LISTA 03_3 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS
Raízes repetidas e complexas da equação característica
Respostas no final
Gabaritos na página do professor

Exercícios de raízes complexas

Em cada um dos problemas de 1 a 6, use a fórmula de Euler para escrever a expressão dada na forma a + ib.

1. $\exp(1 + 2i)$
2. $\exp(2 - 3i)$
3. $e^{i\pi}$
4. $e^{2-(\pi/2)i}$
5. 2^{1-i}
6. π^{-1+2i}

Em cada um dos problemas de 7 a 16, encontre a solução geral da equação diferencial dada.

7. $y'' - 2y' + 2y = 0$
8. $y'' - 2y' + 6y = 0$
9. $y'' + 2y' - 8y = 0$
10. $y'' + 2y' + 2y = 0$
11. $y'' + 6y' + 13y = 0$
12. $4y'' + 9y = 0$
13. $y'' + 2y' + 1{,}25y = 0$
14. $9y'' + 9y' - 4y = 0$
15. $y'' + y' + 1{,}25y = 0$
16. $y'' + 4y' + 6{,}25y = 0$

Em cada um dos problemas de 17 a 22, encontre a solução do problema de valor inicial dado. Esboce o gráfico da solução e descreva seu comportamento para valores cada vez maiores de t.

17. $y'' + 4y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$
18. $y'' + 4y' + 5y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$
19. $y'' - 2y' + 5y = 0, \quad y(\pi/2) = 0, \quad y'(\pi/2) = 2$
20. $y'' + y = 0, \quad y(\pi/3) = 2, \quad y'(\pi/3) = -4$
21. $y'' + y' + 1{,}25y = 0, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 1$
22. $y'' + 2y' + 2y = 0, \quad y(\pi/4) = 2, \quad y'(\pi/4) = -2$

23. Considere o problema de valor inicial

$$3u'' - u' + 2u = 0, \qquad u(0) = 2, \qquad u'(0) = 0.$$

(a) Encontre a solução $u(t)$ deste problema.

(b) Para $t > 0$, encontre o primeiro instante no qual $|u(t)| = 10$.

24. Considere o problema de valor inicial

$$5u'' + 2u' + 7u = 0, \qquad u(0) = 2, \qquad u(0) = 1.$$

(a) Encontre a solução $u(t)$ deste problema.

(b) Encontre o menor T para o qual $|u(t)| \leq 0{,}1$ para todo $t > T$.

25. Considere o problema de valor inicial

$$y'' + 2y' + 6y = 0, \qquad y(0) = 2, \qquad y'(0) = \alpha \geq 0.$$

(a) Encontre a solução $y(t)$ deste problema.

(b) Encontre α tal que $y = 0$ quando $t = 1$.

(c) Encontre o menor valor positivo de t, em função de α, para o qual $y = 0$.

(d) Determine o limite da expressão encontrada no item (c) quando $\alpha \to \infty$.

26. Considere o problema de valor inicial

$$y'' + 2ay' + (a^2 + 1)y = 0, \qquad y(0) = 1, \qquad y'(0) = 0.$$

(a) Encontre a solução $y(t)$ deste problema.

(b) Para $a = 1$, encontre o menor T para o qual $|y(t)| < 0{,}1$ para $t > T$.

(c) Repita o item (b) para $a = 1/4$, $1/2$ e 2.

(d) Usando os resultados dos itens (b) e (c), coloque em um gráfico os valores de T em função de a e descreva a relação entre T e a.

27. Mostre que $W(e^{\lambda t} \cos \mu t, e^{\lambda t} \operatorname{sen} \mu t) = \mu e^{2\lambda t}$.

28. Neste problema, esquematizamos um modo diferente de obter a fórmula de Euler.

(a) Mostre que $y_1(t) = \cos t$ e $y_2(t) = \operatorname{sen} t$ formam um conjunto fundamental de soluções de $y'' + y = 0$; ou seja, mostre que são soluções e que seu wronskiano não se anula.

(b) Mostre (formalmente) que $y = e^{it}$ também é solução de $y'' + y = 0$. Portanto,

$$e^{it} = c_1 \cos t + c_2 \operatorname{sen} t \qquad \text{(i)}$$

para constantes c_1 e c_2 apropriadas. Por que isso ocorre?

(c) Faça $t = 0$ na Eq. (i) para mostrar que $c_1 = 1$.

