EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARA ENGENHARIA ELÉTRICA
TE 315

Aula 03_1

EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINARIAS HOMOGÊNEAS DE SEGUNDA ORDEM COM COEFICIÊNTES CONSTANTES

ODE 2º ordem homogêneas com coeficientes constantes

INTRODUÇÃO

Uma ODE de segunda ordem tem a forma

$$y'' \equiv \frac{d^2y}{dt^2} = f(t, y, y')$$

em que f é uma função conhecida de t, y e y´

Em geral, a variável independente será t, já que o tempo é, com frequência, a variável independente em fenômenos físicos, mas, algumas vezes, usaremos x em seu lugar. Em geral utilizaremos y como variável dependente

Esta equação é dita linear se a função f é linear em y e y´ ou seja:

$$f(t, y, y') = g(t) - r(t)y - q(t)\frac{dy}{dt}$$

Esta equação é dita homogênea se g(t)=0

$$P(t)\frac{d^2y}{dt^2} + Q(t)\frac{dy}{dt} + R(t)y = 0$$

ODE 2º ordem homogêneas com coeficientes constantes

INTRODUÇÃO

Uma vez resolvida a equação homogênea, sempre é possível resolver a equação não homogênea correspondente ou, pelo menos, expressar sua solução em função de uma integral. Assim, o problema de resolver a equação homogênea é o mais fundamental.

Vamos concentrar nossa atenção, nesta aula, nas equações nas quais as funções P, Q e R são constantes (coeficientes constantes). Nesse caso teremos,

$$ay'' + by' + cy = 0$$

com as condições iniciais do tipo: $y(t_0) = y_0$ $\quad$ $y'(t_0) = y_0'$

Vamos ver um exemplo...

ODE 2º ordem homogêneas com coeficientes constantes

Exemplo 1

Resolver a equação: $y'' - y = 0$ $y(0) = 2$ $y'(0) = -1$

Em outras palavras, esta equação diz que procuramos uma função com a propriedade de que a derivada segunda da função é igual a ela mesma.

Um pouco de reflexão produzirá, provavelmente, pelo menos uma dessas funções, a saber, a função exponencial $y_1(t) = e^t$.

Um pouco mais de reflexão poderia produzir, também, uma segunda função, $y_2(t) = e^{-t}$.

Múltiplos constantes dessas duas soluções também são soluções?

Por exemplo, as funções $2e^t$ e $5e^{-t}$ também satisfazem a equação, por quê?

Da mesma forma, a soma de duas soluções quaisquer também é uma solução...

$$y = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) = c_1 e^t + c_2 e^{-t}$$

Voltando a nossa equação...

ODE 2º ordem homogêneas com coeficientes constantes

Exemplo 1

Resolver a equação: $y'' - y = 0$ $\quad y(0) = 2$ $\quad y'(0) = -1$

Colocando t=0 e y=2 em: $y = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) = c_1 e^{t} + c_2 e^{-t}$

obtemos... $c_1 + c_2 = 2$

diferenciando aplicamos a segunda condição... $y' = c_1 e^{t} - c_2 e^{-t}$

em que: para t=0 e y´=-1 teremos... $c_1 - c_2 = -1$

resolvendo encontramos... $c_1 = \frac{1}{2}$ $\quad c_2 = \frac{3}{2}$

que dá a solução do problema... $y = \frac{1}{2} e^{t} + \frac{3}{2} e^{-t}$

Vamos ver agora uma metodologia para resolver qualquer equação deste tipo...

ODE 2º ordem homogêneas com coeficientes constantes

UFPR
UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

Solução geral

Analisando o que fizemos podemos obter a metodologia geral para resolver qualquer equação de segunda ordem com coeficientes constantes

$$ay'' + by' + cy = 0$$

Em primeiro lugar, as soluções são funções exponenciais do tipo e^{rt}

Então... $y = e^{rt}$ e $y' = re^{rt}$ $y'' = r^2 e^{rt}$

Logo... $ay'' + by' + cy = 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{ar^2 + br + c = 0}$ Equação característica

se r é uma raiz deste polinômio, então y = e^{rt} é solução da equação diferencial !!!
e podemos colocar qualquer constante C na frente e seguirá sendo solução...

