EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARA ENGENHARIA ELÉTRICA

TE 315

Aula 03_3

Raízes Repetidas e Complexas da Equação Característica

Raízes Complexas e Repetidas

INTRODUÇÃO

Vamos continuar com nossa equação $ay'' + by' + cy = 0$
em que a, b e c são constantes.
Já vimos que se procurarmos soluções da forma y = e^{rt}, então r tem que ser raiz da equação característica

$$y(t) = e^{rt} \Rightarrow ar^2 + br + c = 0$$

ou seja:

$$r_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Já vimos que, se as raízes r_1 e r_2 forem reais e distintas, o que ocorre sempre que o discriminante $b^2 - 4ac$ for positivo, então a solução geral será

$$y(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}$$

Suponha, agora, que $b^2 - 4ac$ é negativo. Então as raízes são números complexos conjugados; vamos denominar elas $r_1 = \lambda + i\mu$ e $r_2 = \lambda - i\mu$, então

$$y_1(t) = e^{(\lambda + i\mu)t} \qquad y_2(t) = e^{(\lambda - i\mu)t}$$

Raízes Complexas e Repetidas

RAÍZES COMPLEXAS

O que significa elevar o número “e” a uma potência complexa?

$$y_1(t) = e^{(\lambda+i\mu)t} \qquad y_2(t) = e^{(\lambda-i\mu)t}$$

A resposta é dada por uma relação importante conhecida como fórmula de Euler.

Fórmula de Euler. Para atribuir significado a essas expressões precisamos definir a função exponencial complexa.

Exigimos que a definição se reduza à função exponencial real habitual quando o expoente for real. Existem várias maneiras de descobrir como essa extensão da função exponencial deveria ser definida. Vamos usar aqui um método baseado em séries infinitas

Lembre-se, do Cálculo, de que a série de Taylor para e^t em torno de t = 0 é:

$$e^{it} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{(2n)!} + i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} t^{2n-1}}{(2n-1)!} = \cos t + i \sin t$$

Raízes Complexas e Repetidas

RAÍZES COMPLEXAS

Desta forma, podemos adotar esta fórmula como a definição da exponencial complexa

$$e^{it} \equiv \cos t + i \sin t$$

Generalizando... $e^{i\mu t} = \cos \mu t + i \sin \mu t$

No nosso caso: $e^{(\lambda+i\mu)t} = e^{\lambda t} e^{i\mu t} = e^{\lambda t}[\cos \mu\, t + i \sin \mu\, t] = e^{\lambda t} \cos \mu\, t + i e^{\lambda t} \sin \mu\, t$

De onde concluímos que:

$$y_1(t) = e^{(\lambda+i\mu)t} = e^{\lambda t} \cos \mu\, t + i e^{\lambda t} \sin \mu\, t$$
$$y_2(t) = e^{(\lambda-i\mu)t} = e^{\lambda t} \cos \mu\, t - i e^{\lambda t} \sin \mu\, t$$

Entretanto, nossa equação diferencial só tinha coeficientes reais, portanto é desejável, muitas vezes, expressar a solução de tais problemas em termos de funções reais.

Raízes Complexas e Repetidas

RAÍZES COMPLEXAS

Para isso, podemos usar o Teorema 6, que afirma que as partes real e imaginária de uma solução complexa da nossa equação, cada uma delas, também é solução da equação. Assim, obtemos

$$y_3(t) = e^{\lambda t}\cos\mu t$$
$$y_4(t) = e^{\lambda t}\sin\mu t$$

Vamos ver se conseguimos construir o conjunto fundamental de soluções...

$$W = \begin{vmatrix} e^{\lambda t}\cos\mu t & e^{\lambda t}\sin\mu t \\ e^{\lambda t}(\lambda\cos\mu t - \mu\sin\mu t) & e^{\lambda t}(\lambda\sin\mu t + \mu\cos\mu t) \end{vmatrix} = \mu e^{2\lambda t} \neq 0$$

Você pode verificar que $W(y_1, y_2)(t)$ nunca se anula; logo, a solução geral pode ser expressa como uma combinação linear de $y_1(t)$ e $y_2(t)$ com coeficientes arbitrários.