(d) Supondo que a Eq. (14) é válida, diferencie a Eq. (i) e depois faça $t = 0$ para concluir que $c_2 = i$. Use os valores de c_1 e c_2 na Eq. (i) para chegar à fórmula de Euler.

29. Usando a fórmula de Euler, mostre que

$$\cos t = (e^{it} + e^{-it})/2, \qquad \text{sen}\, t = (e^{it} - e^{-it})/2i.$$

30. Se e^{rt} é dado pela Eq. (13), mostre que $e^{(r_1 + r_2)t} = e^{r_1 t}\, e^{r_2 t}$, quaisquer que sejam os números complexos r_1 e r_2.

31. Se e^{rt} é dado pela Eq. (13), mostre que

$$\frac{d}{dt} e^{rt} = re^{rt}$$

para qualquer número complexo r.

32. Considere a equação diferencial

$$ay'' + by' + cy = 0,$$

em que $b^2 - 4ac < 0$ e a equação característica tem raízes complexas $\lambda \pm i\mu$. Substitua y pelas funções

$$u(t) = e^{\lambda t} \cos \mu t \qquad \text{e} \qquad v(t) = e^{\lambda t}\, \text{sen}\, \mu t$$

na equação diferencial confirmando, assim, que elas são soluções.

33. Se as funções y_1 e y_2 formarem um conjunto fundamental de soluções de $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$, mostre que entre dois zeros consecutivos de y_1 existe um, e apenas um, zero de y_2. Note que esse comportamento é ilustrado pelas soluções $y_1 = \cos t$ e $y_2 = \text{sen}\, t$ da equação $y'' + y = 0$.

Sugestão: Suponha que t_1 e t_2 são dois zeros de y_1 entre os quais não existe zero de y_2. Aplique o teorema de Rolle a y_1/y_2 para chegar a uma contradição.

Mudança de Variáveis. Algumas vezes, uma equação diferencial com coeficientes variáveis,

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0, \tag{i}$$

pode ser colocada em uma forma mais adequada para encontrar uma solução através de uma mudança da variável independente. Vamos explorar essas ideias nos problemas de 34 a 46. Em particular, no Problema 34 mostramos que as equações conhecidas como equações de Euler podem ser transformadas em equações com coeficientes constantes por uma mudança simples da variável independente. Os problemas de 35 a 42 são exemplos desse tipo de equação. O Problema 43 determina condições sob as quais a equação mais geral Eq. (i) pode ser transformada em uma equação diferencial com coeficientes constantes. Os problemas de 44 a 46 fornecem aplicações específicas deste procedimento.

34. **Equações de Euler.** Uma equação da forma

$$t^2\frac{d^2y}{dt^2} + \alpha t\frac{dy}{dt} + \beta y = 0, \qquad t > 0, \tag{ii}$$

em que α e β são constantes reais, é chamada de equação de Euler.

(a) Seja $x = \ln t$ e calcule dy/dt e d^2y/dt^2 em termos de dy/dx e d^2y/dx^2.

(b) Use os resultados do item (a) para transformar a Eq. (ii) em

$$\frac{d^2y}{dx^2} + (\alpha - 1)\frac{dy}{dx} + \beta y = 0. \tag{iii}$$

Note que a Eq. (iii) tem coeficientes constantes. Se $y_1(x)$ e $y_2(x)$ formarem um conjunto fundamental de soluções da Eq. (iii), então $y_1(\ln t)$ e $y_2(\ln t)$ formarão um conjunto fundamental de soluções da Eq. (ii).

Em cada um dos problemas de 35 a 42, use o método do Problema 34 para resolver a equação dada para $t > 0$.

35. $t^2y'' + ty' + y = 0$
36. $t^2y'' + 4ty' + 2y = 0$
37. $t^2y'' + 3ty' + 1{,}25y = 0$
38. $t^2y'' - 4ty' - 6y = 0$
39. $t^2y'' - 4ty' + 6y = 0$
40. $t^2y'' - ty' + 5y = 0$
41. $t^2y'' + 3ty' - 3y = 0$
42. $t^2y'' + 7ty' + 10y = 0$
43. Neste problema vamos determinar condições sobre p e q de modo que a Eq. (i) possa ser transformada em uma equação com coeficientes constantes através de uma mudança da variável independente. Seja $x = u(t)$ a nova variável independente, com a relação entre x e t a ser especificada mais tarde.

