EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARA ENGENHARIA ELÉTRICA
TE 315

Aula 04_1

ODE DE ORDEM SUPERIOR. TEORIA GERAL

INTRODUÇÃO

Uma equação diferencial linear de ordem n é uma equação da forma

$$P_0(t)\frac{d^n y}{dt^n} + P_1(t)\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \cdots + P_{n-1}(t)\frac{dy}{dt} + P_n(t)y = G(t)$$

Supomos que as funções $P_0, \ldots, P_n$ e G são funções reais e contínuas definidas em algum intervalo I: $\alpha < t < \beta$, e que P_0 nunca se anula nesse intervalo. Então, dividindo a equação por $P_0(t)$, obtemos

$$L[y] = \frac{d^n y}{dt^n} + p_1(t)\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \cdots + p_{n-1}(t)\frac{dy}{dt} + p_n(t)y = g(t)$$

Como esta equação envolve a n-ésima derivada, serão necessárias, n integrações gerando n constantes arbitrárias. Portanto, que, para obter uma única solução, será preciso especificar n condições iniciais

$$y(t_0) = y_0, y'(t_0) = y_0', \ldots, y^{(n-1)}(t_0) = y_0^{(n-1)}$$

TEOREMA 1

O teorema a seguir, semelhante ao teorema para equações de segunda ordem, garante que o problema de valor inicial tem solução e que ela é única.
Considere o problema de valor inicial de ordem n a seguir:

$$\frac{d^n y}{dt^n} + p_1(t)\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \cdots + p_{n-1}(t)\frac{dy}{dt} + p_n(t)y = g(t)$$
$$y(t_0) = y_0, y'(t_0) = y_0', \ldots, y^{(n-1)}(t_0) = y_0^{(n-1)}$$

Se as funções p_1, p_2, . . . , p_n e g são contínuas em um intervalo aberto I, então existe exatamente uma solução y = $\phi(t)$ da equação diferencial que também satisfaz as condições iniciais, em que t_0 é qualquer ponto em I. Essa solução existe em todo o intervalo I.

Vamos ver o caso da equação homogênea

A Equação Homogênea

Como no problema correspondente de segunda ordem, vamos discutir primeiro a equação homogênea

$$L[y] = \frac{d^n y}{dt^n} + p_1(t)\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \cdots + p_{n-1}(t)\frac{dy}{dt} + p_n(t)y = 0$$

Se as funções $y_1, y_2, \ldots, y_n$ são soluções da equação, segue, por cálculo direto, que a combinação linear a seguir também é solução

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + \cdots + c_n y_n(t)$$

Todas as soluções da equação podem ser expressas como uma combinação linear de y1, . . . , yn se for possível escolher as constantes $c_1, \ldots, c_n$ de modo que a combinação linear delas satisfaça as condições iniciais

$$\begin{aligned} c_1 y_1(t_0) + \cdots + c_n y_n(t_0) &= y_0 \\ c_1 y_1'(t_0) + \cdots + c_n y_n'(t_0) &= y_0' \\ &\vdots \\ c_1 y_1^{(n-1)}(t_0) + \cdots + c_n y_n^{(n-1)}(t_0) &= y_0^{(n-1)} \end{aligned}$$

UFPR
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

A Equação Homogênea

Esse sistema de equações tem uma única solução se o wronskiano não é nulo em $t = t_0$

$$W(y_1, y_2, \ldots, y_n)(t_0) = \begin{vmatrix} y_1(t_0) & y_2(t_0) & \cdots & y_n(t_0) \\ y_1'(t_0) & y_2'(t_0) & \cdots & y_n'(t_0) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(t_0) & y_2^{(n-1)}(t_0) & \cdots & y_n^{(n-1)}(t_0) \end{vmatrix}$$

Como t_0 pode ser qualquer ponto do intervalo I, é necessário que $W(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ seja diferente de zero em todos os pontos do intervalo.

Do mesmo modo como para as equações de segunda ordem, pode-se mostrar que, se $y_1, y_2, \ldots, y_n$ são soluções da equação, então $W(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ ou é zero para todo t no intervalo I, ou nunca se anula aí.

A partir destes resultados podemos escrever o seguinte teorema:

ODE DE ORDEM SUPERIOR. TEORIA GERAL

TEOREMA 2

Considere novamente o problema de valor inicial de ordem n a seguir:

$$\frac{d^n y}{dt^n} + p_1(t)\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \cdots + p_{n-1}(t)\frac{dy}{dt} + p_n(t)y = g(t)$$
$$y(t_0) = y_0, y'(t_0) = y_0', \ldots, y^{(n-1)}(t_0) = y_0^{(n-1)}$$

Se as funções $p_1, p_2, \ldots, p_n$ forem contínuas no intervalo aberto I, se as funções $y_1, y_2, \ldots, y_n$ forem soluções da equação diferencial e se $W(y_1, y_2, \ldots, y_n)(t) \neq 0$ para pelo menos um ponto t em I, então toda solução y(t) da equação é uma combinação linear das soluções $y_1, y_2, \ldots, y_n$.

