LISTA 03_1 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS
Equações homogêneas com coeficientes constantes
Respostas no final
Gabaritos na página do professor

Em cada um dos problemas de 1 a 8, encontre a solução geral da equação diferencial dada.

1. $y'' + 2y' - 3y = 0$
2. $y'' + 3y' + 2y = 0$
3. $6y'' - y' - y = 0$
4. $2y'' - 3y' + y = 0$
5. $y'' + 5y' = 0$
6. $4y'' - 9y = 0$
7. $y'' - 9y' + 9y = 0$
8. $y'' - 2y' - 2y = 0$

Em cada um dos problemas de 9 a 16, encontre a solução do problema de valor inicial dado. Esboce o gráfico da solução e descreva seu comportamento quando t aumenta.

9. $y'' + y' - 2y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1$
10. $y'' + 4y' + 3y = 0, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = -1$
11. $6y'' - 5y' + y = 0, \quad y(0) = 4, \quad y'(0) = 0$
12. $y'' + 3y' = 0, \quad y(0) = -2, \quad y'(0) = 3$
13. $y'' + 5y' + 3y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$
14. $2y'' + y' - 4y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$
15. $y'' + 8y' - 9y = 0, \quad y(1) = 1, \quad y'(1) = 0$
16. $4y'' - y = 0, \quad y(-2) = 1, \quad y'(-2) = -1$
17. Encontre uma equação diferencial cuja solução geral é $y = c_1e^{2t} + c_2e^{-3t}$.
18. Encontre uma equação diferencial cuja solução geral é $y = c_1e^{-t/2} + c_2e^{-2t}$.
19. Encontre a solução do problema de valor inicial

$$y'' - y = 0 \qquad y(0) = 5/4 \qquad y'(0) = -3/4$$

Faça o gráfico da solução para $0 \leq t \leq 2$ e determine seu valor mínimo.

20. Encontre a solução do problema de valor inicial

$$2y'' - 3y' + y = 0 \qquad y(0) = 2 \qquad y'(0) = 1/2$$

Depois determine o valor máximo da solução e encontre, também, o ponto em que a solução se anula.

21. Resolva o problema de valor inicial $y'' - y' - 2y = 0$, $y(0) = \alpha$, $y'(0) = 2$. Depois encontre α de modo que a solução tenda a zero quando $t \to \infty$.

22. Resolva o problema de valor inicial $4y'' - y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = \beta$. Depois encontre β de modo que a solução tenda a zero quando $t \to \infty$.

Em cada um dos Problemas 23 e 24, determine os valores de α, se existirem, para os quais todas as soluções tendem a zero quando $t \to \infty$; determine, também, os valores de α, se existirem, para os quais todas as soluções (não nulas) tornam-se ilimitadas quando $t \to \infty$.

23. $y'' - (2\alpha - 1)y' + \alpha(\alpha - 1)y = 0$

24. $y'' + (3 - \alpha)y' - 2(\alpha - 1)y = 0$

25. Considere o problema de valor inicial

$2y'' + 3y' - 2y = 0$, $\quad y(0) = 1$, $\quad y'(0) = -\alpha$,

em que $\beta > 0$.

(a) Resolva o problema de valor inicial.

(b) Faça o gráfico da solução quando $\beta = 1$. Encontre as coordenadas ($t0$, $y0$) do ponto de mínimo da solução neste caso.

(c) Encontre o menor valor de β para o qual a solução não tem ponto de mínimo.

26. Considere o problema de valor inicial

$y'' + 5y' + 6y = 0$, $\quad y(0) = 2$, $\quad y'(0) = \beta$

em que $\beta > 0$.

(a) Resolva o problema de valor inicial.

(b) Determine as coordenadas t_m e y_m do ponto de máximo da solução como funções de β.

(c) Determine o menor valor de β para o qual $y_m \geq 4$.

(d) Determine o comportamento de t_m e de y_m quando $\beta \to \infty$.

