

# **EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARA ENGENHARIA ELÉTRICA**

## **TE 315**

### **Aula 03\_5**

## **MODELAGEM COM EQUAÇÕES DE SEGUNDA ORDEM**

## INTRODUÇÃO

Uma das razões para estudar equações lineares de segunda ordem com coeficientes constantes é que elas **servem como modelos matemáticos de muitos processos físicos importantes.**

Duas áreas importantes de aplicações são os campos de vibrações mecânicas e **elétricas.**

Por exemplo, o movimento de uma massa presa em uma mola e o **fluxo de corrente elétrica em um circuito simples em série**

Vamos nos concentrar nos sistemas elétricos, vamos estudar em detalhe o caso do circuito RLC

# Modelagem com equações 2º ordem

## O Circuito RLC

Considere uma indutância  $L$  em série com uma resistência  $R$  e um capacitor  $C$ , alimentados por uma fonte externa  $E(t)$  como mostra a Figura.

Nosso interesse é estudar o comportamento da corrente com o tempo, além da carga e a tensão do capacitor com o tempo.

As quedas de tensão nestes elementos serão:

$$V = Ri \text{ (resistor)}$$

$$V = q/c \text{ (capacitor)}$$

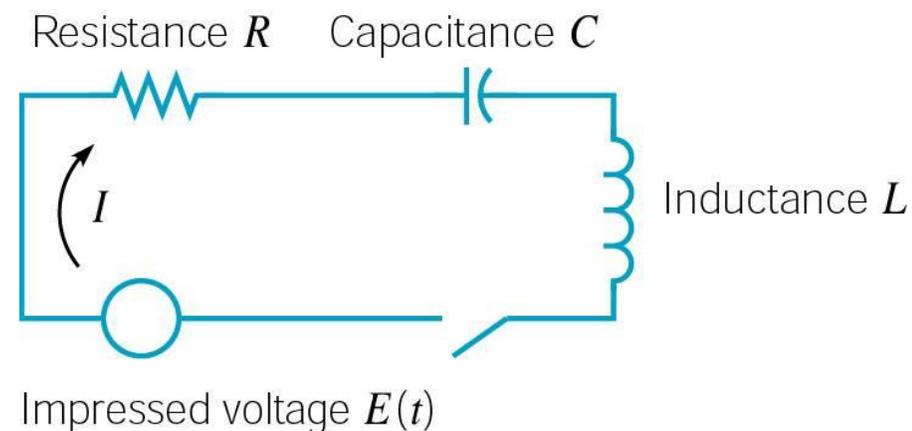
$$V = L di/dt \text{ (no indutor)}$$

Aplicando a Lei das Malhas de Kirchhoff

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{q}{C} = E(t)$$

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{q}{LC} = \frac{1}{L} E(t)$$

Em geral,  $E(t)$  é uma função senoidal ou cossenoide

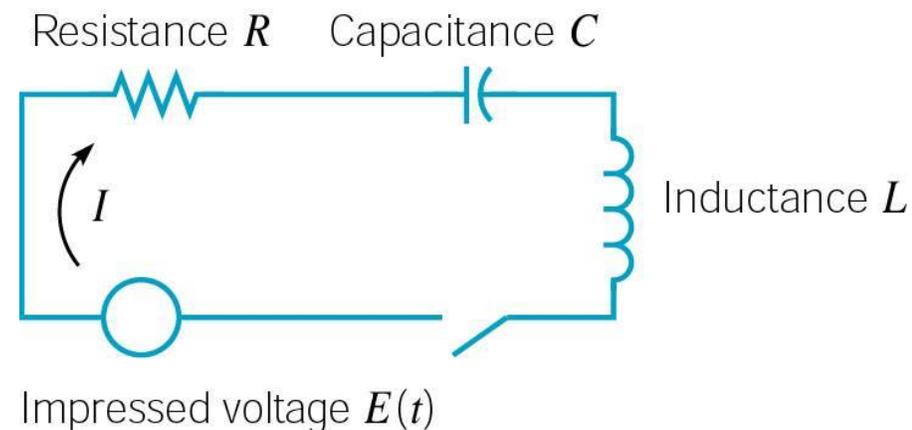


# Modelagem com equações 2º ordem

## O Circuito RLC

Veja que esta equação é exatamente do tipo que estudamos

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dq}{dt} + \frac{q}{LC} = \frac{1}{L} E(t) \quad ay'' + by' + cy = g(t)$$



A formulação completa do problema requer que especifiquemos duas **condições iniciais**, a saber: a carga inicial do capacitor  $q(t=0)=q_0$  e a corrente inicial no circuito  $i(t=0)=i_0$

Como sabemos pelo **Teorema 1** da aula correspondente, essas condições fazem com que o problema matemático tenha **uma única solução**. Isso é consistente com nossa intuição física de que, dada uma carga inicial e ligado o circuito, a carga do capacitor estará **univocamente determinada** em todos os instantes de tempo futuros.

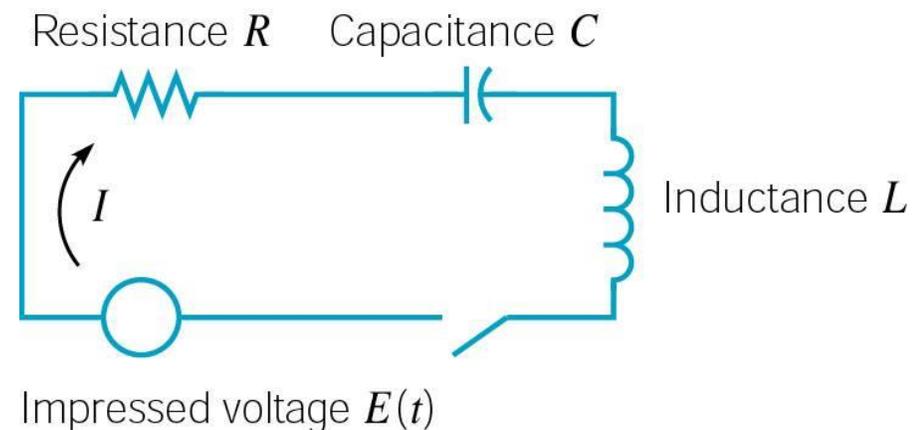
Vamos **começar pelo caso homogêneo** e depois analisaremos o caso não homogêneo.

# Modelagem com equações 2º ordem

## O Circuito RLC

### Exemplo 1

Vamos obter a ODE no seguinte caso: suponha um indutor de 0,125 Henry, um resistor de 2 Ohms e um capacitor de 1/24 F.



Nossa equação fica:

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + 16 \frac{dq}{dt} + 192 q = 8 E(t)$$

Vamos analisar o caso homogêneo primeiro, ou seja:

$$\frac{d^2 q}{dt^2} + 16 \frac{dq}{dt} + 192 q = 0$$

Para completar a colocação do problema podemos considerar que o capacitor está com uma carga de 0,5 C no momento  $t=0$  e que a corrente inicial é zero ou seja antes de fechar a chave temos:  $q(0)=1/2$  e  $q'(0)=0$

# Modelagem com equações 2º ordem

## O Circuito RLC

### Exemplo 1

Se analisamos a equação característica veremos que

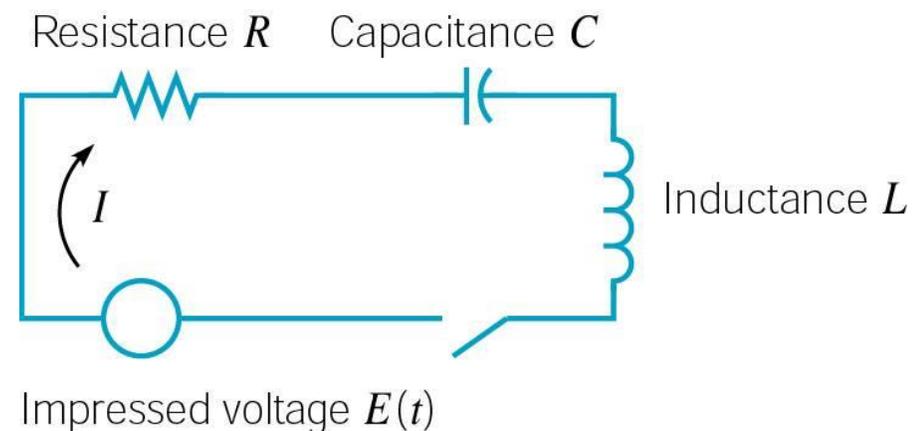
$$r^2 + 16r + 192 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = \frac{-16 \pm \sqrt{16^2 - 4 \cdot 192}}{2} = \frac{-16 \pm \sqrt{512} i}{2} = 8(-1 \pm \sqrt{2} i)$$

Portanto podemos resolver aplicando o método para raízes complexas

Lembrando que chamávamos  $r_1 = \lambda + i\mu$ ,  $r_2 = \lambda - i\mu$  e que a solução geral era:

$$q(t) = c_1 e^{\lambda t} \cos \mu t + c_2 e^{\lambda t} \sin \mu t$$

Portanto a solução geral será:  $q(t) = c_1 e^{-8t} \cos(8\sqrt{2} t) + c_2 e^{-8t} \sin(8\sqrt{2} t)$



# Modelagem com equações 2º ordem

## O Circuito RLC

### Exemplo 1

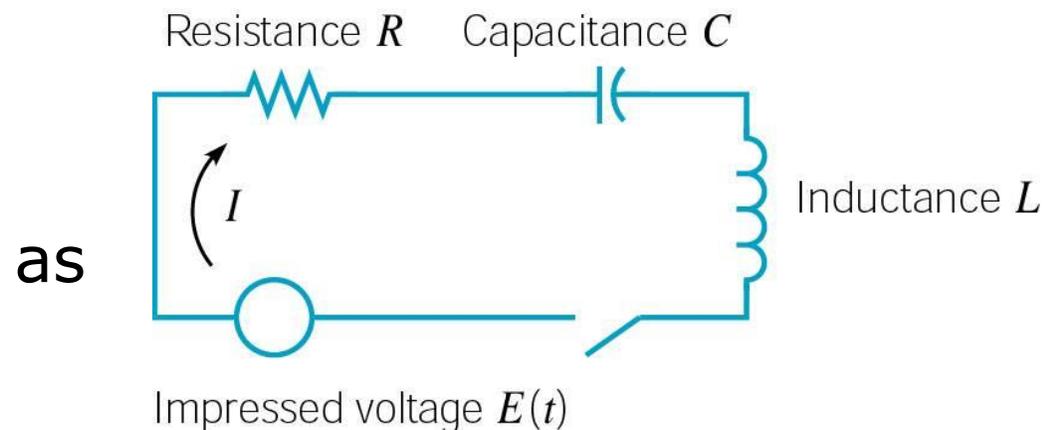
Para encontrar  $c_1$  e  $c_2$  utilizamos as condições iniciais  $q(0)=1/2$  e  $q'(0)=0$

$$q(t) = c_1 e^{-8t} \cos(8\sqrt{2} t) + c_2 e^{-8t} \sin(8\sqrt{2} t)$$

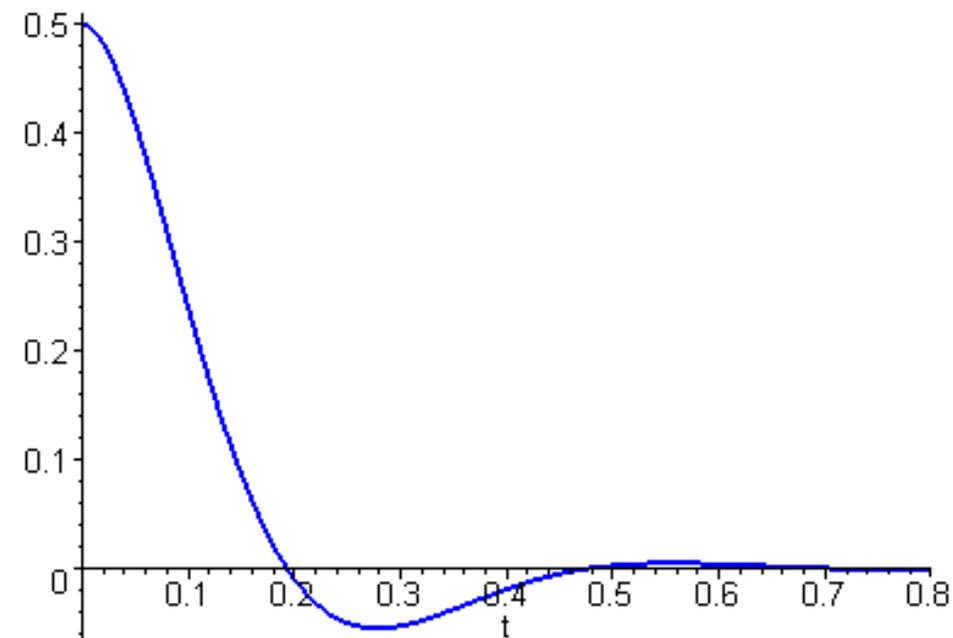
$$\left. \begin{array}{l} c_1 = \frac{1}{2} \\ -8c_1 + 8\sqrt{2}c_2 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow c_1 = \frac{1}{2}, \quad c_2 = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$q(t) = \frac{1}{2} e^{-8t} \cos(8\sqrt{2} t) + \frac{1}{2\sqrt{2}} e^{-8t} \sin(8\sqrt{2} t)$$