$$y(t) = c_1 e^{\lambda t}\cos\mu t + c_2 e^{\lambda t}\sin\mu t$$

Raízes Complexas e Repetidas

Exemplo 1

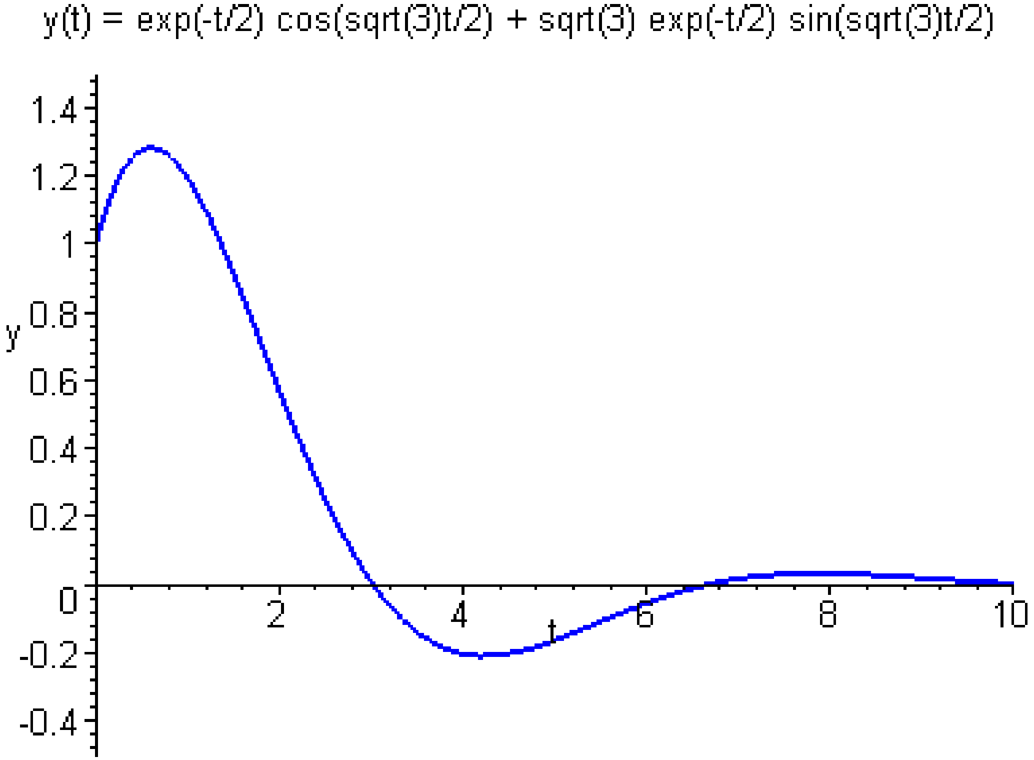
Vamos considerar a equação: $$y'' + y' + y = 0$$

Então: $$y(t) = e^{rt} \Rightarrow r^2 + r + 1 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$$

Portanto: $$\lambda = -\frac{1}{2} \qquad \mu = \sqrt{3}/2$$

E a solução geral será:

$$y(t) = c_1 e^{-t/2}\cos\left(\sqrt{3}t/2\right) + c_2 e^{-t/2}\sin\left(\sqrt{3}t/2\right)$$



Raízes Complexas e Repetidas

Exemplo 2

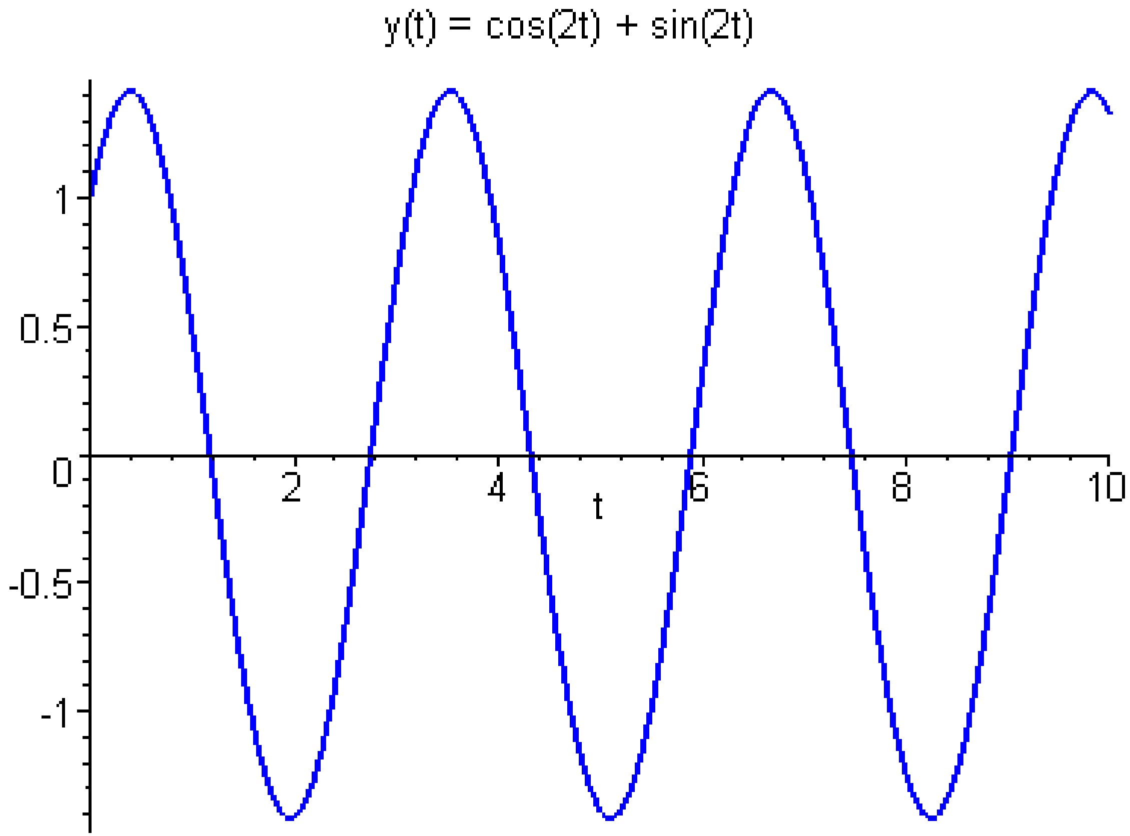
Vamos considerar a equação: $y'' + 4y = 0$