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + \cdots + c_n y_n(t)$$

TEOREMA 2

Um conjunto de soluções $y_1, y_2, . . ., y_n$ cujo wronskiano não se anula é chamado de conjunto fundamental de soluções.

Como todas as soluções da equação são da forma $y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + \cdots + c_n y_n(t)$, usamos o termo solução geral para nos referir a uma combinação linear arbitrária de qualquer conjunto fundamental de soluções

Dependência e Independência Lineares. Lembrando a álgebra linear, as funções $f_1, f_2, ..., f_n$ são ditas linearmente dependentes em um intervalo I se existir um conjunto de constantes $k_1, k_2, . . ., k_n$, nem todas nulas, tal que

$$k_1 f_1(t) + k_2 f_2(t) + \cdots + k_n f_n(t) = 0$$

Caso contrario são ditas linearmente independentes

Vejamos alguns exemplos...

ODE DE ORDEM SUPERIOR. TEORIA GERAL

UFPR
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

EXEMPLO 1

Determine se as funções $f_1(t)=1$, $f_2(t)=t$ e $f_3(t)=t^2$ são linearmente independentes ou linearmente dependentes no intervalo I: $-\infty < t < \infty$.

Formamos a combinação linear e igualamos a zero... $k_1 + k_2 t + k_3 t^2 = 0$

Se esta equação for válida para todo t em I, então ela certamente será válida em três pontos distintos em I. Quaisquer três pontos servirão para nosso propósito, escolhemos $t = 0$, $t = 1$ e $t = -1$. Calculando a equação em cada um desses pontos, obtemos o sistema de equações

$$\begin{aligned} k_1 &= 0 \\ k_1 + k_2 + k_3 &= 0 \\ k_1 - k_2 + k_3 &= 0 \end{aligned}$$

Da primeira $k_1 = 0$; das outras duas equações segue que $k_2 = k_3 = 0$ também. Logo, as funções dadas não são linearmente dependentes em I e, portanto, têm que ser linearmente independentes.

ODE DE ORDEM SUPERIOR. TEORIA GERAL

EXEMPLO 2

Determine se as funções $f_1(t)=1$, $f_2(t)=2+t$, $f_3(t)=3-t^2$ e $f_4(t)=4t+t^2$ são linearmente independentes ou linearmente dependentes no intervalo I: $-\infty < t < \infty$.

Formamos novamente a CL $k_1 + k_2(2+t) + k_3(3-t^2) + k_4(4t+t^2) = 0$

Rearranjando termos... $(k_1+2k_2+3k_3) + (k_2+4k_4)t + (-k_3+k_4)t^2 = 0$

Para que essa expressão seja nula em o intervalo, certamente basta requerer que

$$(k_1+2k_2+3k_3 = 0$$

$$(k_2+4k_4) = 0$$

$$(-k_3+k_4) = 0$$

Essas três equações com quatro incógnitas têm infinitas soluções. Por exemplo, se $k_4 = 1$, então $k_3 = 1$, $k_2 = -4$ e $k_1 = 5$.

Portanto as funções são Linearmente Dependentes e não formam um conjunto fundamental de soluções nesse intervalo I.

A Equação Não Homogênea

Vamos discutir agora a equação não homogênea

$$L[y] = \frac{d^n y}{dt^n} + p_1(t)\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \cdots + p_{n-1}(t)\frac{dy}{dt} + p_n(t)y = g(t)$$

Se Y_1 e Y_2 são duas soluções quaisquer da equação, segue imediatamente, da linearidade do operador L, que

$$L[Y_1 - Y_2] = L[Y_1] - L[Y_2] = g(t) - g(t) = 0$$

Portanto existem os coeficientes c_1, c_2, ..., c_n tais que:

$$Y_1(t) - Y_2(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + \cdots + c_n y_n(t)$$

De onde segue que qualquer solução y(t) da equação não homogênea pode ser escrita na forma

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + \cdots + c_n y_n(t) + Y(t)$$

em que Y é alguma solução particular da equação não homogênea

UFPR
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

RESUMO

O problema básico é determinar um conjunto fundamental de soluções y_1, y_2,...,y_n da equação homogênea.

Se os coeficientes forem constantes, esse é um problema relativamente simples que será discutido na próxima aula.

Se os coeficientes não forem constantes, é necessário, em geral, usar métodos numéricos como ou de expansão em série que veremos mais adiante.

Para encontrar uma solução particular Y(t), temos novamente o método dos coeficientes indeterminados e como veremos o da variação de parâmetros.

UFPR
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

Lista de exercícios disponível em:

http://www.eletrica.ufpr.br/p/professores:patricio:inicial

Disciplina TE315 (Equações Diferenciais para Engenharia Elétrica)

Gabaritos disponíveis no mesmo endereço