Há três possibilidades para as r solução da equação polinomial....

ODE 2º ordem homogêneas com coeficientes constantes

Solução geral

ela tem duas raízes que podem ser reais e distintas, reais e iguais, ou complexas conjugadas

Vamos considerar, por enquanto, o caso das raízes serem reais e distintas e chamamos essas raízes r_1 e r_2 ...

Então $y = e^{r_1 t}$ e $y = e^{r_2 t}$ são ambas soluções da equação diferencial e portanto:

$$y = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}$$ também é solução

Substituindo $y' = c_1 r_1 e^{r_1 t} + c_2 r_2 e^{r_2 t}$ e $y'' = c_1 r_1^2 e^{r_1 t} + c_2 r_2^2 e^{r_2 t}$ na equação diferencial inicial $ay'' + by' + cy = 0$

Obtemos... $c_1(ar_1^2 + br_1 + c)e^{r_1 t} + c_2(ar_2^2 + br_2 + c)e^{r_2 t} = 0$

que de fato é = 0 pois os parêntesis são =0 já que r_1 e r_2 são raízes

ODE 2º ordem homogêneas com coeficientes constantes

Solução geral

Vamos continuar supondo que queremos uma solução especifica das infinitas soluções dadas pela equação $c_1(ar_1^2 + br_1 + c)e^{r_1 t} + c_2(ar_2^2 + br_2 + c)e^{r_2 t}$=0

Vamos considerar as condições iniciais y(t_0)=y_0 e y´(t_0)=$y_0^{\prime}$

Substituindo em $y = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}$

$$\left.\begin{aligned} c_1 e^{r_1 t_0} + c_2 e^{r_2 t_0} &= y_0 \\ c_1 r_1 e^{r_1 t_0} + c_2 r_2 e^{r_2 t_0} &= y_0' \end{aligned}\right\} \Rightarrow c_1 = \frac{y_0' - y_0 r_2}{r_1 - r_2} e^{-r_1 t_0}, c_2 = \frac{y_0 r_1 - y_0'}{r_1 - r_2} e^{-r_2 t_0}$$

Como desde o inicio estamos considerando que $r_1 - r_2 \neq 0$, não importa quais condições iniciais sejam dadas, **sempre é possível determinar c_1 e c_2** de modo que as condições iniciais sejam satisfeitas.

Portanto, chamamos a equação $y = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t}$ de solução geral da equação $ay'' + by' + cy = 0$

ODE 2º ordem homogêneas com coeficientes constantes

Exemplo 2

Resolver a equação: $y'' + 5y' + 6y = 0, y(0) = 2, y'(0) = 3$

1. Supondo que y(t) = e^{rt}, segue que r tem que ser raiz da equação característica

$$r^2 + 5r + 6 = 0 \iff (r+2)(r+3) = 0$$

2. Resolvendo obtemos os valores possíveis de r que são $r_1 = -2$ e $r_2 = -3$

Assim, a solução geral da equação é

$$y(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-3t}$$

3. Considerando as condições iniciais teremos:

$$\left.\begin{aligned} c_1 + c_2 &= 2 \\ -2c_1 - 3c_2 &= 3 \end{aligned}\right\} \Rightarrow c_1 = 9,\ c_2 = -7$$