Então: $y(t) = e^{rt} \Rightarrow r^2 + 4 = 0 \Rightarrow r_{1,2} = \pm 2i$

Portanto: $\lambda = 0 \qquad \mu = 2$

E a solução geral será:

$$y(t) = c_1 \cos(2t) + c_2 \sin(2t)$$



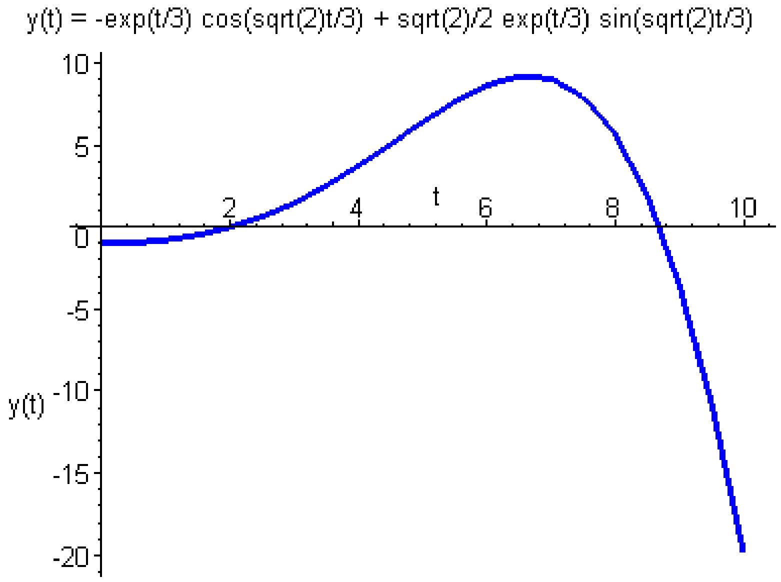
Raízes Complexas e Repetidas

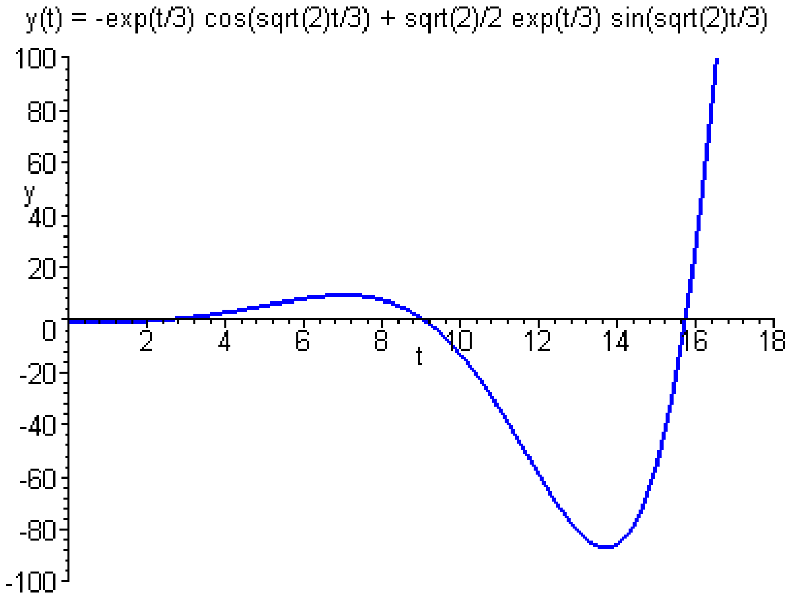
Exemplo 3

Vamos considerar a equação: $3y'' - 2y + y = 0$

Então: $y(t) = e^{rt} \Rightarrow 3r^2 - 2r + 1 = 0 \Leftrightarrow r = \dfrac{2 \pm \sqrt{4 - 12}}{6} = \dfrac{1}{3} \pm \dfrac{\sqrt{2}}{3} i$

A solução geral será: $y(t) = c_1 e^{t/3} \cos\left(\sqrt{2}t/3\right) + c_2 e^{t/3} \sin\left(\sqrt{2}t/3\right)$