(a) Mostre que

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dx}{dt}\frac{dy}{dx}, \qquad \frac{d^2y}{dt^2} = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{d^2x}{dt^2}\frac{dy}{dx}.$$

(b) Mostre que a equação diferencial (i) torna-se

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{d^2x}{dt^2} + p(t)\frac{dx}{dt}\right)\frac{dy}{dx} + q(t)y = 0. \tag{iv}$$

(c) Para que a Eq. (iv) tenha coeficientes constantes, é preciso que os coeficientes de d^2y/dx^2 e de y sejam proporcionais. Se $q(t) > 0$, então podemos escolher a constante de proporcionalidade como 1; logo,

$$x = u(t) = \int [q(t)]^{1/2}\,dt. \tag{v}$$

(d) Com x escolhido como no item (c), mostre que o coeficiente de dy/dx na Eq. (iv) também é constante, desde que a expressão

$$\frac{q'(t) + 2p(t)q(t)}{2[q(t)]^{3/2}} \qquad \text{(vi)}$$

seja constante. Assim, a Eq. (i) pode ser transformada em uma equação com coeficientes constantes através de uma mudança da variável independente, desde que a função $(q' + 2pq)/q^{3/2}$ seja constante. Como este resultado será modificado, se $q(t) < 0$?

Em cada um dos problemas de 44 a 46, tente transformar a equação dada em uma com coeficientes constantes pelo método do Problema 43. Se isso for possível, encontre a solução geral da equação dada.

44. $y'' + ty' + e^{-t^2}$
45. $y'' + 3ty' + t^2 y = 0, \quad -\infty < t < \infty$
46. $ty'' + (t^2 - 1)y' + t^3 y = 0, \quad 0 < t < \infty$

Exercícios de raízes repetidas

Em cada um dos problemas de 1 a 10, encontre a solução geral da equação diferencial dada.

1. $y'' - 2y' + y = 0$
2. $9y'' - 6y' + y = 0$
3. $4y'' - 4y' - 3y = 0$
4. $4y'' + 12y' + 9y = 0$
5. $y'' - 2y' + 10y = 0$
6. $y'' - 6y' + 9y = 0$
7. $4y'' + 17y' + 4y = 0$
8. $16y'' + 24y' + 9y = 0$
9. $25y'' - 20y' + 4y = 0$
10. $2y'' + 2y' + y = 0$

Em cada um dos problemas de 11 a 14, resolva o problema de valor inicial dado. Esboce o gráfico da solução e descreva seu comportamento quando t cresce.

11. $9y'' - 12y'' + 4y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -1$
12. $y'' - 6y' + 9y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 2$
13. $9y'' + 6y' + 82y = 0, \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = 2$
14. $y'' + 4y' + 4y = 0, \quad y(-1) = 2, \quad y''(-1) = 1$

15. Considere o problema de valor inicial

$$4y'' + 12y' + 9y = 0, \qquad y(0) = 1, \qquad y'(0) = -4.$$

(a) Resolva o problema de valor inicial e faça o gráfico de sua solução para $0 \le t \le 5$.

(b) Determine onde a solução tem valor zero.

(c) Determine as coordenadas (t_0, y_0) do ponto de mínimo.

(d) Mude a segunda condição inicial para $y'(0) = b$ e encontre a solução como função de b. Depois encontre o valor crítico de b que separa as soluções que permanecem positivas das que acabam se tornando negativas

16. Considere a seguinte modificação do problema de valor inicial no Exemplo 2:

$$y' - y'' + 0{,}25y = 0, \qquad y(0) = 2, \qquad y''(0) = b.$$

Encontre a solução em função de b e depois determine o valor crítico de b que separa as soluções que crescem positivamente das que acabam crescendo em módulo, mas com valores negativos.

17. Considere o problema de valor inicial

$$4y'' + 4y' + y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y''(0) = 2.$$

(a) Resolva o problema de valor inicial e faça o gráfico da solução.

(b) Determine as coordenadas (t_M, y_M) do ponto de máximo.

(c) Mude a segunda condição inicial para $y'(0) = b > 0$ e encontre a solução como função de b.

(d) Encontre as coordenadas do ponto de máximo (t_M, y_M) em função de b. Descreva a dependência em b de t_M e de y_M quando b aumenta.