27. Considere a equação $ay'' + by' + cy = d$, em que a, b, c e d são constantes.

(a) Encontre todas as soluções de equilíbrio, ou constantes, desta equação diferencial.

(b) Denote por y_e uma solução de equilíbrio, e seja $Y = y - y_e$. Então Y é o desvio de uma solução y de uma solução de equilíbrio. Encontre a equação diferencial satisfeita por Y.

RESPOSTAS

1. $y = c_1e^{t} + c_2e^{-3t}$
2. $y = c_1e^{-t} + c_2e^{-2t}$
3. $y = c_1e^{t/2} + c_2e^{-t/3}$
4. $y = c_1e^{t/2} + c_2e^{t}$
5. $y = c_1 + c_2e^{-5t}$
6. $y = c_1e^{3t/2} + c_2e^{-3t/2}$
7. $y = c_1 \exp[(9+3\sqrt{5})t/2] + c_2 \exp[(9-3\sqrt{5})t/2]$
8. $y = c_1 \exp[(1+\sqrt{3})t] + c_2 \exp[(1-\sqrt{3})t]$
9. $y = e^{t}$; $y \to \infty$ quando $t \to \infty$
10. $y = \frac{5}{2}e^{-t} - \frac{1}{2}e^{-3t}$; $y \to 0$ quando $t \to \infty$
11. $y = 12e^{t/3} - 8e^{t/2}$; $y \to -\infty$ quando $t \to \infty$
12. $y = -1 - e^{-3t}$; $y \to -1$ quando $t \to \infty$
13. $y = \frac{1}{26}(13+5\sqrt{13})\exp[(-5+\sqrt{13})t/2] + \frac{1}{26}(13-5\sqrt{13})\exp[(-5-\sqrt{13})t/2]$; $y \to 0$ quando $t \to \infty$
14. $y = (2/\sqrt{33})\exp[(-1+\sqrt{33})t/4] - (2/\sqrt{33})\exp[(-1-\sqrt{33})t/4]$; $y \to \infty$ quando $t \to \infty$
15. $y = \frac{1}{10}e^{-9(t-1)} + \frac{9}{10}e^{t-1}$; $y \to \infty$ quando $t \to \infty$
16. $y = -\frac{1}{2}e^{(t+2)/2} + \frac{3}{2}e^{-(t+2)/2}$; $y \to -\infty$ quando $t \to \infty$
17. $y'' + y' - 6y = 0$
18. $2y'' + 5y' + 2y = 0$
19. $y = \frac{1}{4}e^{t} + e^{-t}$; o mínimo é $y = 1$ em $t = \ln 2$
20. $y = -e^{t} + 3e^{t/2}$; o máximo é $y = \frac{9}{4}$ em $t = \ln(9/4)$, $y = 0$ em $t = \ln 9$
21. $\alpha = -2$
22. $\beta = -1$
23. $y \to 0$ para $\alpha < 0$; y torna-se ilimitado para $\alpha > 1$.
24. $y \to 0$ para $\alpha < 1$; não existe α tal que todas as soluções não nulas se tornam ilimitadas.
25. **(a)** $y = \frac{1}{5}(1+2\beta)e^{-2t} + \frac{1}{5}(4-2\beta)e^{t/2}$

    (b) $y \cong 0{,}71548$ quando $t = \frac{2}{5}\ln 6 \cong 0{,}71670$

    (c) $\beta = 2$
26. **(a)** $y = (6+\beta)e^{-2t} - (4+\beta)e^{-3t}$

    (b) $t_m = \ln[(12+3\beta)/(12+2\beta)]$, $y_m = \frac{4}{27}(6+\beta)^3/(4+\beta)^2$

    (c) $\beta = 6(1+\sqrt{3}) \cong 16{,}3923$

    (d) $t_m \to \ln(3/2)$, $y_m \to \infty$
27. **(a)** $y = d/c$

    (b) $aY'' + bY' + cY = 0$
28. **(a)** $b > 0$ e $0 < c < b^2/4a$

    (b) $c < 0$

    (c) $b < 0$ e $0 < c < b^2/4a$