Raízes Complexas e Repetidas

Exemplo 4

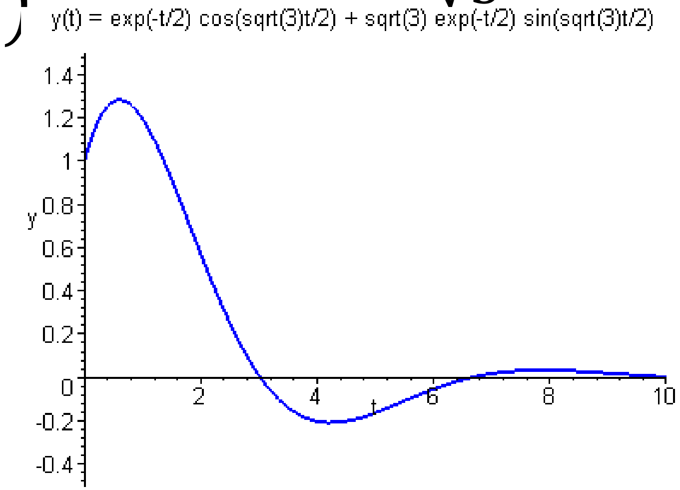
Vamos considerar novamente a equação: $y'' + y' + y = 0$

Mas agora vamos adicionar as condições iniciais y(0)=1 e y´(0)=1
Além disso desejamos determinar o menor tempo T para o qual $|y(t)| \leq 0{,}1$

Já sabemos que a solução geral é: $y(t) = c_1 e^{-t/2}\cos\left(\sqrt{3}t/2\right) + c_2 e^{-t/2}\sin\left(\sqrt{3}t/2\right)$

Utilizando as condições inicias obtemos: $\left.\begin{aligned} c_1 &= 1 \\ -\frac{1}{2}c_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}c_2 &= 1 \end{aligned}\right\} \Rightarrow c_1 = 1, c_2 = \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$

Portanto: $y(t) = e^{-t/2}\cos\left(\sqrt{3}t/2\right) + \sqrt{3}e^{-t/2}\sin\left(\sqrt{3}t/2\right)$



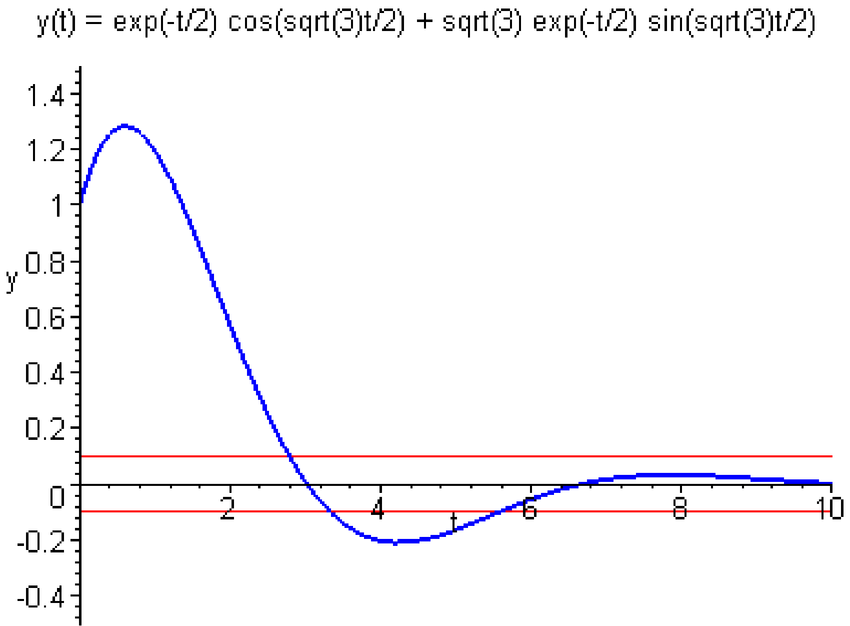
Raízes Complexas e Repetidas

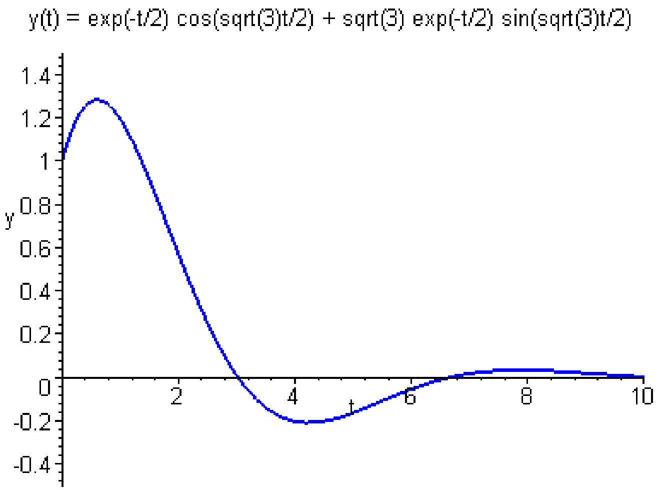
Exemplo 4

Vamos determinar o menor tempo T para o qual $|y(t)| \leq 0{,}1$

Nossa solução é $$y(t) = e^{-t/2}\cos\left(\sqrt{3}t/2\right) + \sqrt{3}e^{-t/2}\sin\left(\sqrt{3}t/2\right)$$