Para encontrar  $c_1$  e  $c_2$  utilizamos as condições iniciais  $q(0)=1/2$  e  $q'(0)=0$



$$y(t) = \frac{\sqrt{2}}{4} \exp(-8t) \sin(8\sqrt{2}t) + \frac{1}{2} \exp(-8t) \cos(8\sqrt{2}t)$$

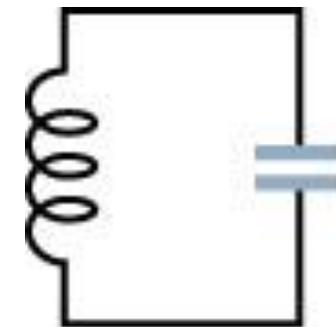


# Modelagem com equações 2º ordem

## O Circuito LC

### Exemplo 2

No mesmo caso anterior, vamos supor agora que não temos nem fonte externa ( $E(t)=0$ ) nem resistor ( $R=0$ )

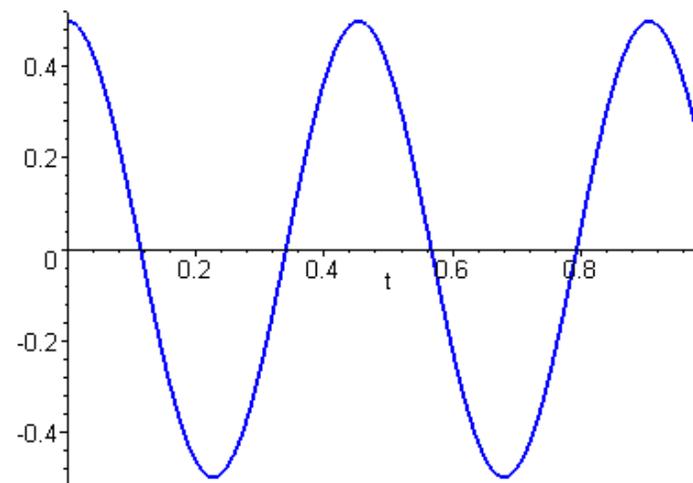


Nossa equação fica:  $q'' + 192 q = 0$   $r_{1,2} = \pm \frac{\sqrt{-4 \cdot 192}}{2} = \pm \sqrt{192} i = \pm 8\sqrt{3} i$

A solução geral será:  $q(t) = c_1 e^{0t} \cos 8\sqrt{3} t + c_2 e^{0t} \sin 8\sqrt{3} t$   
 $u'' + 192u = 0, u(0)=1/2, u'(0)=0$

$$\left. \begin{array}{l} c_1 = \frac{1}{2} \\ 0c_1 + 8\sqrt{2}c_2 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow c_1 = \frac{1}{2}, \quad c_2 = 0$$

$$q(t) = \frac{1}{2} \cos 8\sqrt{3} t$$



# Modelagem com equações 2º ordem



## O Circuito LC

Analisando o circuito

$$q(t) = \frac{1}{2} \cos 8\sqrt{3} t$$

A solução geral deste circuito é:

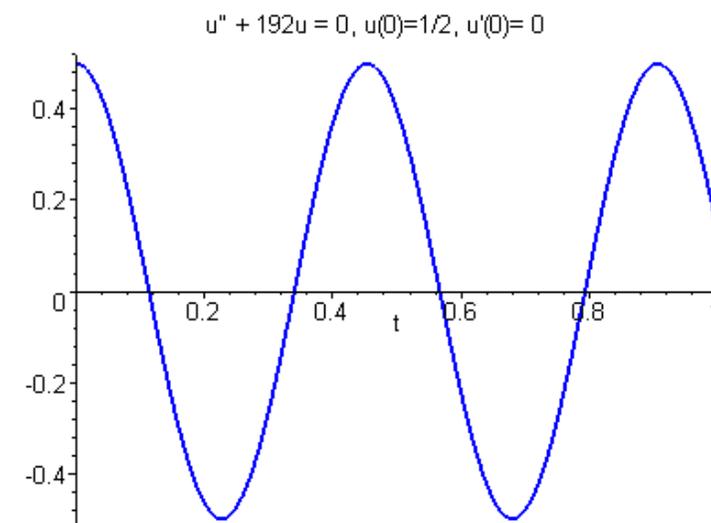
$$q(t) = c_1 e^{\lambda t} \cos \mu t + c_2 e^{\lambda t} \sin \mu t$$

Mas como  $b=0$  terminamos com  $\lambda=0$  e a solução reduzida a :

$$q(t) = c_1 \cos \mu t + c_2 \sin \mu t$$

É conveniente renomear a constante  $\mu$  que por ser uma frequência chamaremos de  $\omega_0$  (o zero é porque não temos fonte externa), essa frequência se chama **frequência natural** do circuito, assim

$$q(t) = c_1 \cos \omega_0 t + c_2 \sin \omega_0 t \quad \omega_0 = \mu = \frac{1}{\sqrt{LC}} = 8\sqrt{3}$$



## O Circuito LC

**Analisando o circuito** Para analisar **é conveniente reescrever**

$$\begin{aligned}q(t) &= c_1 \cos \omega_0 t + c_2 \sin \omega_0 t = Q_m \cos(\omega_0 t - \delta) \\ &= Q_m \cos \delta \cos \omega_0 t + Q_m \sin \delta \sin \omega_0 t\end{aligned}$$

em que, comparando podem verificar facilmente que:

$$c_1 = Q_m \cos \delta \quad c_2 = Q_m \sin \delta \quad Q_m = \sqrt{c_1^2 + c_2^2} \quad \tan \delta = \frac{c_2}{c_1}$$

Ao calcular  $\delta$ , é preciso tomar cuidado para escolher o **quadrante correto**; isso pode ser feito verificando os sinais do  $\cos \delta$  e do  $\sin \delta$

O gráfico de  $Q_m \cos(\omega_0 t - \delta)$  para um conjunto típico de condições iniciais aparece na figura a seguir...

# Modelagem com equações 2º ordem

## O Circuito LC

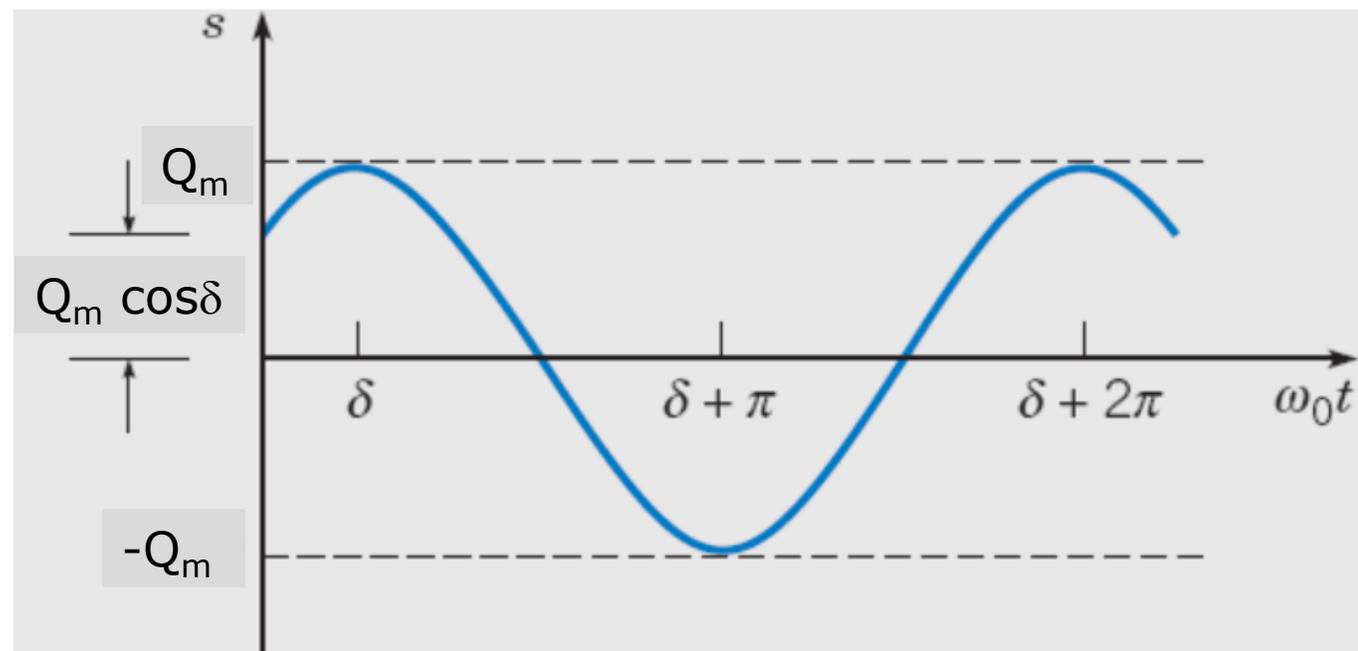
### Analizando o circuito

O gráfico é uma onda cosseno deslocada que descreve uma **oscilação periódica**, denominada harmônica simples, **da carga do capacitor**.

O período da oscilação é

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC}$$

$Q_m$  é a **carga máxima** do capacitor que é a amplitude da oscilação. O parâmetro adimensional  $\delta$  é **chamado de fase**, ou ângulo de fase, e mede o deslocamento da onda a partir de sua posição correspondente a  $\delta = 0$ .



$$\begin{aligned} q(t) &= c_1 \cos \omega_0 t + c_2 \sin \omega_0 t = Q_m \cos(\omega_0 t - \delta) \\ &= Q_m \cos \delta \cos \omega_0 t + Q_m \sin \delta \sin \omega_0 t \end{aligned}$$

# Modelagem com equações 2º ordem

## O Circuito LC

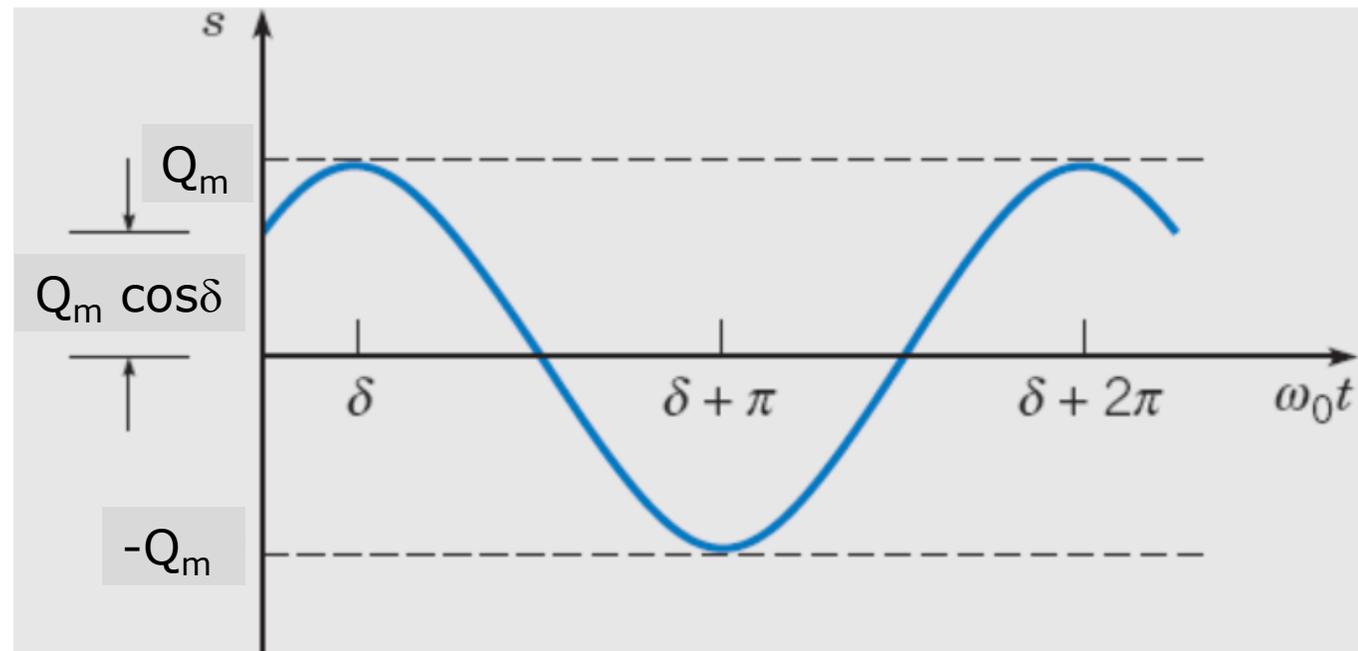
### Analizando o circuito

Note que este movimento tem **amplitude constante**, que não diminui com o tempo. Isso reflete o fato da ausência de amortecimento.