18. Considere o problema de valor inicial

$$9y'' + 12y' + 4y = 0, \qquad y(0) = a > 0, \qquad y'(0) = -1.$$

(a) Resolva o problema de valor inicial.

(b) Encontre o valor crítico de a que separa as soluções que se tornam negativas das que permanecem positivas.

19. Considere a equação $ay'' + by' + cy = 0$. Se as raízes da equação característica correspondente forem reais, mostre que uma solução da equação diferencial é identicamente nula ou pode assumir o valor zero no máximo uma vez.

Os problemas de 20 a 22 indicam outras maneiras de encontrar uma segunda solução quando a equação característica tem raízes repetidas.

20. (a) Considere a equação $y'' + 2ay' + a^2y = 0$. Mostre que as raízes da equação característica são $r_1 = r_2 = -a$, de modo que uma solução da equação é e^{-at}.

(b) Use a fórmula de Abel [Eq. (23) da Seção 3.2] para mostrar que o wronskiano de duas soluções quaisquer da equação dada é

$$W(t) = y_1(t)y_2'(t) - y_1'(t)y_2(t) = c_1e^{-2at},$$

em que c_1 é constante.

(c) Seja $y_1(t) = e^{-at}$ e use o resultado do item (b) para obter uma equação diferencial satisfeita por uma segunda solução $y_2(t)$. Resolvendo essa equação, mostre que $y_2(t) = te^{-at}$.

21. Suponha que r_1 e r_2 são raízes de $ar^2 + br + c = 0$ e que $r_1 \neq r_2$; então, $\exp(r_1t)$ e $\exp(r_2t)$ são soluções da equação diferencial $ay'' + by' + cy = 0$. Mostre que $\phi(t; r_1, r_2) = [\exp(r_2t) - \exp(r_1t)]/(r_2 - r_1)$ também é solução da equação para $r_2 \neq r_1$. Depois, pense em r_1 como fixo e use a regra de L'Hôpital para calcular o limite de $\phi(t; r_1, r_2)$ quando $r_2 \to r_1$ obtendo,

assim, a segunda solução no caso de raízes iguais.

22. (a) Se $ar^2 + br + c = 0$ tem raízes iguais r_1, mostre que

$$L[e^{rt}] = a(e^{rt})'' + b(e^{rt})' + ce^{rt} = a(r - r_1)^2 e^{rt}. \tag{i}$$

Como a última expressão à direita na Eq. (i) é nula quando $r = r_1$, segue que $\exp(r_1 t)$ é uma solução de $L[y] = ay'' + by' + cy = 0$.

(b) Diferencie a Eq. (i) em relação a r e mude as ordens das derivadas em relação a r e a t, mostrando, assim, que

$$\frac{\partial}{\partial r} L[e^{rt}] = L\left[\frac{\partial}{\partial r} e^{rt}\right] = L[te^{rt}] = ate^{rt}(r - r_1)^2 + 2ae^{rt}(r - r_1). \tag{ii}$$

Como a última expressão à direita na Eq. (ii) é zero quando $r = r_1$, conclua que $t\exp(r_1 t)$ também é solução de $L[y] = 0$.

Em cada um dos problemas de 23 a 30, use o método de redução de ordem para encontrar uma segunda solução da equação diferencial dada.

23. $t^2y'' + 4ty' + 6y = 0$, $t > 0$; $y_1(t) = t^2$
24. $t^2y'' + 2ty' - 2y = 0$, $t > 0$; $y_1(t) = t$
25. $t^2y'' + 3ty' + y = 0$, $t > 0$; $y_1(t) = t^{-1}$
26. $t^2y'' - t(t + 2)y' + (t + 2)y = 0$, $t > 0$; $y_1(t) = t$
27. $xy'' - y' + 4x^3y = 0$, $x > 0$; $y_1(x) = \operatorname{sen} x^2$
28. $(x - 1)y'' - xy' + y = 0$, $x > 1$; $y_1(x) = e^x$
29. $x^2y'' - (x - 0{,}1875)y = 0$, $x > 0$; $y_1(x) = x^{1/4}e^{2\sqrt{x}}$
30. $x^2y'' + xy' + (x^2 - 0{,}25)y = 0$, $x > 0$; $y_1(x) = x^{-1/2}\operatorname{sen} x$
31. A equação diferencial

$$y'' + \delta(xy' + y) = 0$$

aparece no estudo da turbulência em um fluxo uniforme ao passar por um cilindro circular. Verifique se $y_1(x) = \exp(-\delta x^2/2)$ é uma solução e depois encontre a solução geral na forma de uma integral.

