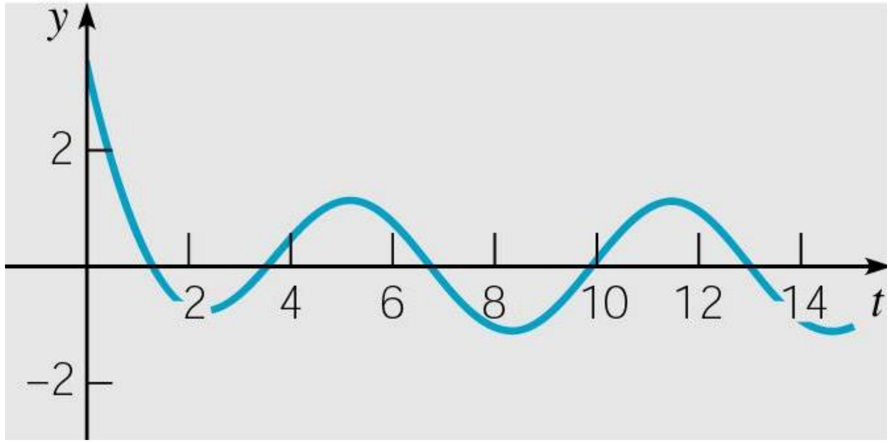
$$y(t) = 0e^{t} + 3e^{-t} + \frac{1}{2}\cos(t) - \operatorname{sen}(t)$$



ODE DE ORDEM SUPERIOR. COEFICIÊNTES CTES

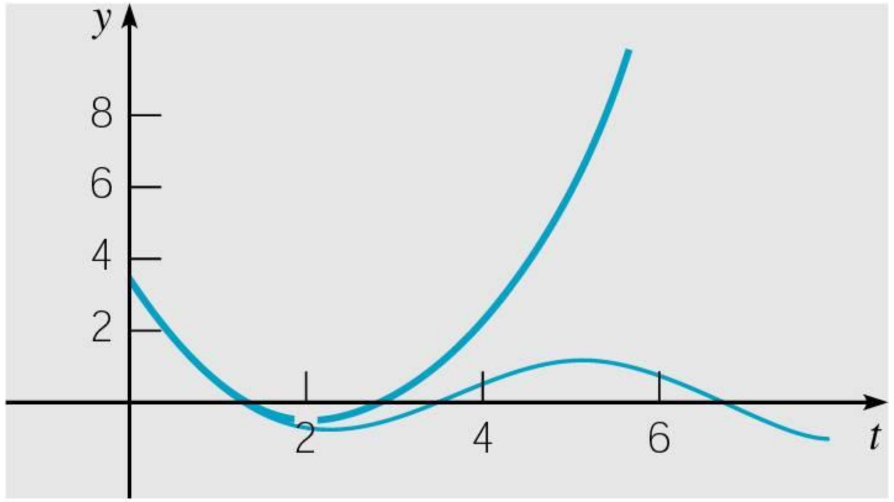
Exemplo 3

Observe que as condições iniciais fazem com que o coeficiente c_1 da parcela exponencial crescente na solução geral $y(t) = 0e^{t} + 3e^{-t} + \frac{1}{2}\cos(t) - \mathrm{sen}(t)$ seja zero. Essa parcela, portanto, está ausente na solução, por isso ela descreve um decaimento exponencial na parte transiente (ver figura).



No entanto, se as condições iniciais forem ligeiramente alteradas, então provavelmente c_1 não será nulo e a natureza da solução vai mudar fortemente. Por exemplo, se as três primeiras condições iniciais permanecerem iguais, mas o valor de $y'''(0)$ muda de –2 para –15/8, então a solução do problema de valor inicial se tornará:

$$y(t) = \frac{1}{32}e^{t} + \frac{95}{32}e^{-t} + \frac{1}{2}\cos(t) - \frac{17}{16}\mathrm{sen}(t)$$



CASO 3. RAIZES REPETIDAS

Se r_1 for uma raiz repetida para a equação linear de segunda ordem $a_0y'' + a_1y' + a_0y = 0$, então as duas soluções linearmente independentes eram e^{r_1t} e $t\,e^{r_1t}$.
Para uma equação de ordem n, se uma raiz de $Z(r) = 0$, digamos $r = r_1$, tem multiplicidade s (em que $s \leq n$), então, generalizando o caso de segunda ordem...