Além disso, para uma indutância  $L$  e uma capacitância  $C$  constantes, o sistema sempre vibra à **mesma frequência  $\omega_0$** , independente das condições iniciais.

No entanto, **as condições iniciais ajudam a determinar a amplitude do movimento.**

Finalmente, note que,  **$T$  aumenta quando  $L$  e  $C$  aumentam.**



$$\begin{aligned} q(t) &= c_1 \cos \omega_0 t + c_2 \sin \omega_0 t = Q_m \cos(\omega_0 t - \delta) \\ &= Q_m \cos \delta \cos \omega_0 t + Q_m \sin \delta \sin \omega_0 t \end{aligned}$$

## O Circuito LC

### Exemplo 3

Retornemos a nosso circuito LC mas **mudemos as condições iniciais**, ou seja, temos: um indutor de 0,125 Henry e um capacitor de 1/24 F mas agora a carga inicial é de 1/6 C no momento  $t=0$  e que a corrente inicial é -1 C/s ou seja antes de fechar a chave temos:  **$q(0)=1/6$  e  $q'(0)=-1$**

Determine:

A carga no capacitor em qualquer momento de tempo -  $q(t)$

A frequência natural do circuito LC -  $\omega_0$

A carga máxima do capacitor -  $Q_m$

A defasagem -  $\delta$

# Modelagem com equações 2º ordem

## O Circuito LC Exemplo 3

$$q''(t) + 192q(t) = 0 \quad q(0) = \frac{1}{6} \quad q'(0) = -1$$

$$q(t) = \frac{1}{6} \cos 8\sqrt{3} t - \frac{1}{8\sqrt{3}} \sin 8\sqrt{3} t$$

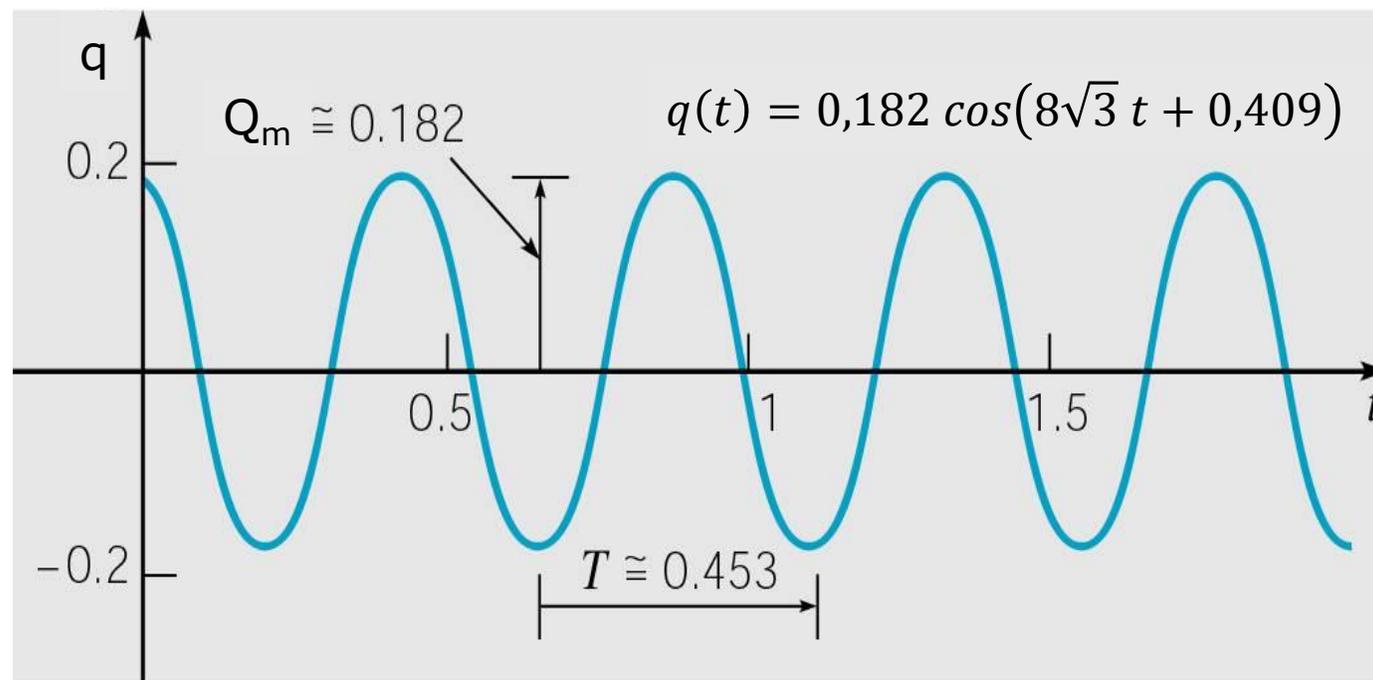
$$\omega_0 = 8\sqrt{3} \cong 0,45345 \text{ s.}$$

$$T = 2\pi/\omega_0 \cong 0,45345 \text{ s.}$$

$$Q_m^2 = \frac{1}{36} + \frac{1}{192} \Rightarrow Q_m = 0,1816 \text{ C}$$

$$\delta = -\arctg\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right) \cong -0,40864 \text{ rad}$$

$$q(t) = \frac{1}{6} \cos 8\sqrt{3} t - \frac{1}{8\sqrt{3}} \sin 8\sqrt{3} t = 0,182 \cos(8\sqrt{3} t + 0,409)$$



# Modelagem com equações 2º ordem



## O Circuito RLC

Retornemos a nosso circuito RLC mas **sem fonte externa** e vamos resolver o caso genérico... Como vimos no exemplo 1 a equação é:

$$Lq''(t) + Rq'(t) + \frac{1}{C}q(t) = 0 \quad r_{1,2} = \frac{-R \pm \sqrt{R^2 - \frac{4L}{C}}}{2L} = \frac{R}{2L} \left[ -1 \pm \sqrt{1 - \frac{4L}{CR^2}} \right]$$

Dependendo do sinal de  $R^2 - 4L/C$  a solução  $q(t)$  tem as seguintes formas:

$$R^2 - \frac{4L}{C} > 0: q(t) = c_1 A e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t} \quad \text{em que } r_1 < 0 \text{ e } r_2 < 0;$$

$$R^2 - \frac{4L}{C} = 0: q(t) = (c_1 + c_2 t) e^{-\frac{Rt}{2L}} \quad \text{em que } \frac{R}{2L} > 0;$$

$$R^2 - \frac{4L}{C} < 0: q(t) = e^{-\frac{Rt}{2L}} (c_1 \cos \mu t + c_2 \sin \mu t) \quad \text{em que } \mu = \frac{\sqrt{\frac{4L}{C} - R^2}}{2L} > 0.$$

Obs: nos três casos,  $\lim_{t \rightarrow \infty} q(t) = 0$ , como esperado para o caso com resistência.

# Modelagem com equações 2º ordem

## O Circuito RLC

O **caso mais importante** é  $R^2 - \frac{4L}{C} < 0$  que resulta em  $q(t) = e^{-\frac{Rt}{2L}}(c_1 \cos \mu t + c_2 \sin \mu t)$  que é o terceiro caso do slide anterior e ocorre quando o amortecimento é pequeno.

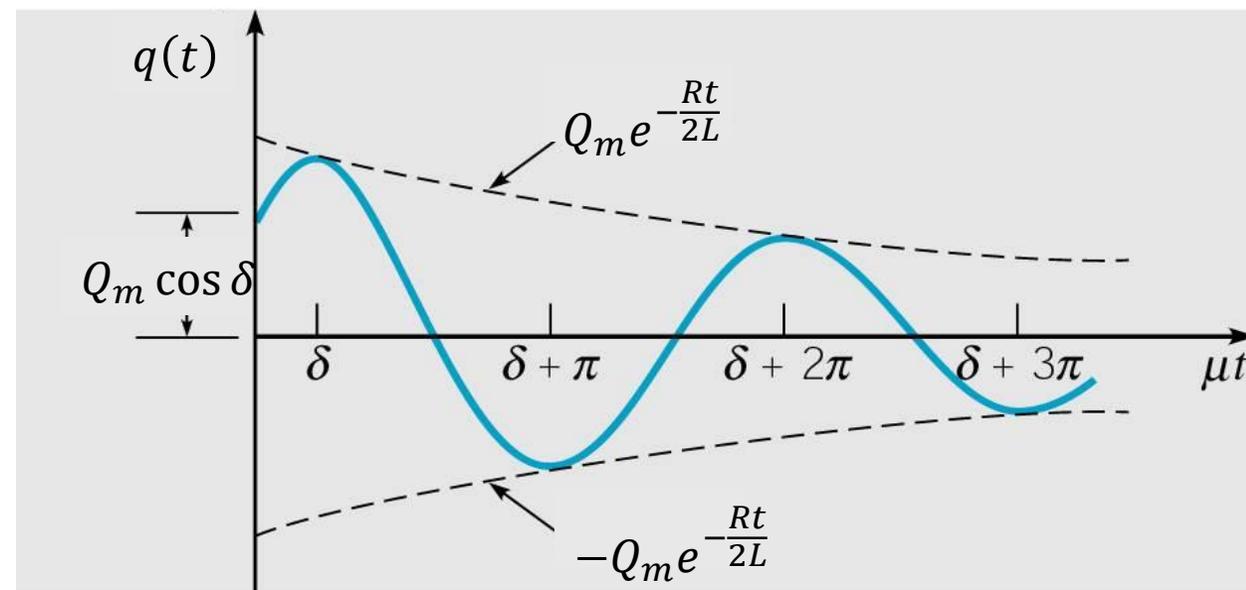
Lembrando o slide 10, a outra forma de escrever essa equação, fazendo  $c_1 = Q_m \cos \delta$  e  $c_2 = Q_m \sin \delta$  é  $q(t) = Q_m e^{-Rt/2L} \cos(\mu t - \delta)$

e portanto:  $|q(t)| \leq Q_m e^{-Rt/2L}$

O fator  $Q_m$  depende de L, R, C e das condições iniciais

Embora a oscilação não seja periódica, o parâmetro  $\mu$  determina a frequência segundo a qual a carga oscila no capacitor; em consequência,  $\mu$  é chamada de **quase frequência**

$$\mu = \frac{\sqrt{\frac{4L}{C} - R^2}}{2L}$$



## O Circuito RLC

Comparando a quase frequência  $\mu$  com a frequência natural  $\omega_0$  da oscilação sem amortecimento, vemos que

$$\frac{\mu}{\omega_0} = \frac{\sqrt{\frac{4L}{C} - R^2}}{2L\sqrt{1/LC}} = \frac{\sqrt{\frac{4L}{C} - R^2}}{\sqrt{4L^2}\sqrt{1/LC}} = \frac{\sqrt{\frac{4L}{C} - R^2}}{\sqrt{4L/C}} = \sqrt{1 - \frac{R^2}{4L/C}} \cong \sqrt{1 - \frac{R^2}{4L/C} + \frac{R^4}{64L^2/C^2}} = \sqrt{\left(1 - \frac{R^2}{8L/C}\right)^2} = 1 - \frac{R^2}{8L/C}$$

Assim, o efeito de um amortecimento pequeno é **reduzir, ligeiramente, a frequência da oscilação**

Similarmente, a quantidade  $T_d = 2\pi/\mu$  é chamada de **quase período** e comparando com  $T$  (quando  $R^2/(4L/C)$  é pequeno) temos...

$$\frac{T_d}{T} = \frac{2\pi/\mu}{2\pi/\omega_0} = \frac{\omega_0}{\mu} = \left(1 - \frac{R^2}{4L/C}\right)^{-1/2} \cong \left(1 - \frac{R^2}{8L/C}\right)^{-1} \cong 1 + \frac{R^2}{8L/C}$$

Assim, **um amortecimento pequeno aumenta o quase período**

# Modelagem com equações 2º ordem



## O Circuito RLC

Estes resultados reforçam o significado da razão adimensional  $\frac{R^2}{4L/C}$ .