32. O método do Problema 20 pode ser estendido para equações de segunda ordem com coeficientes variáveis. Se y_1 é uma solução conhecida de $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0$, que não se anula, mostre que uma segunda solução y_2 satisfaz $(y_2/y_1)' = W(y_1, y_2)/y_1^2$, em que $W(y_1, y_2)$ é o wronskiano de y_1 e y_2. Depois use a fórmula de Abel [Eq. (23) da Seção 3.2] para determinar y_2.

Em cada um dos problemas de 33 a 36, use o método do Problema 32 para encontrar uma segunda solução independente da equação dada.

33. $t^2y'' + 3ty' + y = 0, \quad t > 0; \quad y_1(t) = t^{-1}$

34. $ty'' - y' + 4t^3y = 0, \quad t > 0; \quad y_1(t) = \text{sen}(t^2)$

35. $(x - 1)y'' - xy' + y = 0, \quad x > 1; \quad y_1(x) = e^x$

36. $x^2y'' + xy' + (x^2 - 0{,}25)y = 0, \quad x > 0; \quad y_1(x) = x^{-1/2}\,\text{sen}\,x$

Comportamento de Soluções quando $t \to \infty$. Os problemas de 37 a 39 tratam do comportamento de soluções no limite quando $t \to \infty$.

37. Se a, b e c são constantes positivas, mostre que todas as soluções de $ay'' + by' + cy = 0$ tendem a zero quando $t \to \infty$.

38. (a) Se $a > 0$ e $c > 0$, mas $b = 0$, mostre que o resultado do Problema 37 não continua válido, mas que todas as soluções permanecem limitadas quando $t \to \infty$.

(b) Se $a > 0$ e $b > 0$, mas $c = 0$, mostre que o resultado do Problema 37 não continua válido, mas que todas as soluções tendem a uma constante, que depende da condição inicial, quando $t \to \infty$. Determine essa constante para as condições iniciais $y(0) = y_0$, $y'(0) = y'_0$.

39. Mostre que $y = \text{sen}\,t$ é uma solução de

$$y'' + (k\,\text{sen}^2\,t)y' + (1 - k\cos t\,\text{sen}\,t)y = 0$$

para qualquer valor da constante k. Se $0 < k < 2$, mostre que $1 - k\cos t\,\text{sen}\,t > 0$ e $k\,\text{sen}^2 t \geq 0$. Observe então que, embora os coeficientes dessa equação diferencial com coeficientes variáveis sejam não negativos (e o coeficiente de y' se anule apenas nos pontos $t = 0, \pi, 2\pi, \ldots$), ela tem uma solução que não tende a zero quando $t \to \infty$. Compare essa situação com o resultado do Problema 37. Observamos, assim, uma situação que não é incomum na teoria de equações diferenciais: equações aparentemente bastante semelhantes podem ter propriedades muito diferentes.

Equações de Euler. Em cada um dos problemas de 40 a 45, use a substituição introduzida no Problema 34 da Seção 3.3 para resolver a equação diferencial dada.

