

LISTA 02_4 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS
Modelagem com equações de primeira ordem
Respostas no final
Gabaritos na página do professor

1. Considere um tanque usado em determinados experimentos em hidrodinâmica. Depois de um experimento, o tanque contém 200 litros de uma solução de tinta com uma concentração de 1 grama por litro. Para preparar o tanque para o próximo experimento, ele é lavado com água fresca fluindo a uma taxa de 2 litros por minuto, e a solução bem misturada flui para fora à mesma taxa. Encontre o tempo gasto até a concentração de tinta no tanque atingir 1% de seu valor original.
2. Um tanque contém inicialmente 120 litros de água pura. Uma mistura contendo uma concentração de γ gramas por litro de sal entra no tanque a uma taxa de 2 litros por minuto e a mistura bem mexida sai do tanque à mesma taxa. Encontre uma expressão para a quantidade de sal no tanque em qualquer instante t em termos de γ . Encontre, também, a quantidade limite de sal no tanque quando $t \rightarrow \infty$.
3. Um tanque contém inicialmente 100 galões de água fresca. Joga-se, então, água contendo $\frac{1}{2}$ libra de sal por galão a uma taxa de 2 galões por minuto e permite-se que a mistura saia do tanque à mesma taxa. Depois de 10 minutos, o processo é parado e joga-se água fresca no tanque a uma taxa de 2 galões por minuto, com a mistura deixando o tanque, novamente, à mesma taxa. Encontre a quantidade de sal no tanque ao final de 10 minutos adicionais.
4. Um tanque, com capacidade de 500 galões, contém originalmente 200 galões de água com uma solução de 100 libras de sal. Está entrando no tanque, a uma taxa de 3 galões por minuto, água contendo 1 libra de sal por galão, e permite-se que a mistura saia do tanque a uma taxa de 2 galões por minuto. Encontre a quantidade de sal no tanque em qualquer instante antes do momento em que a solução começa a transbordar. Encontre a concentração de sal (em libras por galão) no tanque no instante em que vai começar a transbordar. Compare essa concentração com a concentração limite teórica se o tanque tivesse capacidade infinita.
5. Um tanque contém 100 galões de água e 50 onças* de sal. Água contendo uma concentração de sal de $(\frac{1}{4})[1 + (\frac{1}{2})\sin t]$ onças por galão entra no tanque a uma taxa de 2 galões por minuto, e a mistura sai do tanque à mesma taxa.
 - (a) Encontre a quantidade de sal no tanque em qualquer instante.
 - (b) Desenhe o gráfico da solução por um período de tempo longo o suficiente para que você veja o comportamento final do gráfico.
 - (c) O comportamento da solução para períodos longos de tempo é uma oscilação em torno de um nível constante. Qual é esse nível? E qual é a amplitude da oscilação?
6. Suponha que um tanque contendo determinado líquido tem uma saída próxima do fundo. Seja $h(t)$ a altura da superfície do líquido acima da saída no instante t . O princípio de Torricelli² diz que a velocidade v do fluxo na saída é igual à velocidade de uma partícula em queda livre (sem atrito) caindo da altura h .
 - (a) Mostre que $v = \sqrt{2gh}$, em que g é a aceleração da gravidade.
 - (b) Igualando a taxa de saída à taxa de variação de líquido no tanque, mostre que $h(t)$ satisfaz a equação