Não é apenas o tamanho de R que determina se a oscilação é pouco ou muito amortecida, mas o tamanho de  $R^2$  comparado com  $4L/C$ .

Quando  $\frac{R^2}{4L/C}$  é pequeno, o amortecimento afeta pouco a quase frequência e o quase período da oscilação.

O que acontece quando  $\frac{R^2}{4L/C}$  aumenta?...

$$\mu \equiv \frac{\sqrt{\frac{4L}{C} - R^2}}{2L} = \frac{1}{\sqrt{LC}} \sqrt{1 - \frac{R^2}{\frac{4L}{C}}} = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{R^2}{\frac{4L}{C}}}$$

...a quase frequência  $\mu$  diminui e o quase período  $T_d$  aumenta.

$$T_d = \frac{2\pi}{\mu}$$

De fato,  $\mu \rightarrow 0$  e  $T_d \rightarrow \infty$  quando  $R \rightarrow 2\sqrt{\frac{L}{C}}$

# Modelagem com equações 2º ordem

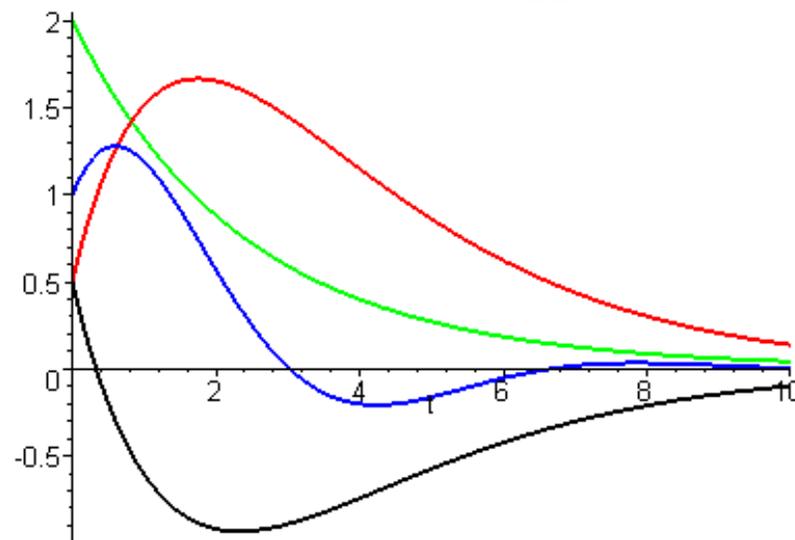
## O Circuito RLC

A natureza da solução muda quando  $R$  passa pelo valor  $2\sqrt{\frac{L}{C}}$ .

$R^2 - \frac{4L}{C} > 0: q(t) = c_1 A e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}$  em que  $r_1 < 0$  e  $r_2 < 0$  *superamortecido*

$R^2 - \frac{4L}{C} = 0: q(t) = (c_1 + c_2 t) e^{-\frac{Rt}{2L}}$  em que  $\frac{R}{2L} > 0$  *criticamente amortecido (vermelho e preto)*

$R^2 - \frac{4L}{C} < 0: q(t) = e^{-\frac{Rt}{2L}} (c_1 \cos \mu t + c_2 \sin \mu t)$  em que  $\mu = \frac{\sqrt{\frac{4L}{C} - R^2}}{2L} > 0$  *subamortecido (azul).*



# Modelagem com equações 2º ordem



## Exemplo 4

Suponha que a carga de um capacitor de um circuito RLC, sem fonte externa, é determinada pela equação

$$q'' + 0.125q' + q = 0, q(0) = 2, q'(0) = 0$$

determine a carga no capacitor em qualquer instante de tempo  $q(t)$ . Encontre a quase frequência e o quase período, assim como o instante no qual o capacitor está descarregado. Encontre, também, o instante  $\tau$  tal que  $|q(t)| < 0,1$  para todo  $t > \tau$ .

### Solução:

Aplicando o método já descrito (equação característica, condições iniciais, etc.) encontramos:

$$q(t) = e^{-t/16} \left( 2 \cos \frac{\sqrt{255}}{16} t + \frac{2}{\sqrt{255}} \sin \frac{\sqrt{255}}{16} t \right) = \frac{32}{\sqrt{255}} e^{-t/16} \cos \left( \frac{\sqrt{255}}{16} t - \delta \right)$$

Em que  $\tan \delta = \frac{1}{\sqrt{255}} \Rightarrow \delta \cong 0.06254$  (lembrando que  $c_1 = Q_m \cos \delta$  e  $c_2 = Q_m \sin \delta$ )

# Modelagem com equações 2º ordem

## Exemplo 4

A figura mostra esta solução junto com o caso sem amortecimento

A quase frequência  $\mu$

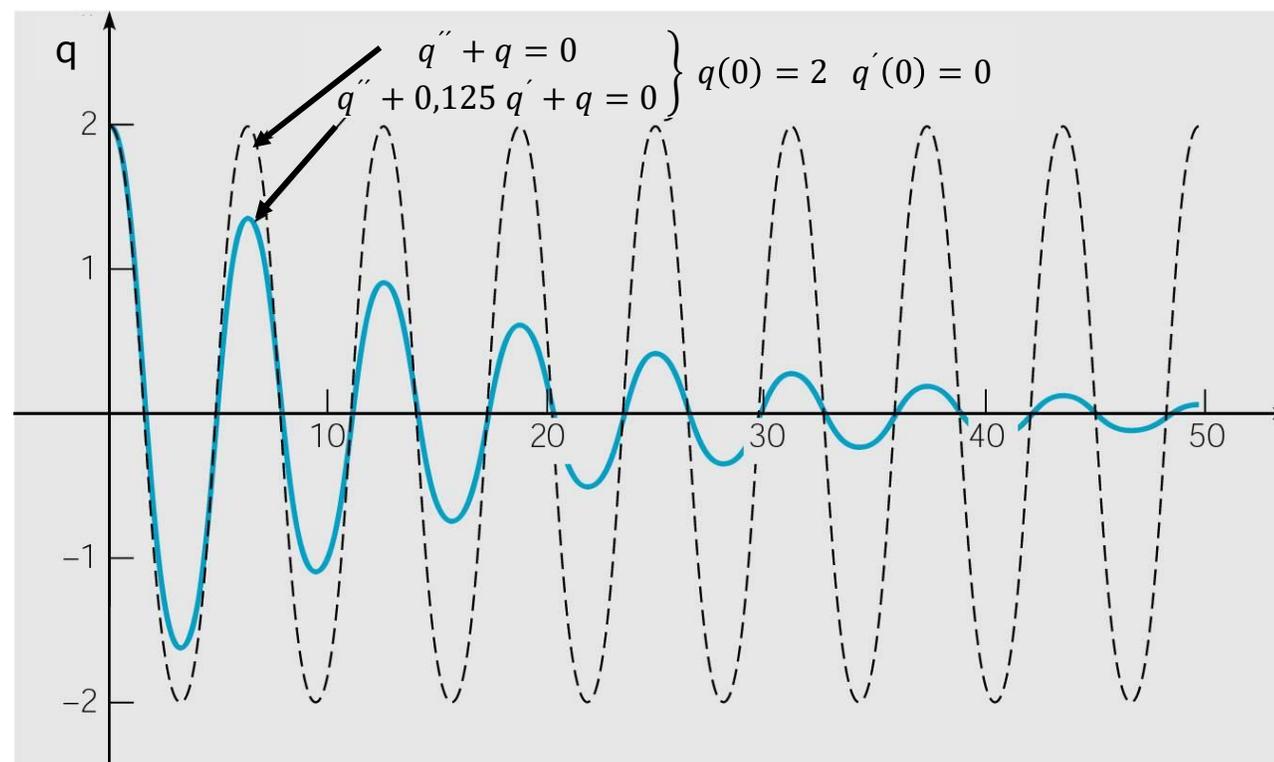
$$\mu = \sqrt{255}/16 \cong 0.998$$

O quase período  $T_d$

$$T_d = 2\pi/\mu \cong 6.295$$

No caso sem amortecimento:

$$\omega_0 = 1, T = 2\pi \cong 6.283$$



# Modelagem com equações 2º ordem

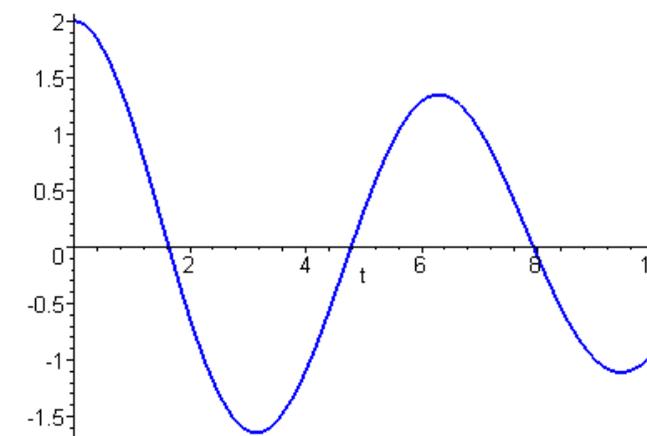
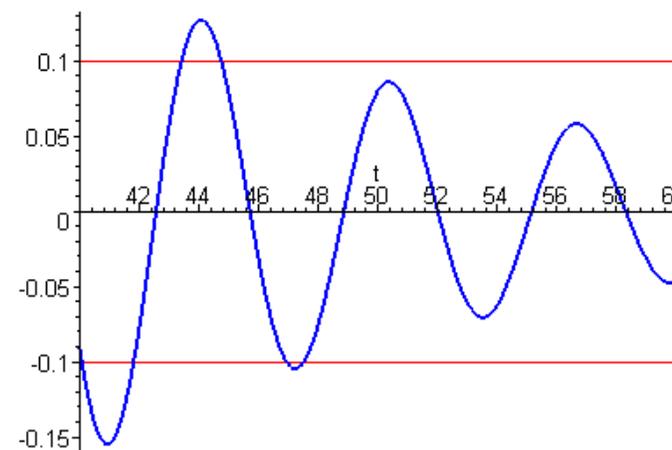
## Exemplo 4

Utilizando a figura ( e algum software para resolver a equação) vemos que  $|q(t)| < 0.1$  para  $t > \tau \approx 47,515$  s

Para encontrar o instante no qual o capacitor fica descarregado pela primeira igualamos a fase na equação abaixo a  $\pi/2$ , que seria o menor tempo para zerar a função cosseno.

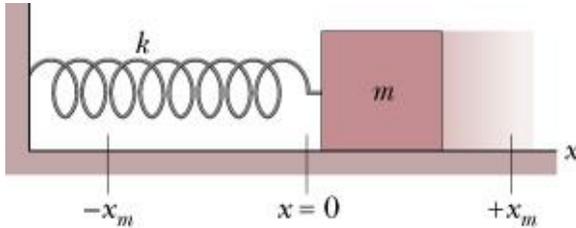
$$q(t) = \frac{32}{\sqrt{255}} e^{-t/16} \cos\left(\frac{\sqrt{255}}{16}t - \delta\right) = 0$$

$$\frac{\sqrt{255}}{16}t - \delta = \frac{\pi}{2} \Rightarrow t = \frac{16}{\sqrt{255}}\left(\frac{\pi}{2} + \delta\right) \cong 1.637 \text{ sec}$$



# Modelagem com equações 2º ordem

## O Sistema Massa-Mola



O sistema massa mola é outro exemplo de sistema oscilante que leva a uma ODE de segunda ordem.

Aplicando a Segunda Lei de Newton temos que  $\Sigma \mathbf{F} = m\mathbf{a}$

No caso massa-mola  $F_x = -kx$ ,  $k$ -constante de elasticidade da mola

$$F_x = -kx = ma_x = m \frac{d^2x}{dt^2}$$

ou

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

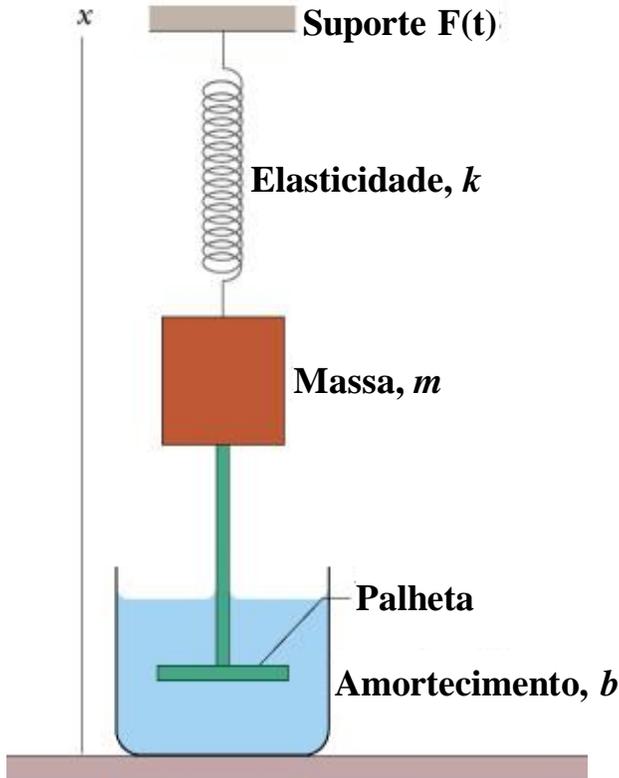
Equação Diferencial Linear Ordinária de segunda ordem, homogênea com coeficientes constantes.

