LISTA 03_2 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS
Soluções fundamentais
Respostas no final
Gabaritos na página do professor

Em cada um dos problemas de 1 a 6, encontre o wronskiano do par de funções dado.

1. $e^{2t}, \quad e^{-3t/2}$
2. $\cos t, \quad \text{sen}\ t$
3. $e^{-2t}, \quad te^{-2t}$
4. $x, \quad xe^{x}$
5. $e^{t}\ \text{sen}\ t, \quad e^{t}\cos t$
6. $\cos^2\theta, \quad 1+\cos 2\theta$

Em cada um dos problemas de 7 a 12, determine o maior intervalo no qual o problema de valor inicial dado certamente tem uma única solução duas vezes diferenciável. Não tente encontrar a solução.

7. $ty'' + 3y = t, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 2$
8. $(t-1)y'' - 3ty' + 4y = \text{sen}\ t, \quad y(-2) = 2, \quad y'(-2) = 1$
9. $t(t-4)y'' + 3ty' + 4y = 2, \quad y(3) = 0, \quad y'(3) = -1$
10. $y'' + (\cos t)y' + 3(\ln|t|)y = 0, \quad y(2) = 3, \quad y'(2) = 1$
11. $(x-3)y'' + xy' + (\ln|x|)y = 0, \quad y(1) = 0, \quad y'(1) = 1$
12. $(x-2)y'' + y' + (x-2)(\tan x)y = 0, \quad y(3) = 1, \quad y'(3) = 2$

13.Verifique se $y_1(t) = t^2$ e $y_2(t) = t^{-1}$ são duas soluções da equação diferencial $t^2y'' - 2y = 0$ para $t > 0$. Depois mostre que $c_1 t^2 + c_2 t^{-1}$ também é solução dessa equação quaisquer que sejam c_1 e c_2.

14.Verifique se $y_1(t) = 1$ e $y_2(t) = t^{1/2}$ são soluções da equação diferencial $yy'' + (y')^2 = 0$ para $t > 0$. Depois mostre que $y = c_1 + c_2 t^{1/2}$ não é, em geral, solução desta equação. Explique por que este resultado não contradiz o Teorema 2.

15.Mostre que, se $y = \phi(t)$ é uma solução da equação diferencial $y'' + p(t)\, y' + q(t)y = g(t)$, em que $g(t)$ não é identicamente nula, então $y = c\phi(t)$, em que c é qualquer constante diferente de 1, não é solução. Explique por que este resultado não contradiz a observação após o Teorema 2.

16.A função $y = \text{sen}(t^2)$ pode ser solução, em um intervalo contendo $t = 0$, de uma equação da forma $y'' + p(t)\, y' + q(t)y = 0$ com coeficientes contínuos? Explique sua resposta.

17.Se o wronskiano W de f e g é $3e^{4t}$ e se $f(t) = e^{2t}$, encontre $g(t)$.

18.Se o wronskiano W de f e g é t^2e^{t} e se $f(t) = t$, encontre $g(t)$.

19.Se $W(f, g)$ é o wronskiano de f e g e se $u = 2f - g$, $v = f + 2g$, encontre o wronskiano $W(u, v)$ de u e v em função de $W(f, g)$.

20.Se o wronskiano de f e g é t cos t – sen t e se u = f + 3g, v = f – g, encontre o wronskiano de u e v.

21.Suponha que y_1 e y_2 formem um conjunto fundamental de soluções de $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$ e sejam $y_3 = a_1y_1 + a_2y_2$, $y_4 = b_1y_1 + b_2y_2$, em que a_1, a_2, b_1 e b_2 são constantes arbitrárias. Mostre que

$W(y_3, y_4) = (a_1b_2 – a_2b_1)W(y_1, y_2)$.

y_3 e y_4 também formam um conjunto fundamental de soluções? Por quê?

Em cada um dos problemas 22 e 23, encontre o conjunto fundamental de soluções especificado pelo Teorema 5 para a equação diferencial e o ponto inicial dados.

22.$y'' + y' - 2y = 0$, $t_0 = 0$

23.$y'' + 4y' + 3y = 0$, $t_0 = 1$

Em cada um dos problemas de 24 a 27, verifique se as funções y_1 e y_2 são soluções da equação diferencial dada. Elas constituem um conjunto fundamental de soluções?

24.$y'' + 4y = 0$; $y_1(t) = \cos 2t$, $y_2(t) = \text{sen } 2t$

25.$y'' - 2y' + y = 0$; $y_1(t) = e^t$, $y_2(t) = te^t$

26.$x2y'' - x(x + 2)y' + (x + 2)y = 0$, $x > 0$; $y_1(x) = x$, $y_2(x) = xe^x$

27.$(1 - x \cot x)y'' - xy' + y = 0$, $0 < x < \pi$; $y_1(x) = x$, $y_2(x) = \text{sen } x$

28.Considere a equação $y'' - y' - 2y = 0$.

(a) Mostre que $y_1(t) = e^{-t}$ e $y_2(t) = e^{2t}$ formam um conjunto fundamental de soluções.

(b) Sejam $y_3(t) = -2e^{2t}$, $y_4(t) = y_1(t) + 2y_2(t)$ e $y_5(t) = 2y_1(t) - 2y_3(t)$. As funções $y_3(t)$, $y_4(t)$ e $y_5(t)$ também são soluções da equação diferencial dada?

(c) Determine se cada par a seguir forma um conjunto fundamental de soluções: $[y_1(t), y_3(t)]$; $[y_2(t), y3(t)]$; $[y_1(t), y_4(t)]$; $[y_4(t); y_5(t)]$.