Com o auxilio de um computador gráfico ou de um programa de álgebra, podemos encontrar (veja a figura) que T≈2,79





Raízes Complexas e Repetidas

RAIZES REPETIDAS

Vamos continuar com nossa equação $ay'' + by' + cy = 0$
em que a, b e c são constantes.
Mas agora vamos considerar a terceira possibilidade, a saber, quando as duas raízes r_1 e r_2 são iguais.
Esse caso faz a transição entre os outros dois e ocorre quando o discriminante $b^2 - 4ac = 0$ e $r_1 = r_2 = -b/2a$

O problema aparece imediatamente: ambas as raízes geram a mesma solução

$$y_1(t) = ce^{-bt/2a}$$

Não é nada trivial encontrar a segunda solução para compor o conjunto fundamental de soluções (a solução geral).

Raízes Complexas e Repetidas

RAIZES REPETIDAS

Para encontrar a solução geral precisamos de uma segunda solução que não seja múltiplo de y_1.

Essa segunda solução pode ser encontrada de diversas maneiras, usaremos aqui um método descoberto por D'Alembert no século XVIII.

Lembre que, como $y_1(t)$ é uma solução, $cy_1(t)$ também é para qualquer constante c.

A ideia básica é generalizar essa observação substituindo c por uma função v(t) e depois tentar determinar v(t) de modo que o produto $v(t)y_1(t)$ seja também solução da equação.

Para seguir esse programa, vamos substituir $y = v(t)y_1(t)$ na equação $ay'' + by' + cy = 0$ e usar a equação resultante para encontrar v(t)...

Raízes Complexas e Repetidas

RAIZES REPETIDAS

$$\text{Como } y_1(t) = e^{-bt/2a} \text{ é solução } \Rightarrow \text{ tentamos } y_2(t) = v(t)e^{-bt/2a}$$

Então

$$y_2(t) = v(t)e^{-bt/2a}$$

$$y_2'(t) = v'(t)e^{-bt/2a} - \frac{b}{2a}v(t)e^{-bt/2a}$$

$$y_2''(t) = v''(t)e^{-bt/2a} - \frac{b}{2a}v'(t)e^{-bt/2a} - \frac{b}{2a}v'(t)e^{-bt/2a} + \frac{b^2}{4a^2}v(t)e^{-bt/2a}$$

Substituindo as derivadas e a própria função y_2 na equação $ay'' + by' + cy = 0$ deixamos em evidência v(t)...

Raízes Complexas e Repetidas

RAIZES REPETIDAS

$$e^{-bt/2a}\left\{a\left[v''(t)-\frac{b}{a}v'(t)+\frac{b^2}{4a^2}v(t)\right]+b\left[v'(t)-\frac{b}{2a}v(t)\right]+cv(t)\right\}=0$$

$$av''(t)-bv'(t)+\frac{b^2}{4a}v(t)+bv'(t)-\frac{b^2}{2a}v(t)+cv(t)=0$$

$$av''(t)+\left(\frac{b^2}{4a}-\frac{b^2}{2a}+c\right)v(t)=0$$

$$av''(t)+\left(\frac{b^2}{4a}-\frac{2b^2}{4a}+\frac{4ac}{4a}\right)v(t)=0 \Leftrightarrow av''(t)+\left(\frac{-b^2}{4a}+\frac{4ac}{4a}\right)v(t)=0$$

$$av''(t)-\cancel{\left(\frac{b^2-4ac}{4a}\right)}v(t)=0$$

b^2-4ac é evidentemente zero na nossa equação

$$v''(t)=0 \Rightarrow v(t)=k_4+k_3t$$

Portanto fica esta condição

Agora retornamos à solução geral...

Raízes Complexas e Repetidas

RAIZES REPETIDAS

$$\begin{aligned} y(t) &= k_1 e^{-bt/2a} + k_2 v(t) e^{-bt/2a} \\ &= k_1 e^{-bt/2a} + (k_3 t + k_4) e^{-bt/2a} \\ &= c_1 e^{-bt/2a} + c_2 t e^{-bt/2a} \end{aligned}$$

Toda combinação linear de $y_1 = c_1 e^{-bt/2a}$ e $y_2 = c_2\, t e^{-bt/2a}$ é solução.