# Modelagem com equações 2º ordem

## O Sistema Massa-Mola

Se consideramos o atrito proporcional à velocidade teremos...

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = F(t)$$



Comparando sistemas elétricos e mecânicos...

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = F(t)$$

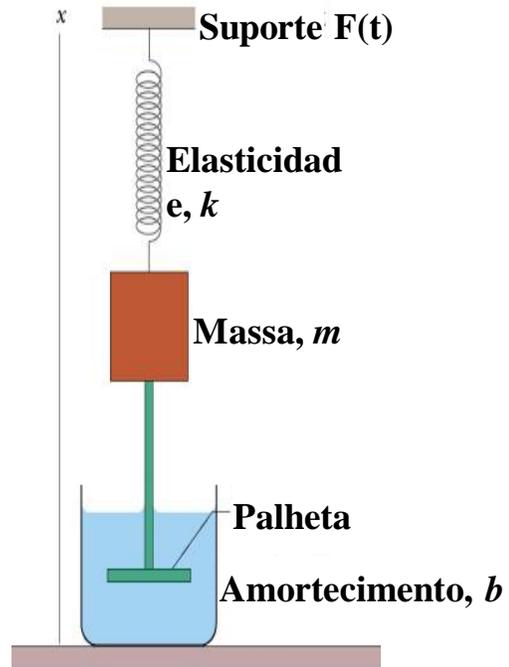
$$L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = E(t)$$

# Modelagem com equações 2º ordem

## Analogias...

### Massa - Mola

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = F(t)$$



$x$

$v$

$m$

$1/k$

$b$

$F(t)$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$E = \frac{1}{2} mv^2 + \frac{1}{2} kx^2$$

### Circuito RLC

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = E(t)$$

$q$

$i$

$L$

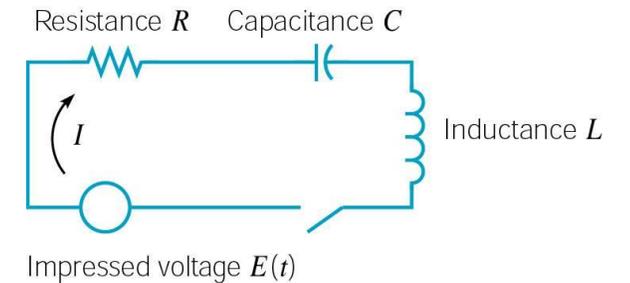
$C$

$R$

$E(t)$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

$$E = \frac{1}{2} Li^2 + \frac{q^2}{2C}$$



# Modelagem com equações 2º ordem

Vamos agora analisar o caso **não homogêneo** com amortecimento

Vamos considerar que a tensão externa  $F(t)$  é do tipo cossenoide  $V_0 \cos \omega t$

Nossa equação (já tínhamos obtido ela) é

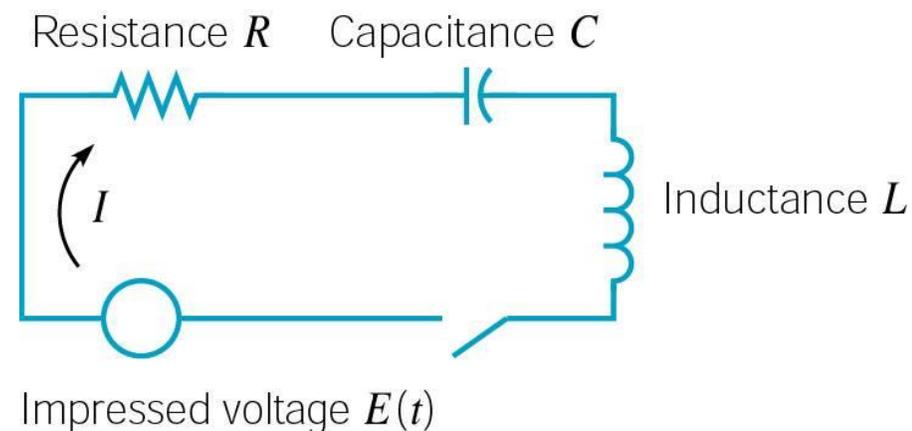
$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{q}{C} = V_0 \cos(\omega t)$$

A solução geral desta equação é do tipo:

$$q(t) = c_1 q_1(t) + c_2 q_2(t) + A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t) = q_C(t) + U(t)$$

Em que a solução da equação homogênea é:  $q_C(t) = c_1 q_1(t) + c_2 q_2(t)$

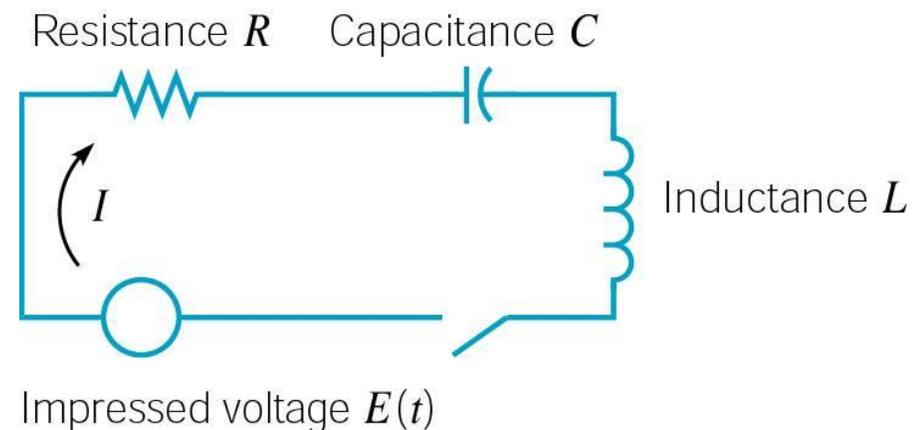
Em que a solução particular é:  $U(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$



# Modelagem com equações 2º ordem

As **soluções homogêneas**  $q_1$  e  $q_2$  dependem das raízes da equação característica (que por sua vez dependem de  $R$ ,  $L$  e  $C$ )

$$Lr^2 + Rr + \frac{1}{C}r = 0 \quad \Rightarrow \quad r_1, r_2 = \frac{-R \pm \sqrt{R^2 - \frac{4L}{C}}}{2L}$$



Como  $R$ ,  $L$  e  $C$  são constantes positivas  $>0$  implica que  **$r_1$  e  $r_2$  são ambas reais e negativas ou complexas conjugadas com parte real negativa** (já vimos isso, pois já resolvemos esta equação)

No primeiro caso:  $\lim_{t \rightarrow \infty} q_C(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} (c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}) = 0$

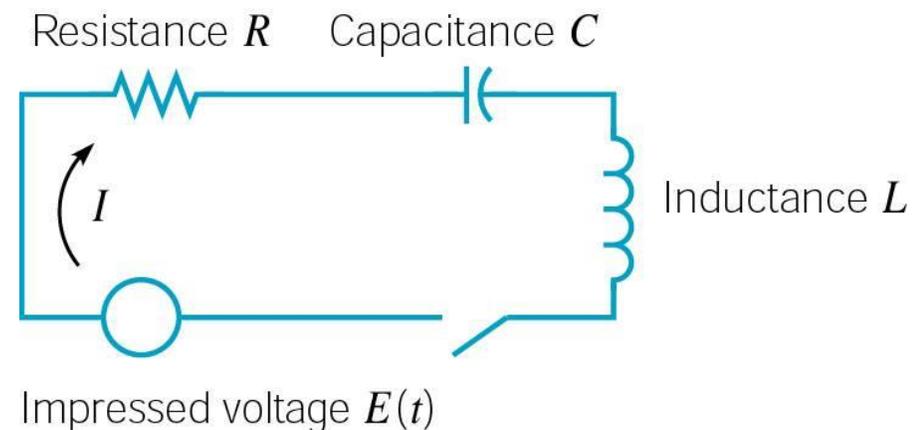
No segundo caso:  $\lim_{t \rightarrow \infty} q_C(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} (c_1 e^{\lambda t} \cos \mu t + c_2 e^{\lambda t} \sin \mu t) = 0.$

Em ambos casos:  $\lim_{t \rightarrow \infty} q_C(t) = 0$  Por isso é chamada de **solução transiente**

# Modelagem com equações 2º ordem

A outra parte da solução -  $U(t)$  é chamada de solução estacionária

$$U(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$$



Esta solução tem a **mesma frequência  $\omega$  da tensão externa** e por isso está ligada esta tensão externa.

Fisicamente significa que com o passar do tempo, toda a energia contida inicialmente no sistema, é dissipada através do resistor e a oscilação passa a ser comandada unicamente pela tensão externa  $V_0 \cos \omega t$

Vejam um exemplo...

## Exemplo 5

Suponha um circuito elétrico que satisfaz a equação diferencial

$$q''(t) + q'(t) + 1,25 q(t) = 3 \cos t \quad q(0) = 2 \quad q'(0) = 3$$

Encontre a solução deste problema de valor inicial e descreva o comportamento da solução para valores grandes de  $t$ .

## Solução

A equação homogênea associada tem por equação característica

$$r^2 + r + 1,25 = 0, \text{ com raízes } r_{1,2} = -0,5 \pm i.$$

Assim, a solução geral  $q_c(t)$  desta equação homogênea é:

$$q_c(t) = c_1 e^{\lambda t} \cos \mu t + c_2 e^{\lambda t} \sin \mu t = c_1 e^{-\frac{t}{2}} \cos t + c_2 e^{-\frac{t}{2}} \sin t$$

## Exemplo 5

Como vimos, a **solução particular** têm a forma  $q(t) = A \cos t + B \sin t$ , em que  $A$  e  $B$  são encontrados (se essa solução existe nessa forma) substituindo-se essa solução proposta na equação original.

Considerando que  $q'(t) = -A \sin t + B \cos t$  e que  $q''(t) = -A \cos t - B \sin t$  obtemos:

$$(0,25 A + B) \cos t + (-A + 0,25B) \sin t = 3 \cos t$$

Portanto  $A$  e  $B$  têm que satisfazer as equações

$$(0,25 A + B) = 3 \quad (-A + 0,25B) = 0$$

resultando em  $A = 12/17$  e  $B = 48/17$ . Portanto, a solução particular é

$$U(t) = \frac{12}{17} \cos t + \frac{48}{17} \sin t$$

# Modelagem com equações 2º ordem



## Exemplo 5

Assim a solução geral é:

$$q(t) = q_c(t) + U(t) = c_1 e^{-\frac{t}{2}} \cos t + c_2 e^{-\frac{t}{2}} \sin t + \frac{12}{17} \cos t + \frac{48}{17} \sin t$$

As constantes restantes  $c_1$  e  $c_2$  são determinadas pelas condições iniciais...

$$q(0) = c_1 + \frac{12}{17} = 2 \qquad q'(0) = -\frac{1}{2}c_1 + c_2 + \frac{48}{17} = 3$$

De forma que  $c_1 = 22/17$  e  $c_2 = 14/17$  e finalmente teremos:

$$q(t) = \frac{22}{17} e^{-\frac{t}{2}} \cos t + \frac{14}{17} e^{-\frac{t}{2}} \sin t + \frac{12}{17} \cos t + \frac{48}{17} \sin t$$

É importante notar que essa solução acima tem **duas partes**.

As duas primeiras parcelas à direita do sinal de igualdade contêm o fator exponencial  $e^{-t/2}$ ; o resultado é que elas tendem rapidamente de zero. Essa é a **parte transiente  $q_c(t)$** .