40. $t^2y'' - 3ty'' + 4y = 0, \quad t > 0$

41. $t^2y'' + 2ty' + 0{,}25y = 0, \quad t > 0$

42. $2t^2y'' - 5ty' + 5y = 0, \quad t > 0$

43. $t^2y'' + 3ty' + y = 0, \quad t > 0$

44. $4t^2y'' - 8ty' + 9y = 0, \quad t > 0$

45. $t^2y'' + 5ty' + 13y = 0, \quad t > 0$

RESPOSTAS

Respostas dos exercícios de raízes complexas

1. $e \cos 2 + ie \operatorname{sen} 2 \cong = -1{,}1312 + 2{,}4717i$
2. $e^2 \cos 3 - ie^2 \operatorname{sen} 3 \cong = -7{,}3151 - 1{,}0427i$
3. -1
4. $e^2 \cos(\pi/2) - ie^2 \operatorname{sen}(\pi/2) = -e^2 i \cong -7{,}3891i$
5. $2 \cos(\ln 2) - 2i \operatorname{sen}(\ln 2) \cong 1{,}5385 - 1{,}2779i$
6. $\pi^{-1} \cos(2 \ln \pi) + i\pi^{-1} \operatorname{sen}(2 \ln \pi) \cong -0{,}20957 + 0{,}23959i$
7. $y = c_1 e^t \cos t + c_2 e^t \operatorname{sen} t$
8. $y = c_1 e^t \cos \sqrt{5}\, t + c_2 e^t \operatorname{sen} \sqrt{5}\, t$
9. $y = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-4t}$
10. $y = c_1 e^{-t} \cos t + c_2 e^{-t} \operatorname{sen} t$
11. $y = c_1 e^{-3t} \cos 2t + c_2 e^{-3t} \operatorname{sen} 2t$
12. $y = c_1 \cos(3t/2) + c_2 \operatorname{sen}(3t/2)$
13. $y = c_1 e^{-t} \cos(t/2) + c_2 e^{-t} \operatorname{sen}(t/2)$
14. $y = c_1 e^{t/3} + c_2 e^{-4t/3}$
15. $y = c_1 e^{-t/2} \cos t + c_2 e^{-t/2} \operatorname{sen} t$
16. $y = c_1 e^{-2t} \cos(3t/2) + c_2 e^{-2t} \operatorname{sen}(3t/2)$
17. $y = \frac{1}{2} \operatorname{sen} 2t$; oscilação regular
18. $y = e^{-2t} \cos t + 2e^{-2t} \operatorname{sen} t$; oscilação decaindo
19. $y = -e^{t-\pi/2} \operatorname{sen} 2t$; oscilação crescente
20. $y = (1+2\sqrt{3}) \cos t - (2-\sqrt{3}) \operatorname{sen} t$; oscilação regular
21. $y = 3e^{-t/2} \cos t + \frac{5}{2} e^{-t/2} \operatorname{sen} t$; oscilação decaindo
22. $y = \sqrt{2}\, e^{-(t-\pi/4)} \cos t + \sqrt{2}\, e^{-(t-\pi/4)} \operatorname{sen} t$; oscilação decaindo
23. **(a)** $u = 2e^{t/6} \cos(\sqrt{23}\, t/6) - (2/\sqrt{23})\, e^{t/6} \operatorname{sen}(\sqrt{23}\, t/6)$
    (b) $t = 10{,}7598$
24. **(a)** $u = 2e^{-t/5} \cos(\sqrt{34}\, t/5) + (7/\sqrt{34})\, e^{-t/5} \operatorname{sen}(\sqrt{34}\, t/5)$
    (b) $T = 14{,}5115$
25. **(a)** $y = 2e^{-t} \cos \sqrt{5}\, t + [(\alpha + 2)/\sqrt{5}]\, e^{-t} \operatorname{sen} \sqrt{5}\, t$
    (b) $\alpha = 1{,}50878$
    (c) $t = \{\pi - \arctan[2\sqrt{5}/(2 + \alpha)]\}/\sqrt{5}$
    (d) $\pi/\sqrt{5}$
26. **(a)** $y = e^{-at} \cos t + ae^{-at} \operatorname{sen} t$
    (b) $T = 1{,}8763$
    (c) $\alpha = \frac{1}{4}$, $T = 7{,}4284$; $\alpha = \frac{1}{2}$, $T = 4{,}3003$; $\alpha = 2$, $T = 1{,}5116$

35. $y = c_1 \cos(\ln t) + c_2 \operatorname{sen}(\ln t)$
36. $y = c_1 t^{-1} + c_2 t^{-2}$
37. $y = c_1 t^{-1} \cos(\frac{1}{2} \ln t) + c_2 t^{-1} \operatorname{sen}(\frac{1}{2} \ln t)$
38. $y = c_1 t^6 + c_2 t^{-1}$
39. $y = c_1 t^2 + c_2 t^3$
40. $y = c_1 t \cos(2 \ln t) + c_2 t \operatorname{sen}(2 \ln t)$
41. $y = c_1 t + c_2 t^{-3}$
42. $y = c_1 t^{-3} \cos(\ln t) + c_2 t^{-3} \operatorname{sen}(\ln t)$