$$e^{r_kt}, te^{r_kt}, t^2e^{r_kt}, \dots, t^{s-1}e^{r_kt}$$

Se uma raiz complexa $\lambda + i\mu$ aparece repetida s vezes, sua complexa conjugada $\lambda - i\mu$ também aparece repetida s vezes. Correspondendo a essas 2s soluções complexas repetidas, podemos encontrar 2s soluções reais observando que as partes reais e imaginárias de $e^{(\lambda+i\mu)t}$, $te^{(\lambda+i\mu)t}$, . . . , $t^{s-1}e^{(\lambda+i\mu)t}$ também são soluções linearmente independentes, ou escritas de outra forma, elas seriam:

$$e^{\lambda t}\cos\mu t \quad e^{\lambda t}\,\mathrm{sen}\,\mu t \qquad te^{\lambda t}\cos\mu t \quad te^{\lambda t}\,\mathrm{sen}\,\mu t, \dots,$$
$$t^{s-1}e^{r_kt}\cos\mu t \quad t^{s-1}e^{r_kt}e^{\lambda t}\,\mathrm{sen}\,\mu t,$$

Vamos ver um exemplo...

ODE DE ORDEM SUPERIOR. COEFICIÊNTES CTES

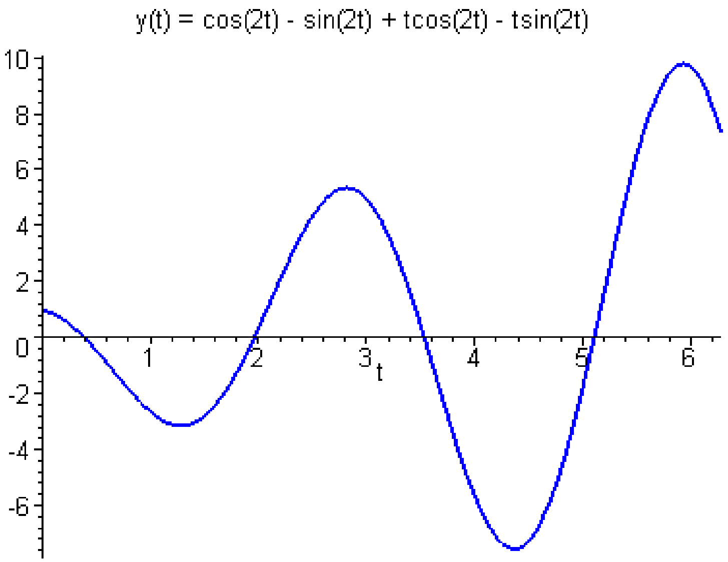
Exemplo 4

Encontre a solução geral de $y^{(4)} + 8y'' + 16y = 0$

A equação característica é:

$$y(t) = e^{rt} \Rightarrow r^4 + 8r + 16 = 0 \Leftrightarrow (r^2+4)(r^2+4) = 0$$

As raízes são r = 2i, 2i, –2i, –2i, e a solução geral é



A solução geral é:

$$y(t) = c_1 \cos 2\,t + c_2 \operatorname{sen} 2\,t + c_3 t \cos(2t) + c_4 t \operatorname{sen}(2t)$$

Encontrar raízes pode ser difícil, vejamos o próximo exemplo...

ODE DE ORDEM SUPERIOR. COEFICIÊNTES CTES

Exemplo 5

Encontre a solução geral de $y^{(4)} + y = 0$ A equação característica é: $r^4 + 1 = 0$

Para encontrar as raízes quartas de -1 rescrevemos: $-1 = \cos\pi + i\; sen\,\pi = e^{i\pi}$

Mas, o ângulo está determinado a menos de um múltiplo de 2π. Assim,

$$-1 = \cos(\pi + 2m\pi) + i\; sen\,(\pi + 2m\pi) = e^{i(\pi + 2m\pi)}$$

Logo, $$\sqrt[4]{-1} = \cos\left(\frac{\pi + 2m\pi}{4}\right) + i\; sen\left(\frac{\pi + 2m\pi}{4}\right)$$

Evidentemente as raízes diferentes são obtidas fazendo m=0,...n-1! e elas são:

$$\frac{1+i}{\sqrt{2}} \quad \frac{-1+i}{\sqrt{2}} \quad \frac{-1-i}{\sqrt{2}} \quad \frac{1-i}{\sqrt{2}} \qquad\qquad y(t) = e^{rt}$$

A solução geral é: $$y(t) = e^{\frac{t}{\sqrt{2}}}(c_1 \cos\frac{t}{\sqrt{2}} + c_2\,\mathrm{sen}\frac{t}{\sqrt{2}}) + e^{-\frac{t}{\sqrt{2}}}(c_3 t \cos\frac{t}{\sqrt{2}} + c_4 t\,\mathrm{sen}\frac{t}{\sqrt{2}})$$

ODE DE ORDEM SUPERIOR. COEFICIÊNTES CTES

Lista de exercícios disponível em:

http://www.eletrica.ufpr.br/p/professores:patricio:inicial

Disciplina TE315 (Equações Diferenciais para Engenharia Elétrica)

Gabaritos disponíveis no mesmo endereço