4. Portanto: $\boxed{y(t) = 9e^{-2t} - 7e^{-3t}}$

ODE 2º ordem homogêneas com coeficientes constantes

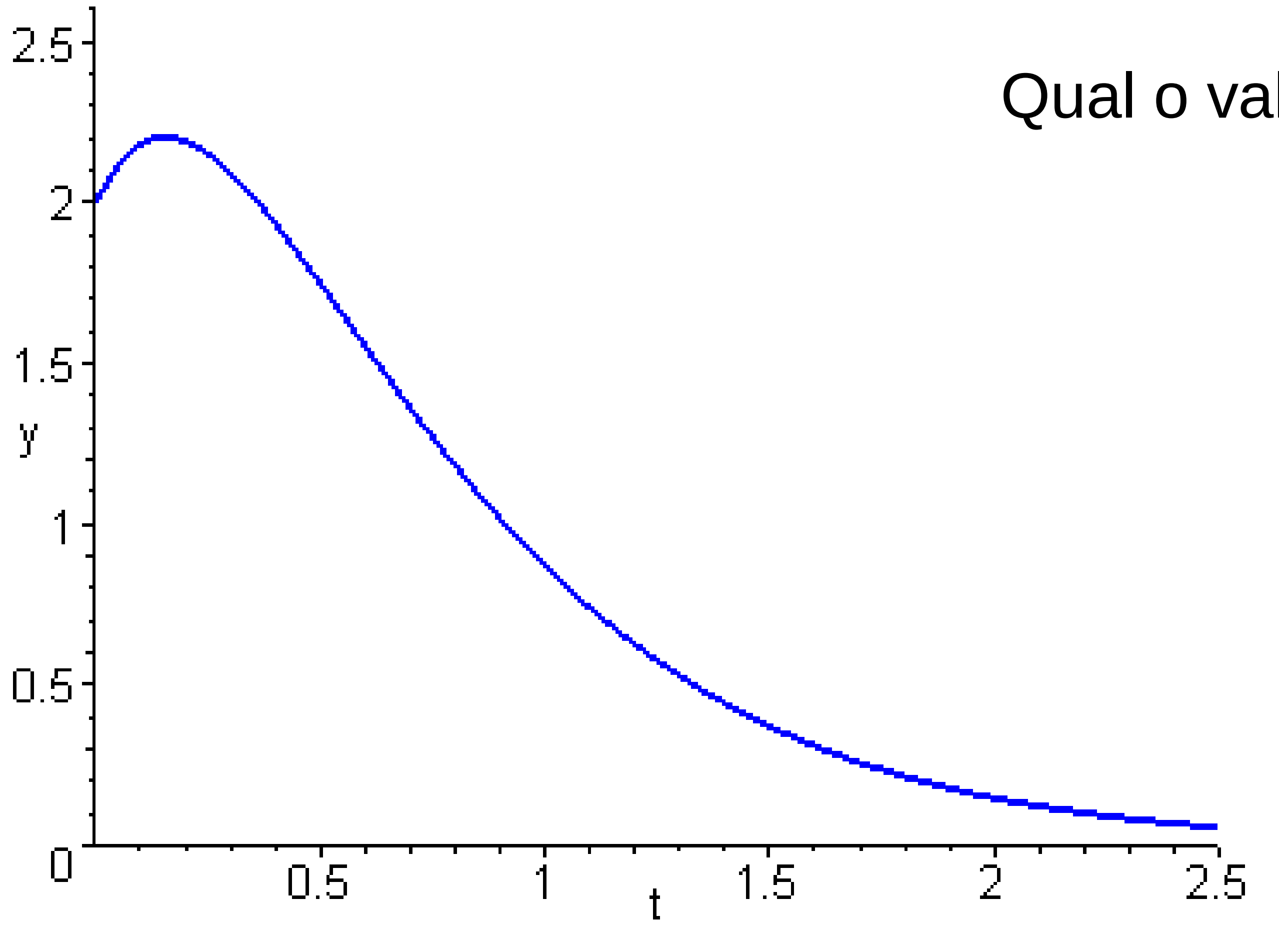
Exemplo 2

Equação:

$$y'' + 5y' + 6y = 0, y(0) = 2, y'(0) = 3$$

Solução:

$$\boxed{y(t) = 9e^{-2t} - 7e^{-3t}}$$



Qual o valor máximo atingido por esta solução?

$$y(t) = 9e^{-2t} - 7e^{-3t}$$
$$y'(t) = -18e^{-2t} + 21e^{-3t} = 0$$
$$6e^{-2t} = 7e^{-3t}$$
$$e^{t} = 7/6$$
$$t = \ln(7/6)$$
$$t \approx 0.1542$$
$$y \approx 2.204$$

ODE 2º ordem homogêneas com coeficientes constantes

Lista de exercícios disponível em:

http://www.eletrica.ufpr.br/p/professores:patricio:inicial

Disciplina TE315 (Equações Diferenciais para Engenharia Elétrica)

Gabaritos disponíveis no mesmo endereço