44. Sim, $y = c_1 \cos x + c_2 \operatorname{sen} x, \quad x = \int e^{-t^2/2}\, dt$

45. Não

46. Sim, $y = c_1 e^{-t^2/4} \cos(\sqrt{3}t^2/4) + c_2 e^{-t^2/4} \operatorname{sen}(\sqrt{3}t^2/4)$

Respostas dos exercícios de raízes repetidas

1. $y = c_1 e^t + c_2 t e^t$
2. $y = c_1 e^{-t/3} + c_2 e^{-t/3}$
3. $y = c_1 e^{-t/2} + c_2 e^{3t/2}$
4. $y = c_1 e^{-3t/2} + c_2 t e^{-3t/2}$
5. $y = c_1 e^t \cos 3t + c_2 e^t \operatorname{sen} 3t$
6. $y = c_1 e^{3t} + c_2 t e^{3t}$
7. $y = c_1 e^{-t/4} + c_2 e^{-4t}$
8. $y = c_1 e^{-3t/4} + c_2 t e^{-3t/4}$
9. $y = c_1 e^{2t/5} + c_2 t e^{2t/5}$
10. $y = e^{-t/2} \cos(t/2) + c_2 e^{-t/2} \operatorname{sen}(t/2)$
11. $y = 2e^{2t/3} - \frac{7}{3} t e^{2t/3}, \quad y \to -\infty$ quando $t \to \infty$
12. $y = 2te^{3t}, \quad y \to \infty$ quando $t \to \infty$
13. $y = -e^{-t/3} \cos 3t + \frac{5}{9} e^{-t/3} \operatorname{sen} 3t, \quad y \to 0$ quando $t \to \infty$
14. $y = 7e^{-2(t+1)} + 5te^{-2(t+1)}$, $y \to 0$ quando $t \to \infty$
15. (a) $y = e^{-3t/2} - \frac{5}{2} t e^{-3t/2}$
    (b) $t = \frac{2}{5}$
    (c) $t_0 = 16/15, \quad y_0 = -\frac{5}{3} e^{-8/5} \cong -0{,}33649$
    (d) $y = e^{-3t/2} + (b + \frac{3}{2}) t e^{-3t/2}; \quad b = -\frac{3}{2}$
16. $y = 2e^{t/2} + (b-1)te^{t/2}; \quad b = 1$
17. (a) $y = e^{-t/2} + \frac{5}{2} t e^{-t/2}$
    (b) $t_M = \frac{8}{5}, \quad y_M = 5e^{-4/5} \cong 2{,}24664$
    (c) $y = e^{-t/2} + (b + \frac{1}{2}) t e^{-t/2}$
    (d) $t_M = 4b/(1+2b) \to 2$ quando $b \to \infty$; $y_M = (1+2b) \exp[-2b/(1+2b)] \to \infty$ quando $b \to \infty$
18. (a) $y = ae^{-2t/3} + (\frac{2}{3}a - 1) t e^{-2t/3}$
    (b) $a = \frac{3}{2}$

23. $y_2(t) = t^3$
24. $y_2(t) = t^{-2}$
25. $y_2(t) = t^{-1} \ln t$
26. $y_2(t) = te^t$
27. $y_2(x) = \cos x^2$
28. $y_2(x) = x$
29. $y_2(x) = x^{1/4} e^{-2\sqrt{x}}$
30. $y_2(x) = x^{-1/2} \cos x$
31. $$y = c_1 e^{-\delta x^2/2} \int_0^x e^{\delta s^2/2}\, ds + c_2 e^{-\delta x^2/2}$$
32. $$y_2(t) = y_1(t) \int_{t_0}^t y_1^{-2}(s) \exp\left[-\int_{s_0}^s p(r)\, dr\right] ds$$
33. $y_2(t) = t^{-1} \ln t$

34. $y_2(t) = \cos t^2$

35. $y_2(x) = x$

36. $y_2(x) = x^{-1/2} \cos x$

38. **(b)** $y_0 + (a/b)y_0$

40. $y = c_1 t^2 + c_2 t^2 \ln t$

41. $y = c_1 t^{-1/2} + c_2 t^{-1/2} \ln t$

42. $y = c_1 t + c_2 t^{5/2}$

43. $y = c_1 t^{-1} + c_2 t^{-1} \ln t$

44. $y = c_1 t^{3/2} + c_2 t^{3/2} \ln t$

45. $y = c_1 t^{-2} \cos(3 \ln t) + c_2 t^{-2} \operatorname{sen}(3 \ln t)$