Em cada um dos problemas de 29 a 32, encontre o wronskiano de duas soluções da equação diferencial dada sem resolver a equação.

29.$t^2y'' - t(t + 2)y' + (t + 2)y = 0$

30.$(\cos t)y'' + (\text{sen } t)y' - ty = 0$

31.$x^2y'' + xy' + (x^2 - \infty^2)y = 0$, equação de Bessel

32.$(1 - x^2)y'' - 2xy' + \alpha(\alpha + 1)y = 0$, equação de Legendre

33.Mostre que, se p é diferenciável e $p(t) > 0$, então o wronskiano $W(t)$ de duas soluções de $[p(t)y']' + q(t)y = 0$ é $W(t) = c/p(t)$, em que c é uma constante.

34.Se y_1 e y_2 formam um conjunto fundamental de soluções da equação diferencial $ty'' + 2y' + te^t y = 0$ e se $W(y_1, y_2)(1) = 2$, encontre o valor de $W(y_1, y_2)(5)$.

35.Se y_1 e y_2 formam um conjunto fundamental de soluções da equação diferencial $t^2y'' - 2y' + (3 + t)y = 0$ e se $W(y_1, y_2)(2) = 3$, encontre o valor de $W(y_1, y_2)(4)$.

36.Se o wronskiano de duas soluções quaisquer de $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$ é constante, o que isso implica sobre os coeficientes p e q?

37.Se f, g e h são funções diferenciáveis, mostre que $W(fg, fh) = f^2W(g, h)$.

Nos problemas de 38 a 40, suponha que p e q são contínuas e que as funções y_1 e y_2 são soluções da equação diferencial $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$ em um intervalo aberto I.

38.Prove que, se y_1 e y_2 se anulam em um mesmo ponto em I, então não podem formar um conjunto fundamental de soluções nesse intervalo.

39.Prove que, se y_1 e y_2 atingem um máximo ou mínimo em um mesmo ponto em I, então não podem formar um conjunto fundamental de soluções nesse intervalo.

40.Prove que, se y_1 e y_2 têm um ponto de inflexão em comum em t_0 em I, então não podem formar um conjunto fundamental de soluções nesse intervalo, a menos que ambas as funções p e q se anulem em t_0.

41.Equações Exatas. A equação

$$P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0$$

é dita exata se puder ser escrita na forma

$$[P(x)y']' + [f(x)y]' = 0,$$

em que f (x) pode ser determinada em função de P(x), Q(x) e R(x). Essa última equação pode ser integrada uma vez imediatamente, resultando em uma equação de primeira ordem para y que pode ser resolvida como na aula. Igualando os coeficientes das equações precedentes e eliminando f (x), mostre que uma condição necessária para que a equação seja exata é que

$$P''(x) - Q'(x) + R(x) = 0.$$

Pode-se mostrar que essa condição também é suficiente.

Em cada um dos problemas de 42 a 45, use o resultado do Problema 41 para determinar se a equação dada é exata. Se for, resolva-a.

42.$y'' + xy' + y = 0$

43.$y'' + 3x^2y' + xy = 0$

44.$xy'' - (\cos x)y' + (\operatorname{sen} x)y = 0, \quad x > 0$

45.$x^2y'' + xy' - y = 0, \quad x > 0$

RESPOSTAS

1. $-\frac{7}{2}e^{t/2}$
2. 1
3. e^{-4t}
4. x^2e^x
5. $-e^{2t}$
6. 0
7. $0 < t < \infty$
8. $-\infty < t < 1$
9. $0 < t < 4$
10. $0 < t < \infty$
11. $0 < x < 3$
12. $2 < x < 3\pi/2$
14. A equação é não linear.
15. A equação é não homogênea.
16. Não.
17. $3te^{2t} + ce^{2t}$
18. $te^t + ct$
19. $5W(f, g)$
20. $-4(t \cos t - \text{sen } t)$
21. y_3 e y_4 formarão um conjunto fundamental de soluções, se e somente se $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$.
22. $y_1(t) = \frac{1}{3}e^{-2t} + \frac{2}{3}e^t, \quad y_2(t) = -\frac{1}{3}e^{-2t} + \frac{1}{3}e^t$
23. $y_1(t) = -\frac{1}{2}e^{-3(t-1)} + \frac{3}{2}e^{-(t-1)}, \quad y_2(t) = -\frac{1}{2}e^{-3(t-1)} + \frac{1}{2}e^{-(t-1)}$
24. Sim.
25. Sim.
26. Sim.
27. Sim.
28. **(b)** Sim.
(c) $[y_1(t), y_3(t)]$ e $[y_1(t), y_4(t)]$ são conjuntos fundamentais de soluções; $[y_2(t), y_3(t)]$ e $[y_4(t), y_5(t)]$ não sã
29. ct^2e^t
30. $c \cos t$
31. c/x
32. $c/(1 - x^2)$
34. 2/25
35. $3\sqrt{e} \cong 4{,}946$

36. $p(t) = 0$ para todo t.

40. Se t_0 for um ponto de inflexão e se $y = \phi(t)$ for uma solução, então, da equação diferencial, $p(t_0)\phi'(t_0) + q(t_0)\phi(t_0) = 0$.

42. Sim, $y = c_1 e^{-x^2/2} \int_{x_0}^{x} e^{t^2/2}\, dt + c_2 e^{-x^2/2}$

43. Não

44. Sim, $y = \dfrac{1}{\mu(x)} \left[c_1 \int_{x_0}^{x} \dfrac{\mu(t)}{t}\, dt + c_2 \right], \quad \mu(x) = \exp\left[-\int \left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{\cos x}{x} \right) dx \right]$

45. Sim, $y = c_1 x^{-1} + c_2 x$