LISTA 03_5 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS
Modelagem com equações de segunda ordem
Respostas no final
Gabaritos na página do professor

Nos exercícios a seguir lembre da analogia entre o sistema massa mola e o circuito LRC

Oscilações mecânicas e elétricas

Em cada um dos problemas de 1 a 4, determine ω_0, R e δ, de modo a escrever a expressão dada na forma s = $R\cos(\omega_0 t - \delta)$

1. $s = 3\cos 2t + 4\,\text{sen}\,2t$
2. $s = -\cos t + \sqrt{3}\,\text{sen}\,2t$
3. $s = 4\cos 3t - 2\,\text{sen}\,3t$
4. $s = -2\cos \pi t - 3\,\text{sen}\,\pi t$

6.Uma massa de 100 g estica uma mola de 5 cm. Se a massa for colocada em movimento a partir de sua posição de equilíbrio com uma velocidade apontando para baixo de 10 cm/s, e se não houver amortecimento, determine a posição s da massa em qualquer instante t. Quando a massa retorna pela primeira vez à sua posição de equilíbrio?

8.Um circuito elétrico em série tem um capacitor de $0{,}25 \times 10^{-6}$ F e um indutor de 1 H. Se a carga inicial no capacitor for de 10^{-6} C e se não houver corrente inicial, encontre a carga Q no capacitor em qualquer instante t.

12.Um circuito em série tem um capacitor de 10^{-3} F, um resistor de 3×10^2 Ω e um indutor de 0,2 H. A carga inicial no capacitor é 10^{-6} C e não há corrente inicial. Encontre a carga Q no capacitor em qualquer instante t.

13.Certo sistema vibrando satisfaz a equação $s'' + \gamma s' + s = 0$. Encontre o valor do coeficiente de amortecimento γ para o qual o quase período do movimento amortecido é 50% maior do que o período do movimento correspondente sem amortecimento.

16.Mostre que $A \cos \omega_0 t + B \operatorname{sen} \omega_0 t$ pode ser escrito na forma $r \operatorname{sen}(\omega_0 t - \theta)$. Determine r e θ em função de A e B. Se $R \cos(\omega_0 t - \delta) = r \operatorname{sen}(\omega_0 t - \theta)$, determine a relação entre R, r, δ e θ.

18.Se um circuito em série tem um capacitor de $C = 0{,}8 \times 10^{-6}$ F e um indutor de L = 0,2 H, encontre a resistência R de modo que o circuito tenha amortecimento crítico.

26.Considere o problema de valor inicial
$ms'' + \gamma s' + ks = 0, \quad s(0) = s0, \quad s'(0) = \upsilon 0.$
Suponha que $\gamma^2 < 4km$.
(a) Resolva o problema de valor inicial.
(b) Escreva a solução na forma $s(t) = R \exp(-\gamma t/2m) \cos(\mu t - \delta)$. Determine R em função de m, γ, k, s_0 e v_0.

(c) Investigue a dependência de R no coeficiente de amortecimento γ para valores fixos dos outros parâmetros.

Oscilações forçadas

Em cada um dos problemas de 1 a 4, escreva a expressão dada como um produto de duas funções trigonométricas com frequências diferentes.

1. $\cos 9t - \cos 7t$
2. $\text{sen } 7t - \text{sen } 6t$
3. $\cos \pi t + \cos 2\pi t$
4. $\text{sen } 3t + \text{sen } 4t$

9. Se um sistema mola-massa não amortecido, com uma massa pesando 6 lb (≈ 2,7 kg) e uma constante da mola de 1 lb/in, for colocado em movimento de repente, no instante $t = 0$, por uma força externa de $4 \cos 7t$ lb, determine a posição da massa em qualquer instante e desenhe o gráfico de seu deslocamento em função de t.

10. Uma massa pesando 8 lb (≈ 3,6 kg) estica uma mola de 6 in (≈ 15 cm). Uma força externa de $8 \text{ sen } 8t$ lb age sobre o sistema. Se a massa é puxada 3 in para baixo e depois é solta, determine a posição da massa em qualquer instante de tempo. Determine os quatro

primeiros instantes em que a velocidade da massa é nula.

