LISTA 02_5 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

Noções de existência e unicidade

Respostas no final

Gabaritos na página do professor

Em cada um dos problemas de 1 a 6, determine (sem resolver o problema) um intervalo no qual a solução do problema de valor inicial dado certamente existe.

1. $(t-3)y' + (\ln t)y = 2t, \qquad y(1) = 2$
2. $t(t-4)y' + y = 0, \qquad y(2) = 1$
3. $y' + (\tan t)y = \operatorname{sen} t, \qquad y(\pi) = 0$
4. $(4-t^2)y' + 2ty = 3t^2, \qquad y(-3) = 1$
5. $(4-t^2)y' + 2ty = 3t^2, \qquad y(1) = -3$
6. $(\ln t)y' + y = \cot t, \qquad y(2) = 3$

Em cada um dos problemas de 7 a 12, diga onde, no plano *ty*, as hipóteses do Teorema para as equações não lineares são satisfeitas.

7. $y' = \dfrac{t-y}{2t+5y}$
8. $y' = (1-t^2-y^2)^{1/2}$
9. $y' = \dfrac{\ln|ty|}{1-t^2+y^2}$
10. $y' = (t^2+y^2)^{3/2}$
11. $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{1+t^2}{3y-y^2}$
12. $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{(\cot t)y}{1+y}$

Em cada um dos problemas de 13 a 16, resolva o problema de valor inicial dado e determine como o intervalo no qual a solução existe depende do valor inicial y_0.

13. $y' = -4t/y, \quad y(0) = y_0$

14. $y' = 2ty^2, \quad y(0) = y_0$

15. $y' + y^3 = 0, \quad y(0) = y_0$

16. $y' = t^2/y(1 + t^3), \quad y(0) = y_0$

Em cada um dos problemas de 17 a 20, desenhe um campo de direções e desenhe (ou esboce) gráficos de diversas soluções da equação diferencial dada. Descreva como as soluções parecem se comportar quando t aumenta e como seus comportamentos dependem do valor inicial y_0 quando $t = 0$.

17. $y' = ty(3 - y)$

18. $y' = y(3 - ty)$

19. $y' = -y(3 - ty)$

20. $y' = t - 1 - y^2$

21. Considere o problema de valor inicial $y' = y^{1/3}$, $y(0) = 0$, do Exemplo 3 no texto.

(a) Existe uma solução que contém o ponto (1, 1)? Em caso afirmativo, encontre-a.
(b) Existe uma solução que contém o ponto (2, 1)? Em caso afirmativo, encontre-a.
(c) Considere todas as soluções possíveis do problema de valor inicial dado. Determine o conjunto de valores que essas soluções têm em $t = 2$.

22. Verifique se ambas as funções $y_1(t) = 1-t$ e $y_2(t) = -t^2/4$ são soluções do problema de valor inicial

$$y' = \frac{-t + \sqrt{t^2 + 4y}}{2}, \qquad y(2) = -1.$$

onde essas soluções são válidas?

(b) Explique por que a existência de duas soluções para o problema dado não contradiz a unicidade no teorema

(c) Mostre que $y = ct + c^2$, em que c é uma constante arbitrária, satisfaz a equação diferencial no item (a) para $t \geq -2c$. Se $c = -1$, a condição inicial também é satisfeita, e obtemos a solução $y = y_1(t)$. Mostre que não existe escolha de c que fornece a segunda solução $y = y_2(t)$.

23.(a) Mostre que $\phi(t) = e^{2t}$ é uma solução de $y' - 2y = 0$ e que $y = c\,\phi(t)$ também é solução dessa equação para qualquer valor da constante c.

(b) Mostre que $\phi(t) = 1/t$ é uma solução de $y' + y^2 = 0$ para $t > 0$, mas que $y = c\phi(t)$ não é solução dessa equação, a menos que $c = 0$ ou $c = 1$. Note que a equação no item (b) é não linear, enquanto a no item (a) é linear.

24.Mostre que, se $y = \phi(t)$ é uma solução de $y' + p(t)y = 0$, então $y = c\phi(t)$ também é solução para qualquer valor da constante c.

25.Seja $y = y_1(t)$ uma solução de ambas as equações

$$y' + p(t)y = 0,$$

$$y' + p(t)y = g(t).$$

Mostre que $y = y_1(t) + y_2(t)$ também é solução da equação

RESPOSTAS

1. $0 < t < 3$
2. $0 < t < 4$
3. $\pi/2 < t < 3\pi/2$
4. $-\infty < t < -2$
5. $-2 < t < 2$
6. $1 < t < \pi$
7. $2t + 5y > 0$ ou $2t + 5y < 0$
8. $t^2 + y^2 < 1$
9. $1 - t^2 + y^2 > 0$ ou $1 - t^2 + y^2 < 0$, $t \neq 0$, $y \neq 0$
10. Em toda a parte
11. $y \neq 0$, $y \neq 3$
12. $t \neq n\pi$ para $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$; $y \neq -1$
13. $y = \pm\sqrt{y_0^2 - 4t^2}$ se $y_0 \neq 0$; $|t| < |y_0|/2$
14. $y = [(1/y_0) - t^2]^{-1}$ se $y_0 \neq 0$; $y = 0$ se $y_0 = 0$;
    o intervalo é $|t| < 1/\sqrt{y_0}$ se $y_0 > 0$; $-\infty < t < \infty$ se $y_0 \leq 0$
15. $y = y_0/\sqrt{2ty_0^2 + 1}$ se $y_0 \neq 0$; $y = 0$ se $y_0 = 0$;
    o intervalo é $-1/2y_0^2 < t < \infty$ se $y_0 \neq 0$; $-\infty < t < \infty$ se $y_0 = 0$
16. $y = \pm\sqrt{\tfrac{2}{3}\ln(1 + t^3) + y_0^2}$; $-[1 - \exp(-3y_0^2/2)]^{1/3} < t < \infty$
17. $y \to 3$ se $y_0 \to 0$; $y = 0$ se $y_0 = 0$; $y \to -\infty$ se $y_0 < 0$
18. $y \to -\infty$ se $y_0 < 0$; $y \to 0$ se $y_0 \geq 0$
19. $y \to 0$ se $y_0 \leq 9$; $y \to \infty$ se $y_0 > 9$
20. $y \to -\infty$ se $y_0 < y_c \approx -0{,}019$; caso contrário y é assintótico a $\sqrt{t-1}$
21. **(a)** Não.

    (b) Sim; faça $t_0 = ½$ na Eq. (19) no texto.

    (c) $|y| \leq (4/3)^{3/2} \cong 1{,}5396$.
22. **(a)** $y_1(t)$ é uma solução para $t \geq 2$; $y_2(t)$ é uma solução para todo t.

    (b) f_y não é contínua em $(2, -1)$.