O wronskiano destas duas soluções é:

$$W(y_1, y_2)(t) = \begin{vmatrix} e^{-bt/2a} & te^{-bt/2a} \\ -\dfrac{b}{2a} e^{-bt/2a} & \left(1 - \dfrac{bt}{2a}\right) e^{-bt/2a} \end{vmatrix} = e^{-bt/a}\left(1 - \frac{bt}{2a}\right) + e^{-bt/a}\left(\frac{bt}{2a}\right)$$

$$= e^{-bt/a} \neq 0 \quad \text{for all } t$$

Portanto y_1 e y_2 formam um conjunto fundamental de soluções da equação

Raízes Complexas e Repetidas

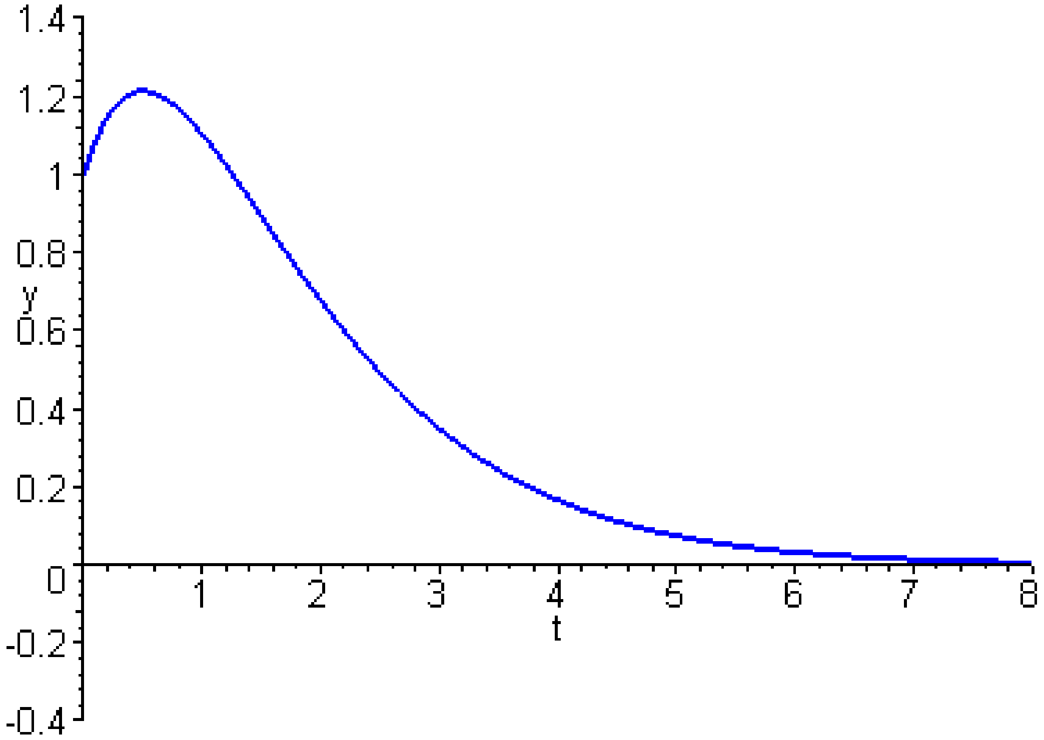
Exemplo 5

Vamos considerar a equação: $y'' + 2y' + y = 0$

Com as condições iniciais y(0)=1 e y´(0)=1

A equação característica é: $r^2 + 2r + 1 = 0 \Leftrightarrow (r+1)^2 = 0 \Leftrightarrow r = -1$

A solução geral é: $y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t}$



Das condições iniciais temos:

$$\left.\begin{array}{rcl} c_1 & = & 1 \\ -c_1 + c_2 & = & 1 \end{array}\right\} \Rightarrow c_1 = 1, c_2 = 2$$