# Modelagem com equações 2º ordem

## Exemplo 5

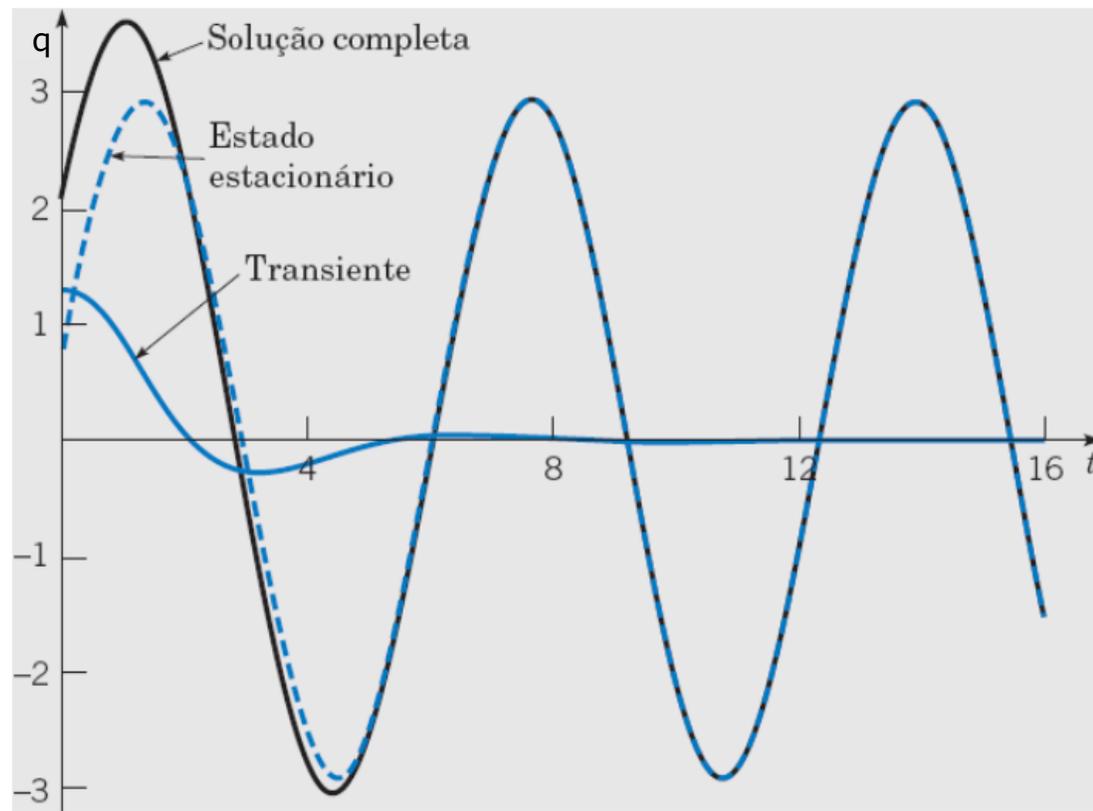
$$q(t) = \frac{22}{17} e^{-\frac{t}{2}} \cos t + \frac{14}{17} e^{-\frac{t}{2}} \sin t + \frac{12}{17} \cos t + \frac{48}{17} \sin t$$

As duas parcelas restantes só envolvem senos e cossenos e, portanto, representam uma oscilação que continua para sempre. É a **parte estacionária U(t)**.

As curvas azuis, a sólida e a tracejada, representam as partes transiente e estacionária.

A parte transiente vem da solução da equação homogênea e é necessária para satisfazer as **condições iniciais**. A parte estacionária é a solução particular da equação não homogênea completa.

Depois de um tempo razoavelmente curto, a parte transiente fica muito pequena, quase desaparecendo, e **a solução fica essencialmente indistinguível do estado estacionário**



Vamos aprofundar a análise deste circuito, veremos o que é a ressonância...

# Modelagem com equações 2º ordem



## Ressonância circuito RLC

Vamos reescrever a solução estacionária  $U(t) = A \cos t + B \sin t$  na forma  $U(t) = Q_m \cos(\omega_0 t - \delta)$  como foi feito anteriormente para a análise do circuito LC sem fonte externa no slide 10.

$$U(t) = Q_m \cos(\omega t - \delta)$$

É possível mostrar, por cálculos diretos, porém um tanto longos, que

$$Q_m = \frac{V_0}{\sqrt{L^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + R^2\omega^2}} \quad \cos \delta = \frac{L(\omega_0^2 - \omega^2)}{\sqrt{L^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + R^2\omega^2}} \quad \sin \delta = \frac{R\omega}{\sqrt{L^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + R^2\omega^2}} \quad \omega_0^2 = 1/LC$$

Para baixas frequências a amplitude da solução estacionária fica:

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} Q_m = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{V_0}{\sqrt{L^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + R^2\omega^2}} = \frac{V_0}{L\omega_0^2} = CV_0$$

Que é a carga do capacitor quando a tensão é constante ( $V_0$ )

E para elevadas frequências?

## Ressonância circuito RLC

Para altas frequências a amplitude da solução estacionária será:

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} Q_m = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{V_0}{\sqrt{L^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + R^2\omega^2}} = 0$$

Em algum valor intermediário de  $\omega$  (entre zero e infinito), a amplitude  $Q_m$  pode atingir um máximo. Para encontrar esse **ponto de máximo**, podemos diferenciar  $Q_m$  em relação a  $\omega$  e igualar o resultado a zero. Dessa forma vemos que a amplitude máxima ocorre quando  $\omega = \omega_{\text{máx}}$ , em que

$$\omega_{\text{máx}}^2 = \omega_0^2 \left( 1 - \frac{CR^2}{2L} \right)$$

O valor máximo de  $Q_m$  é

$$Q_m = \frac{V_0}{R\omega_0\sqrt{1 - (CR^2/4L)}} \cong \frac{V_0}{R\omega_0} \left( 1 + \frac{CR^2}{8L} \right)$$

em que a última expressão é uma aproximação para R pequeno

## Ressonância circuito RLC

Analisemos esta expressão:

$$Q_m = \frac{V_0}{R\omega_0\sqrt{1 - (CR^2/4L)}} \cong \frac{V_0}{R\omega_0} \left(1 + \frac{CR^2}{8L}\right) \quad \omega_{max}^2 = \omega_0^2 \left(1 - \frac{CR^2}{2L}\right)$$

Se  $RC^2/L > 2$ , então  $\omega_{m\acute{a}x}$  é imaginário...

Nesse caso, o valor máximo de  $Q_m$  ocorre para  $\omega = 0$  e depois  $Q_m$  é uma função monótona decrescente de  $\omega$ . Lembre-se de que o amortecimento crítico ocorre quando  $CR^2/L = 4$  (slide 19).

Para valores muito pequenos de R fica que  $Q_m = V_0/(R\omega_0)$

Assim, para sistemas levemente amortecidos, a amplitude  $Q_m$  quando  $\omega$  está próximo de  $\omega_0$  (o que acontece quando R é pequeno) é bem grande, mesmo para tensões externas relativamente pequenas, e quanto menor for o valor de R, mais pronunciado será esse efeito.

**Esse fenômeno é conhecido como ressonância** e é, um ponto importante a considerar nos circuitos

# Modelagem com equações 2º ordem

## Ressonância circuito RLC

$$\Gamma = CR^2/L \text{ (adimensional)}$$

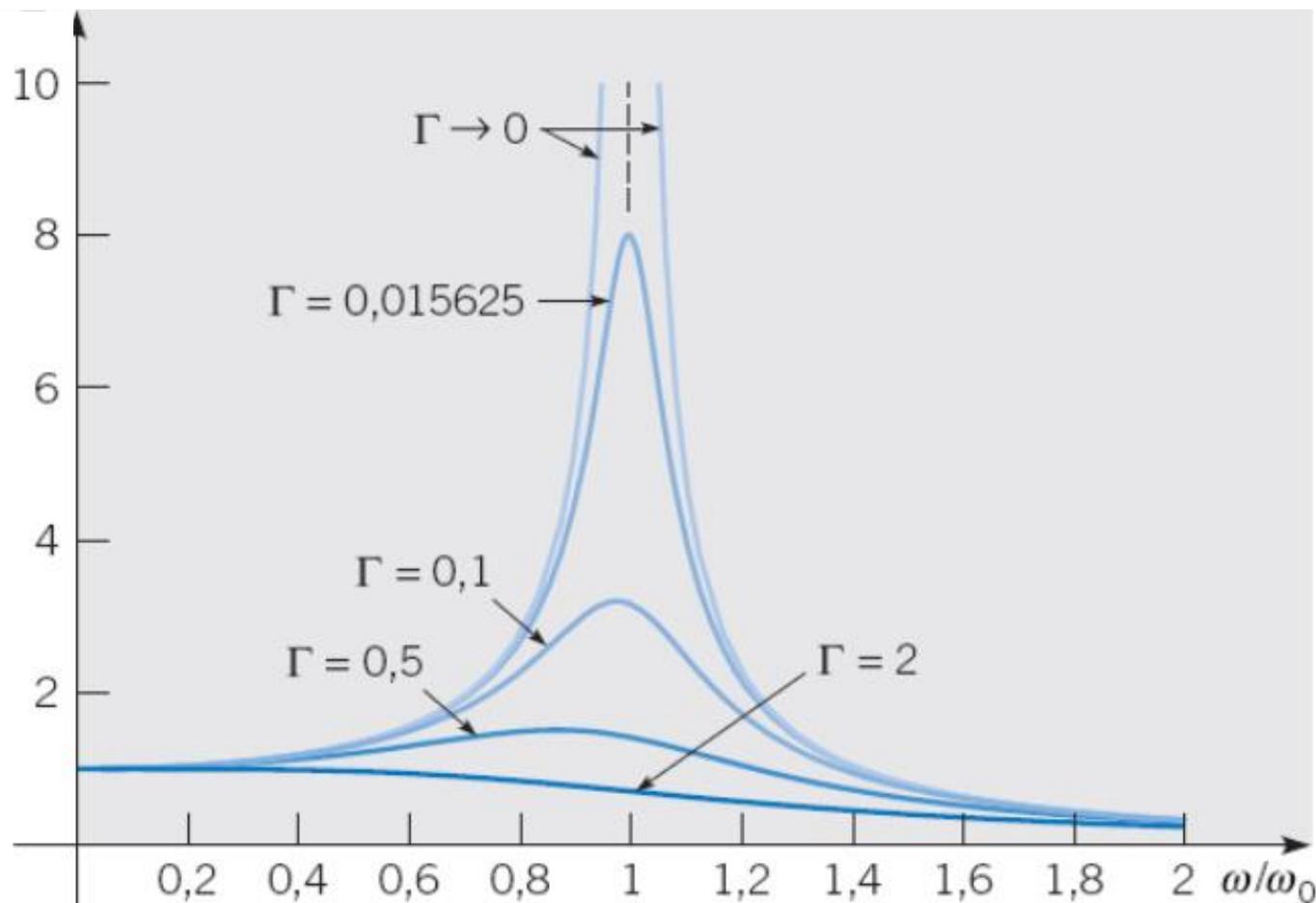
Para  $\omega = 0$  segue que  $\cos \delta \cong 1$  e  $\sin \delta \cong 0$ . Logo,  $\delta \cong 0$  e a resposta está em fase com a excitação

Para  $\omega = \omega_0$ , vemos que  $\cos \delta = 0$  e  $\sin \delta = 1$ , de modo que  $\delta = \pi/2$ . Nesse caso, a resposta fica atrasada, em relação à excitação, de  $\pi/2$

Finalmente, para  $\omega$  muito grande, temos  $\cos \delta \cong -1$  e  $\sin \delta \cong 0$ . Logo,  $\delta \cong \pi$ , de modo que a resposta está quase que completamente fora de fase em relação à excitação; isso significa que a resposta é mínima quando a excitação é máxima, e vice-versa

$$\cos \delta = \frac{L(\omega_0^2 - \omega^2)}{\sqrt{L^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + R^2\omega^2}}$$

$$\sin \delta = \frac{R\omega}{\sqrt{L^2(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + R^2\omega^2}}$$