11. Uma mola é esticada 6 in por uma massa pesando 8 lb. A massa está presa a um mecanismo amortecedor que tem uma constante de amortecimento de 0,25 lb · s/ft (1 ft (pé) = 12 in) e está sob a ação de uma força externa igual a 4 cos 2t lb.

(a) Determine a resposta estado estacionário deste sistema.

(b) Se a massa dada for substituída por uma massa m, determine o valor de m para o qual a amplitude da resposta estado estacionário é máxima.

16. Um circuito em série tem um capacitor de $0{,}25 \times 10^{-6}$ F, um resistor de $5 \times 10^3\ \Omega$ e um indutor de 1 H. A carga inicial no capacitor é zero. Se uma bateria de 12 volts for conectada ao circuito e o circuito for fechado em t = 0, determine a carga no capacitor em t = 0,001 s, em t = 0,01 s e em qualquer instante t. Determine, também, a carga limite quando $t \to \infty$.

RESPOSTAS
Oscilações mecânicas e elétricas

1. $u = 5\cos(2t - \delta)$, $\delta = \arctan(4/3) \cong = 0{,}9273$
2. $u = 2\cos(t - 2\pi/3)$
3. $u = 2\sqrt{5}\cos(3t - \delta)$, $\delta = -\arctan(1/2) \cong -0{,}4636$
4. $u = \sqrt{13}\cos(\pi t - \delta)$, $\delta = \pi + \arctan(3/2) \cong 4{,}1244$
5. $u = \frac{1}{4}\cos 8t$ pés, t em s; $\omega = 8$ rad/s, $T = \pi/4$ s, $R = 1/4$ pé
6. $u = \frac{5}{7}\,\mathrm{sen}\,14t$ cm, t em s; $t = \pi/14$ s
7. $u = (1/4\sqrt{2})\,\mathrm{sen}(8\sqrt{2}\,t) - \frac{1}{12}\cos(8\sqrt{2}\,t)$ pés, t em s; $\omega = 8\sqrt{2}$ rad/s, $T = \pi/4\sqrt{2}$ s, $R = \sqrt{11/288} \cong 0{,}1954$ pés, $\delta = \pi - \arctan(3/\sqrt{2}) \cong 2{,}0113$
8. $Q = 10^{-6}\cos 2000t$ C, t em s
9. $u = e^{-10t}[2\cos(4\sqrt{6}\,t) + (5/\sqrt{6})\,\mathrm{sen}(4\sqrt{6}\,t)]$ cm, t em s; $\mu = 4\sqrt{6}$ rad/s, $T_d = \pi/2\sqrt{6}$ s, $T_d/T = 7/2\sqrt{6} \cong 1{,}4289$, $\tau \cong 0{,}4045$ s
10. $u = (1/8\sqrt{31})e^{-2t}\,\mathrm{sen}(2\sqrt{31}\,t)$ pés, t em s; $t = \pi/2\sqrt{31}$ s, $\tau \cong 1{,}5927$ s
11. $u \cong 0{,}057198e^{-0{,}15t}\cos(3{,}87008\,t - 0{,}50709)$ m, t em s; $\mu = 3{,}87008$ rad/s, $\mu/\omega_0 = 3{,}87008/\sqrt{15} \cong 0{,}99925$
12. $Q = 10^{-6}(2e^{-500t} - e^{-1000t})$ C; t em s
13. $\gamma = \sqrt{20/9} \cong 1{,}4907$
16. $r = \sqrt{A^2 + B^2}$, $r\cos\theta = B$, $r\,\mathrm{sen}\,\theta = -A$; $R = r$; $\delta = \theta + (4n+1)\pi/2$, $n = 0, 1, 2, \ldots$
17. $\gamma = 8$ lb·s/pé
18. $R = 10^3\ \Omega$
20. $\lambda\ 0 < -\gamma u_0/2m$
22. $2\pi/\sqrt{31}$
23. $\gamma = 5$ lb·s/pé
24. $k = 6$, $v = \pm 2\sqrt{5}$
25. **(a)** $t \cong 41{,}715$