Portanto: $y(t) = e^{-t} + 2te^{-t}$

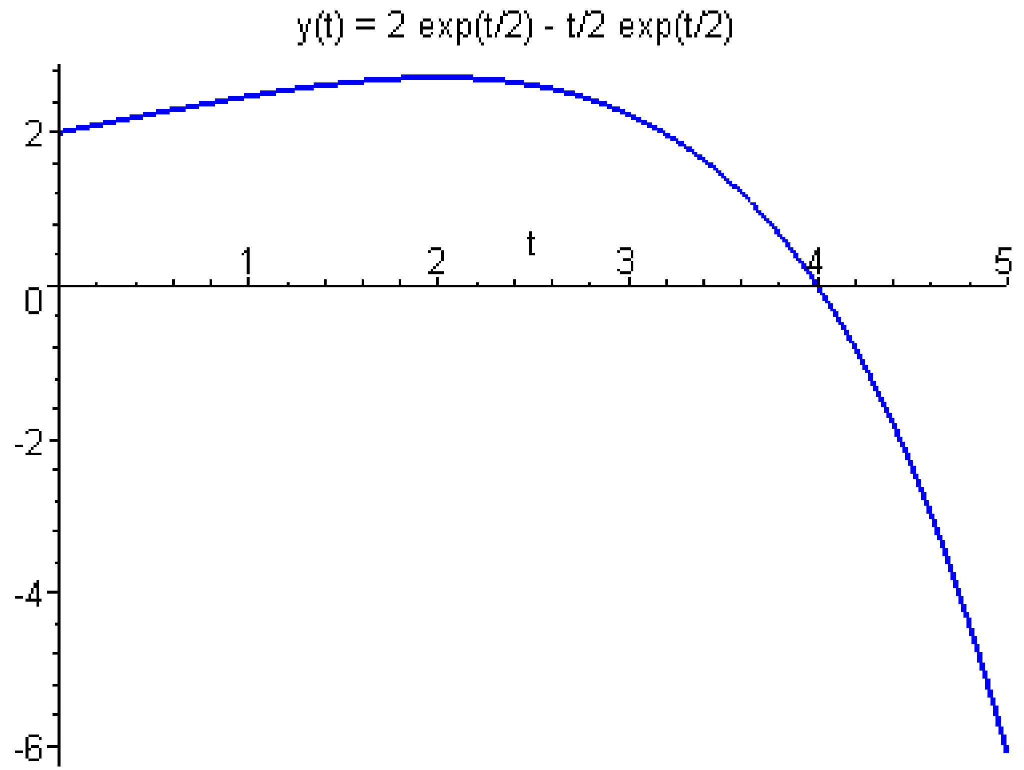
Raízes Complexas e Repetidas

Exemplo 6

Vamos considerar a equação: $y'' - y' + 0.25y = 0, \qquad y(0) = 2 \quad y'(0) = 1/2$

A equação característica é: $r^2 - r + 0.25 = 0 \Leftrightarrow (r - 1/2)^2 = 0 \Leftrightarrow r = 1/2$

A solução geral é: $y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t}$



Das condições iniciais temos:

$$\left.\begin{array}{rcl} y_0 = c_1 & = & 2 \\ y_0' = \frac{1}{2}c_1 + c_2 & = & \frac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow c_1 = 2, c_2 = -\frac{1}{2}$$

Portanto: $y(t) = 2e^{t/2} - \frac{1}{2}te^{t/2}$

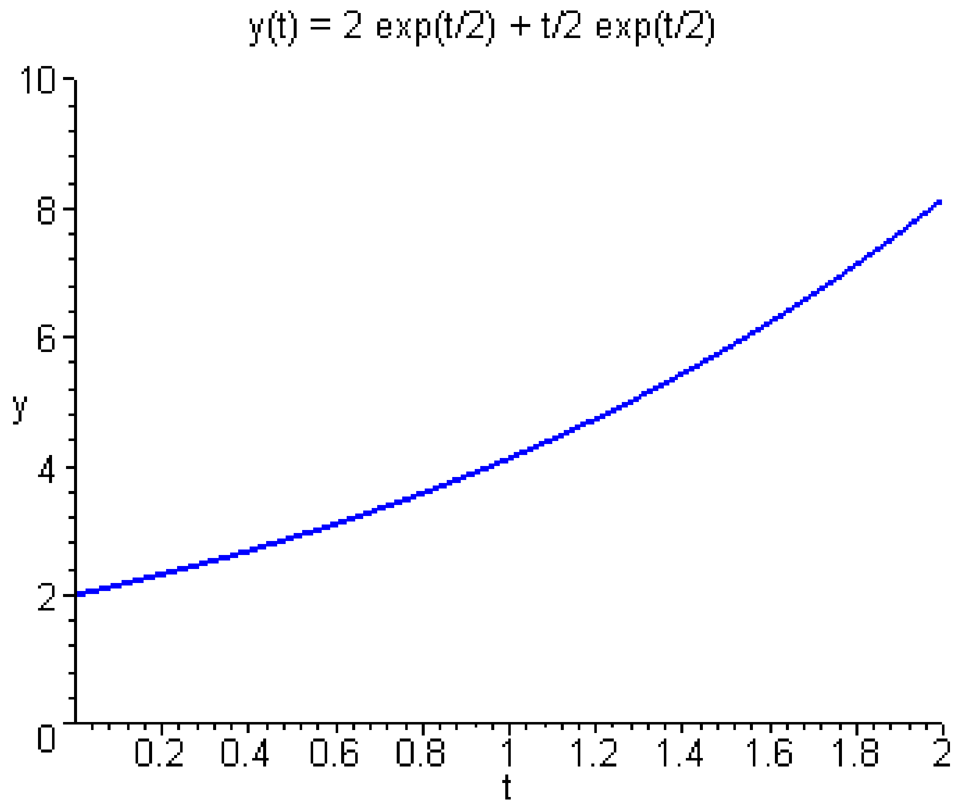
Raízes Complexas e Repetidas

Exemplo 7

Vamos considerar a equação: $y'' - y' + 0.25y = 0, \qquad y(0) = 2 \quad y'(0) = 3/2$

A equação característica é: $r^2 - r + 0.25 = 0 \Leftrightarrow (r - 1/2)^2 = 0 \Leftrightarrow r = 1/2$