# Modelagem com equações 2º ordem

## Exemplo 6

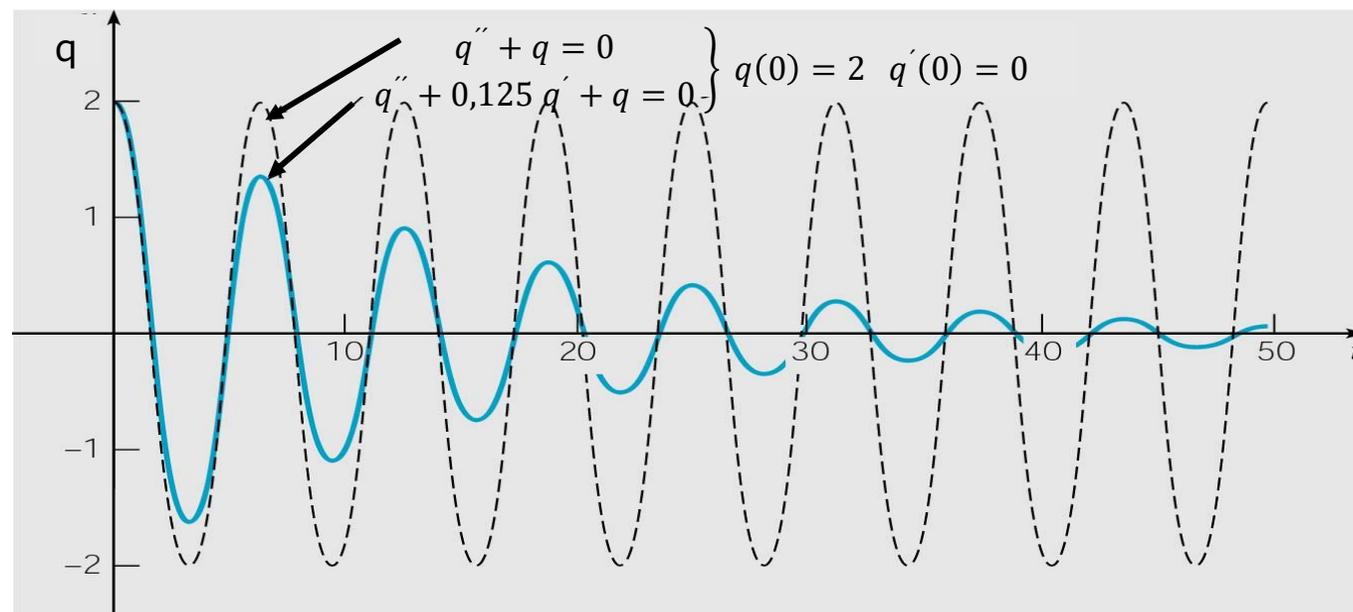
Considere o problema de valor inicial

$$q''(t) + 0.125q'(t) + q(t) = 3 \cos 2t \quad q(0) = 2 \quad q'(0) = 0$$

Para esse sistema, temos  $\omega_0 = 1$  e  $\Gamma = CR^2/L = 0,015625$

A oscilação sem tensão externa já foi discutida quando obtivemos a figura ao lado (ver slide 21).

As Figuras a seguir mostram a solução do problema com tensão externa  $3 \cos 2t$  para  $\omega = 0,3$ ,  $\omega = 1$  e  $\omega = 2$ , respectivamente comparadas com a tensão externa

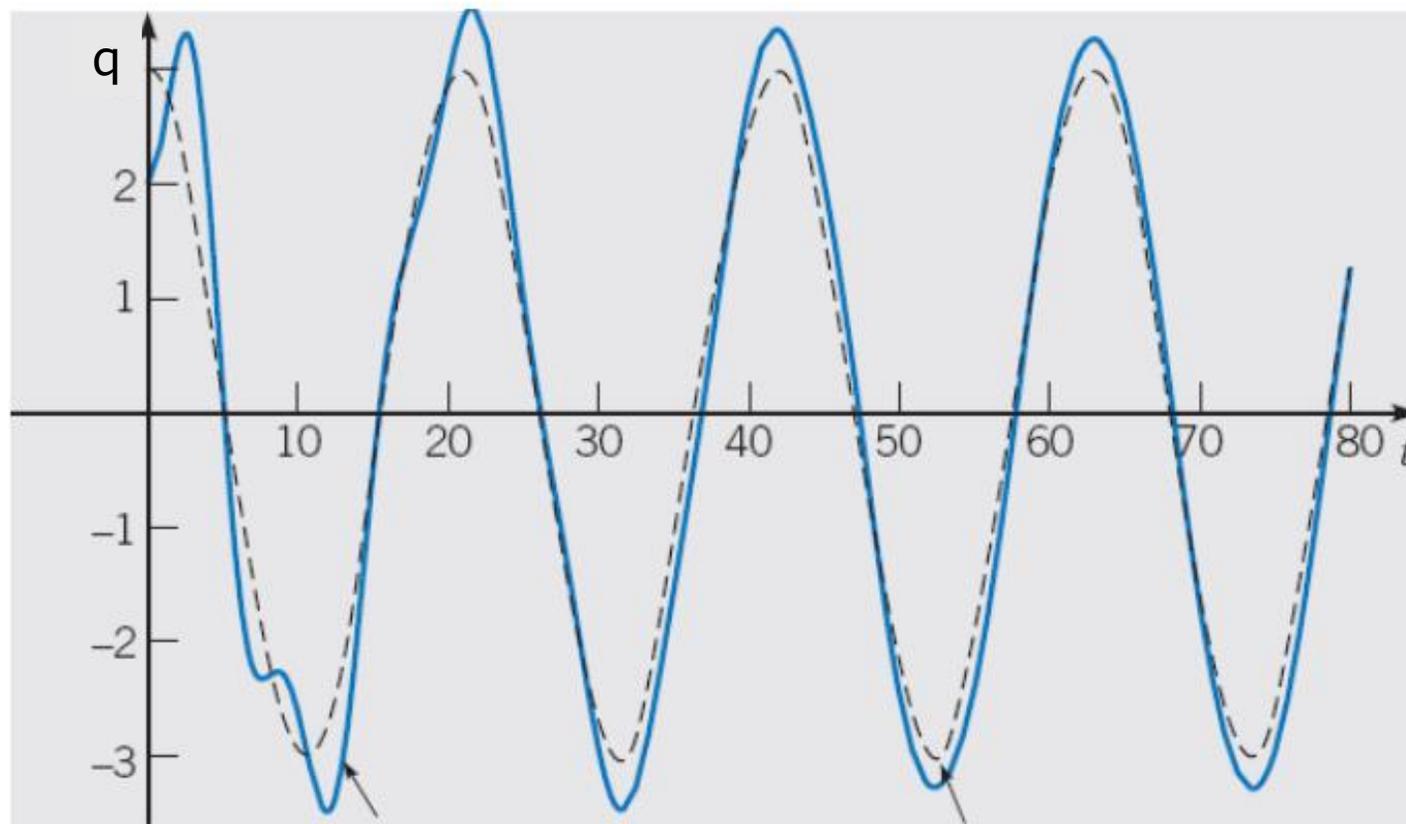


# Modelagem com equações 2º ordem

## Exemplo 6

Oscilação forçada com amortecimento; solução da equação com  $\omega = 0,3$ :  
 $q'' + 0,125q' + q = 3 \cos(0,3t)$ ,  $q(0) = 2$ ,  $q'(0) = 0$

A figura mostra o caso de baixa frequência,  $\omega/\omega_0 = 0,3$ . Depois de a resposta inicial transiente ser amortecida substancialmente, a resposta de estado estacionário restante está, essencialmente, **em fase** com a excitação, e a **amplitude da resposta é um pouco maior** do que a da tensão externa. Especificamente,  $Q_m \cong 3,2939$  e  $\delta \cong 0,041185$ .



Solução

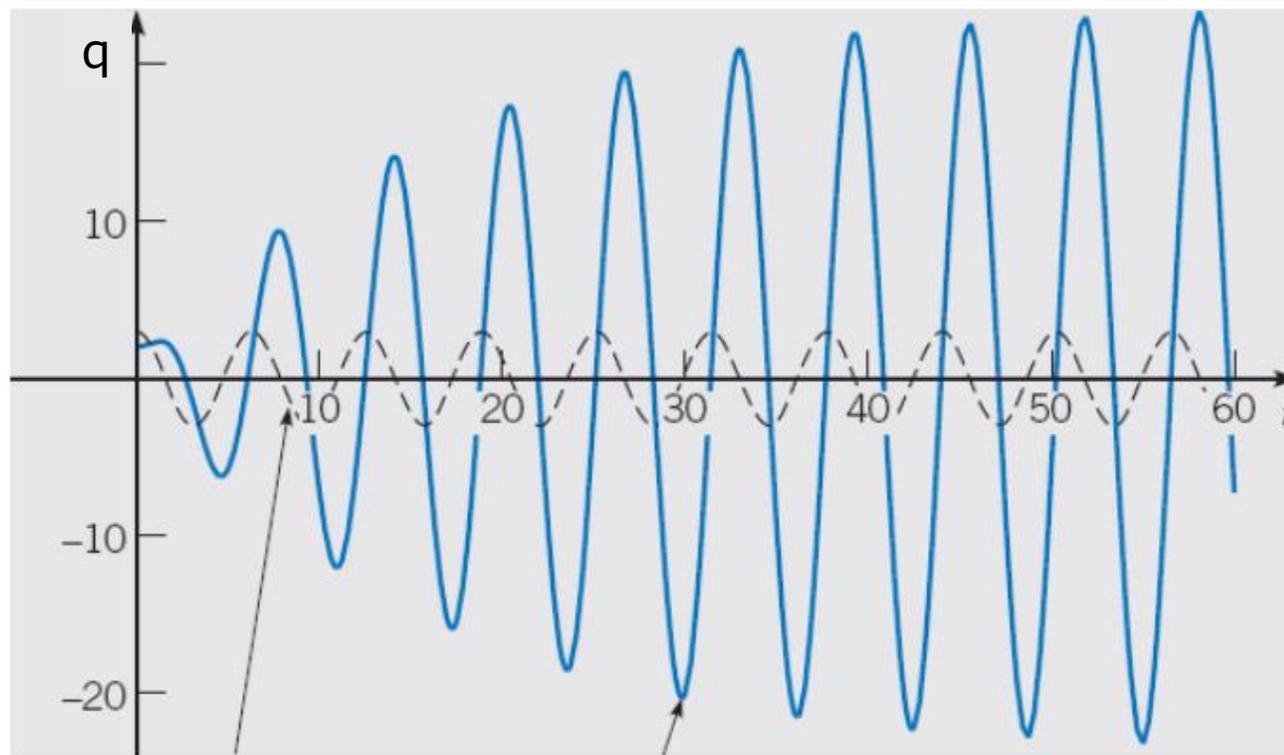
Tensão externa

# Modelagem com equações 2º ordem

## Exemplo 6

Oscilação forçada com amortecimento; solução da equação com  $\omega = 1$ :  
 $q'' + 0,125q' + q = 3 \cos(0,3t)$ ,  $q(0) = 2$ ,  $q'(0) = 0$

Este é o caso ressonante,  $\omega/\omega_0 = 1$ . Aqui a amplitude da resposta aumenta constantemente, e a figura também mostra o atraso de fase previsto de  $\pi/2$  em relação à tensão externa



Tensão externa

Solução

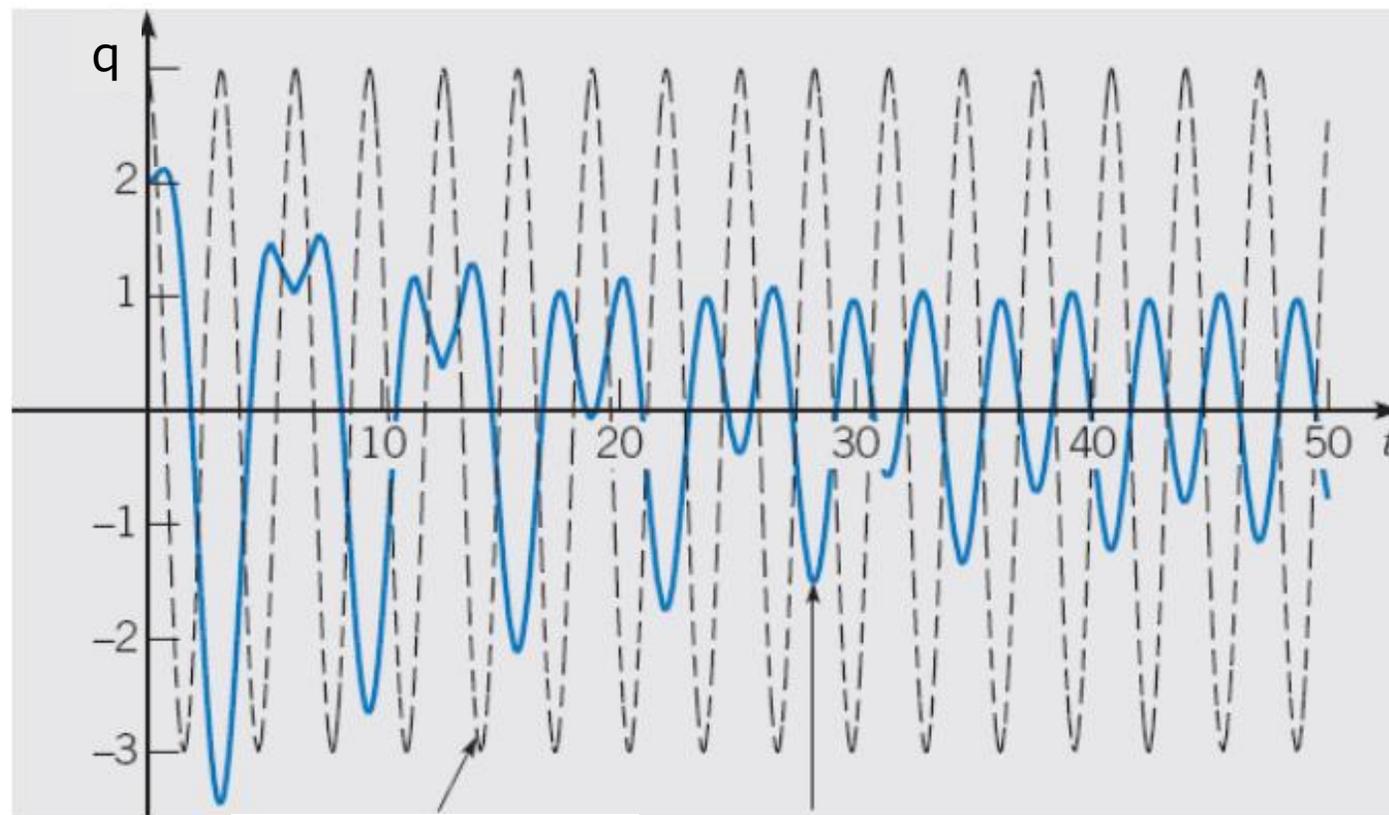
# Modelagem com equações 2º ordem

## Exemplo 6

Oscilação forçada com amortecimento; solução da equação com  $\omega = 2$ :  
 $q'' + 0,125q' + q = 3 \cos(0,3t)$ ,  $q(0) = 2$ ,  $q'(0) = 0$