    (d) $\gamma_0 \cong 1{,}73$, $\min t \cong 4{,}87$

    (e) $\tau = (2/\gamma)\ln(400/\sqrt{4 - \gamma^2})$
26. **(a)** $u(t) = e^{-\gamma t/2m}\left[u_0\sqrt{4km - \gamma^2}\cos\mu t + (2mv_0 + \gamma u_0)\,\mathrm{sen}\,\mu t\right]/\sqrt{4km - \gamma^2}$

    (b) $R^2 = 4m(ku_0^2 + \gamma u_0 v_0 + mv_0^2)/(4km - \gamma^2)$

Oscilações forçadas

1. $-2 \operatorname{sen} 8t \operatorname{sen} t$
2. $2 \operatorname{sen}(t/2) \cos(13t/2)$
3. $2 \cos(3\pi t/2) \cos(\pi t/2)$
4. $2 \operatorname{sen}(7t/2) \cos(t/2)$
5. $u'' + 256u = 16 \cos 3t, \quad u(0) = \frac{1}{6}, \quad u'(0) = 0,$ u em pés, t em s
6. $u + 10u + 98u = 2 \operatorname{sen}(t/2), \quad u(0) = 0, \quad u(0) = 0{,}03,$ u em m, t em s
7. (a) $u = \frac{151}{1482} \cos 16t + \frac{16}{247} \cos 3t$

   (c) $\omega = 16$ rad/s
8. (a) $u = \frac{1}{153.281}[160e^{-5t} \cos(\sqrt{73}\,t) + \frac{383.443}{7300} e^{-5t} \operatorname{sen}(\sqrt{73}\,t) - 160\cos(t/2) + 3128 \operatorname{sen}(t/2)]$

   (b) Os dois primeiros termos são transientes.

   (d) $\omega = 4\sqrt{3}$ rad/s
9. $u = \frac{64}{45}(\cos 7t - \cos 8t) = \frac{128}{45} \operatorname{sen}(t/2) \operatorname{sen}(15t/2)$ pés, t em s
10. $u = (\cos 8t + \operatorname{sen} 8t - 8t \cos 8t)/4$ pés, t em s; $1/8, \quad \pi/8, \quad \pi/4, \quad 3\pi/8$ s
11. (a) $\frac{8}{901}(30 \cos 2t + \operatorname{sen} 2t)$ pés, t em s

    (b) $m = 4$ *slugs**
12. $u = (\sqrt{2}/6) \cos(3t - 3\pi/4)$ m, t em s

15. $$u = \begin{cases} F_0(t - \operatorname{sen} t), & 0 \le t \le \pi \\ F_0[(2\pi - t) - 3 \operatorname{sen} t], & \pi < t \le 2\pi \\ -4F_0 \operatorname{sen} t, & 2\pi < t < \infty \end{cases}$$

16. $Q(t) = 10^{-6}(e^{-4000t} - 4e^{-1000t} + 3)$ C, t em s, $Q(0{,}001) \cong 1{,}5468 \times 10^{-6}$; $Q(0{,}01) \cong 2{,}9998 \times 10^{-6}$; $Q(t) \to 3 \times 10^{-6}$ quando $t \to \infty$
17. (a) $u = [32(2 - \omega^2) \cos \omega t + 8\omega \operatorname{sen} \omega t]/(64 - 63\omega^2 + 16\omega^4)$

    (b) $A = 8/\sqrt{64 - 63\omega^2 + 16\omega^4}$

    (d) $\omega = 3\sqrt{14}/8 \cong 1{,}4031, \qquad A = 64/\sqrt{127} \cong 5{,}6791$
18. (a) $u = 3(\cos t - \cos \omega t)/(\omega^2 - 1)$
19. (a) $u = [(\omega^2 + 2) \cos t - 3 \cos \omega t]/(\omega^2 - 1) + \operatorname{sen} t$