A solução geral é: $y(t) = c_1 e^{-t} + c_2 t e^{-t}$



Das condições iniciais temos:

$$\left.\begin{array}{rcl} c_1 & = & 2 \\ \frac{1}{2}c_1 + c_2 & = & \frac{3}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow c_1 = 2, c_2 = \frac{1}{2}$$

Portanto: $y(t) = 2e^{\frac{t}{2}} + \frac{1}{2} t e^{t/2}$

Raízes Complexas e Repetidas

Redução de ordem

Vale a pena observar que o procedimento usado nesta seção para equações com coeficientes constantes é aplicável a equações com coeficientes variáveis. Vejamos a equação com coeficientes variáveis a seguir:

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$$

Supondo que y_1 seja solução, para encontrar uma segunda solução tentamos

$$\begin{aligned} y_2(t) &= v(t)y_1(t) \\ y_2'(t) &= v'(t)y_1(t) + v(t)y_1'(t) \\ y_2''(t) &= v''(t)y_1(t) + 2v'(t)y_1'(t) + v(t)y_1''(t) \end{aligned}$$

Substituindo na ODE e agrupando termos...

$$y_1 v'' + (2y_1' + py_1)v' + (y_1'' + py_1' + qy_1)v = 0$$

Raízes Complexas e Repetidas

Redução de ordem

$$y_1 v'' + (2y_1' + py_1)v' + (y_1'' + py_1' + qy_1)v = 0$$

Como y_1 é uma solução da equação o coeficiente de v é zero, de modo que fica:

$$y_1 v'' + (2y_1' + py_1)v' = 0$$

Apesar de sua aparência, esta equação, de fato, é uma equação de primeira ordem para a função v′ e pode ser resolvida como uma equação de primeira ordem ou como uma equação separável.

Uma vez encontrada v′, v é obtida por integração. Finalmente, a solução y é determinada por $v(t)y_1(t)$.

Este procedimento é chamado de método de redução de ordem, já que o passo crucial é a resolução de uma equação diferencial de primeira ordem para v′, em vez da equação de segunda ordem original para y.

Vamos ilustrar como o método funciona através de um exemplo.

Raízes Complexas e Repetidas

Exemplo 8

Vamos considerar a equação com a solução y_1 já fornecida:

$$t^2 y'' + 3ty' + y = 0 \qquad t > 0 \qquad y_1(t) = t^{-1}$$

Aplique o método de redução de ordem para encontrar a segunda solução.

$$\begin{aligned}
y_2(t) &= v(t)\, t^{-1} \\
y_2'(t) &= v'(t)\, t^{-1} - v(t)\, t^{-2} \\
y_2''(t) &= v''(t)\, t^{-1} - 2v'(t)\, t^{-2} + 2v(t)\, t^{-3}
\end{aligned}$$

Substituindo na ODE...

$$\begin{aligned}
& t^2\left(v''t^{-1} - 2v't^{-2} + 2vt^{-3}\right) + 3t\left(v't^{-1} - vt^{-2}\right) + vt^{-1} = 0 \\
& \Leftrightarrow v''t - 2v' + 2vt^{-1} + 3v' - 3vt^{-1} + vt^{-1} = 0 \\
& \Leftrightarrow tv'' + v' = 0 \\
& \Leftrightarrow tu' + u = 0, \text{where } u(t) = v'(t)
\end{aligned}$$

Raízes Complexas e Repetidas

Exemplo 8

Obtivemos assim uma equação de primeira ordem para u! $tu' + u = 0, u(t) = v'(t)$

Para encontrar a solução da equação para u(t) aplicamos o método de separação de variáveis...

$$t\frac{du}{dt} + u = 0 \Leftrightarrow \int \frac{du}{u} = -\int \frac{1}{t}dt \Leftrightarrow \ln|u| = -\ln|t| + C$$

$$\Leftrightarrow |u| = |t|^{-1}e^{C} \Leftrightarrow u = ct^{-1}, \text{pois } t > 0.$$

Portanto $v' = \frac{c}{t}$ e $v(t) = c\ln t + k$

Então $y_2(t) = (c\ln t + k)t^{-1} = ct^{-1}\ln t + kt^{-1}$

Comentário: a segunda parte de y_2 será desconsiderada pois já está incluída em y_1

Assim, a solução geral será $\boxed{\boldsymbol{y(t) = c_1 t^{-1} + c_2 t^{-1}\ln t}}$

Raízes Complexas e Repetidas

Exemplo 8

Podem verificar que o wronskiano de y_1 e y_2 é

$$W = \frac{3}{2}t^{-\frac{3}{2}} \neq 0 \; para \; t > 0 \text{ que era nossa condição}$$

Portanto y_1 e y_2 formam um conjunto fundamental de soluções da equação original para $t > 0$.

Raízes Complexas e Repetidas

Lista de exercícios disponível em:

http://www.eletrica.ufpr.br/p/professores:patricio:inicial

Disciplina TE315 (Equações Diferenciais para Engenharia Elétrica)

Gabaritos disponíveis no mesmo endereço