Este é o caso de frequência de excitação elevada. Note que a diferença de fase entre a excitação e a resposta é aproximadamente  $\pi$ . Mais precisamente, temos que  $Q_m \cong 0,99655$  e  $\delta \cong 3,0585$ .

Vamos agora ver o caso sem resistência (sem amortecimento), ou seja o circuito LC com fonte externa



Tensão externa

Solução

## Circuito LC com fonte externa

Retornemos a nosso circuito LC mas **com fonte externa**, vamos analisar o caso partindo do capacitor descarregado e sem corrente no circuito

$$Lq''(t) + \frac{1}{C}q(t) = V_0 \cos \omega t \quad q(0) = 0 \quad q'(0) = 0 \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$$

Considere primeiro o caso  $\omega \neq \omega_0$ ; então a solução (pelo método dos coeficientes indeterminados) geral é

$$q(t) = c_1 \cos \omega_0 t + c_2 \sin \omega_0 t + \frac{V_0}{L(\omega_0^2 - \omega^2)} \cos \omega t$$

A partir das condições iniciais encontramos:

$$c_1 = -\frac{V_0}{L(\omega_0^2 - \omega^2)}, c_2 = 0$$

# Modelagem com equações 2º ordem



## Circuito LC com fonte externa

A solução completa fica:

$$q(t) = \frac{V_0}{L(\omega_0^2 - \omega^2)} (\cos \omega t - \cos \omega_0 t)$$

Essa é a soma de duas funções periódicas com períodos diferentes, mas com a mesma amplitude. Usando as identidades trigonométricas para  $\cos(A \pm B)$  com  $A = (\omega_0 + \omega)t/2$  e  $B = (\omega_0 - \omega)t/2$ , podemos escrever

$$\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B$$

$$q(t) = \left[ \frac{2V_0}{L(\omega_0^2 - \omega^2)} \sin \frac{(\omega_0 - \omega)t}{2} \right] \sin \frac{(\omega_0 + \omega)t}{2}$$

Vamos analisar este comportamento...

## Circuito LC com fonte externa

$$q(t) = \left[ \frac{2V_0}{L(\omega_0^2 - \omega^2)} \sin \frac{(\omega_0 - \omega)t}{2} \right] \sin \frac{(\omega_0 + \omega)t}{2}$$

Se  $|\omega_0 - \omega|$  é pequeno, então  $\omega_0 + \omega$  é muito maior do que  $|\omega_0 - \omega|$ . Em consequência,  $\sin(\omega_0 + \omega)t/2$  é uma função oscilando rapidamente, se comparada com  $\sin(\omega_0 - \omega)t/2$ . Então o movimento é uma **oscilação rápida** com frequência  $(\omega_0 + \omega)/2$ , mas com uma **amplitude variando** lentamente.

Esse tipo de movimento, com uma variação periódica da amplitude, exhibe o que é chamado de **batimento**. Por exemplo, tal fenômeno ocorre em acústica quando dois diapasões de frequência praticamente iguais são usados simultaneamente. Nesse caso, a variação periódica da amplitude pode ser notada com facilidade pelo ouvido sem recursos extras. Na eletrônica, a variação da amplitude em relação ao tempo é chamada de **modulação da amplitude**.

# Modelagem com equações 2º ordem



## Exemplo 7

Resolva o problema de valor inicial

$$q''(t) + q(t) = 0,5 \cos 0,8t \quad q(0) = 0 \quad q'(0) = 0$$

Para esse sistema, temos  $\omega_0 = 1$ ,  $\omega = 0,8$  e  $V_0 = 0,5$

A solução é (confiram)  $q(t) = 2,77778 (\sin 0,1 t)(\sin 0,9 t)$

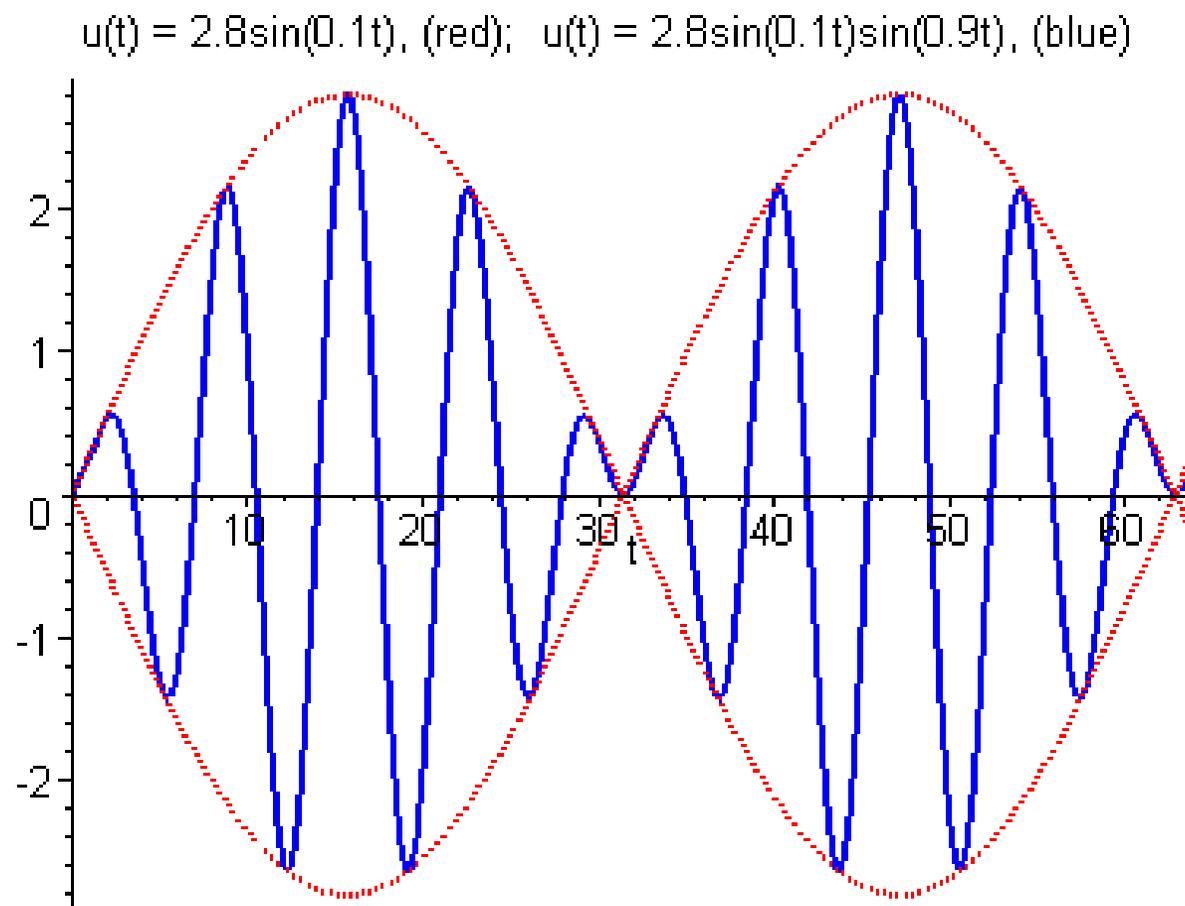
Vejam os gráficos desta solução....

# Modelagem com equações 2º ordem

## Exemplo 7

A figura mostra o gráfico desta solução. A variação de amplitude tem uma frequência baixa de 0,1 e um período lento correspondente de  $20\pi$ . Note que meio período ( $10\pi$ ) corresponde a um batimento (**dois batimentos por ciclo de frequência baixa**).

Imagine agora que a frequência  $\omega$  da tensão externa é aumentada para  $\omega = 0,9$ . Então a frequência baixa é cortada pela metade para 0,05, e o meio período lento correspondente dobra para  $20\pi$ .

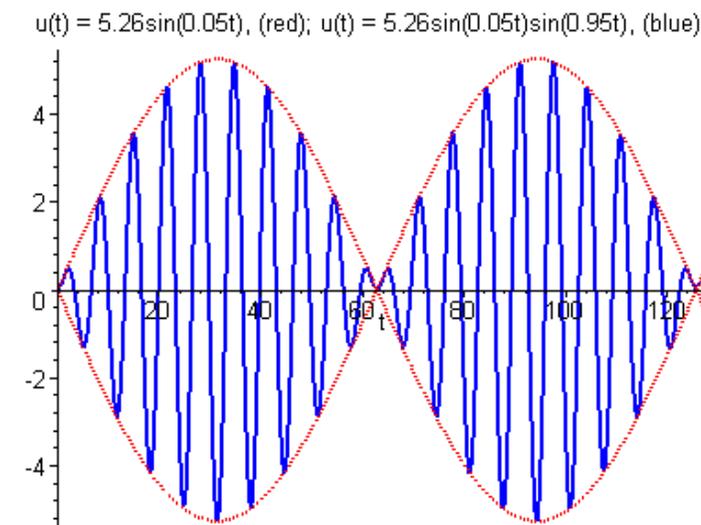
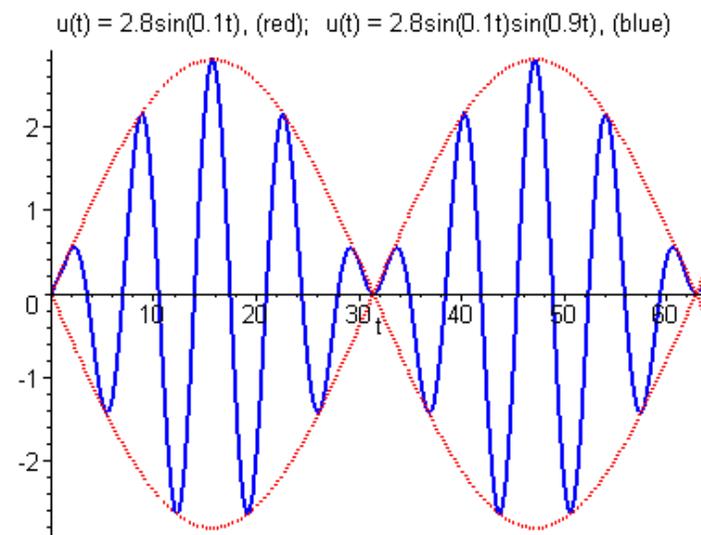


# Modelagem com equações 2º ordem

## Exemplo 7

Se a frequência  $\omega$  da tensão externa é aumentada para  $\omega = 0,9$  a frequência baixa diminui pela metade para  $0,05$  (figura de baixo), e o período do batimento dobra para  $20\pi$ .

A amplitude que era  $2,7778$  aumenta substancialmente para  $5,2632$ . No entanto, a frequência rápida aumenta pouco, para  $0,95$ .



# Classificação de Equações Diferenciais



Lista de exercícios disponível em:

<http://www.eletrica.ufpr.br/p/professores:patricio:inicial>

**Disciplina TE315 (Equações Diferenciais para Engenharia Elétrica)**

**Gabaritos disponíveis no mesmo endereço**