$$A(h) \frac{dh}{dt} = -\alpha a \sqrt{2gh}, \quad (i)$$
 em que $A(h)$ é a área da seção reta do tanque na altura h , e α é a área da saída. A constante α é um coeficiente de contração responsável pelo fato observado de que a seção reta do fluxo (suave) de saída é menor do que α . O valor de α para a água é aproximadamente 0,6.
 - (c) Considere um tanque de água em forma de um cilindro circular reto 3 metros acima da saída. O raio do tanque é 1 m e o raio da saída circular é 0,1 m. Se o tanque estiver inicialmente cheio de água, determine quanto tempo vai levar para esvaziar o tanque até o nível da saída.
7. Suponha que determinada quantia S_0 está investida a uma taxa anual de retorno r capitalizada continuamente.
 - (a) Encontre o tempo T necessário para que a soma original dobre de valor em função de r .
 - (b) Determine T , se $r = 7\%$.
 - (c) Encontre a taxa de retorno necessária para que o investimento inicial dobre em 8 anos.
8. Uma pessoa jovem sem capital inicial investe k reais por ano a uma taxa anual de retorno r . Suponha que os investimentos são feitos continuamente e que o retorno é capitalizado continuamente.
 - (a) Determine a quantia $S(t)$ acumulada em qualquer instante t .
 - (b) Se $r = 7,5\%$, determine k de modo que 1 milhão de reais esteja disponível para a aposentadoria em 40 anos.
 - (c) Se $k = \text{R\$ } 2.000,00$ por ano, determine qual deve ser a taxa de retorno r para se ter 1 milhão de reais em 40 anos.
9. Determinado universitário pede um empréstimo de $\text{R\$ } 8.000,00$ para comprar um carro. A financeira cobra juros de 10% ao ano. Supondo que os juros são capitalizados continuamente e que os pagamentos são feitos continuamente a uma taxa anual constante k , determine a taxa de pagamento necessária para quitar o empréstimo em 3 anos. Determine, também, quanto é pago de juros durante esses 3 anos.
10. O comprador de uma casa não pode gastar mais de $\text{R\$ } 1.500,00$ por mês pelo seu financiamento. Suponha que a taxa de juros é de 6% ao ano, que os juros são capitalizados continuamente e que os pagamentos também são feitos continuamente.
 - (a) Determine a quantia máxima que esse comprador pode financiar em um prazo de 20 anos e em um prazo de 30 anos.
 - (b) Determine os juros totais pagos durante o financiamento em cada um dos casos no item (a).
11. O comprador de uma casa deseja um financiamento de $\text{R\$ } 250.000,00$ a uma taxa de 6% ao ano. Suponha que os juros são capitalizados continuamente e que os pagamentos também são feitos continuamente.
 - (a) Determine o pagamento mensal necessário para que o empréstimo seja pago em 20 anos; em 30 anos.
 - (b) Determine os juros totais pagos durante o financiamento em cada um dos casos no item (a).
12. Um recém-formado pegou emprestado o valor de $\text{R\$ } 150.000,00$ a uma taxa de juros de 6% ao ano para comprar um apartamento. Antecipando constantes aumentos de salário, ele espera pagar a uma taxa mensal de $800 + 10t$, em que t é o número de meses desde o início do empréstimo.
 - (a) Supondo que o programa de pagamento possa ser mantido, quando o empréstimo estará quitado?
 - (b) Supondo o mesmo programa de pagamento, qual deve ser a quantia emprestada para que seja paga em exatamente 20 anos?
13. Uma ferramenta importante em pesquisa arqueológica é a datação por carbono radioativo, desenvolvida pelo químico americano Willard F. Libby.³ Essa é uma ferramenta para determinar a idade de determinados resíduos de madeira e plantas, e, portanto, de ossos de animais ou homens, ou artefatos encontrados enterrados nos mesmos níveis. A datação por carbono radioativo baseia-se no fato de que alguns restos de madeira ou plantas contêm quantidades residuais de carbono-14, um isótopo radioativo do carbono. Esse isótopo se acumula durante a vida da planta e começa a decair na sua morte. Como a meia-vida do carbono-14 é longa (aproximadamente 5.730 anos⁴), quantidades mensuráveis de carbono-14 permanecem depois de muitos milhares de anos. Se mesmo uma fração mínima da quantidade original de carbono-14 ainda está presente, então, através de medidas apropriadas em laboratório, pode-se determinar com precisão a proporção da quantidade original de carbono-14 que permanece. Em outras palavras, se $Q(t)$ é a quantidade de carbono-14 no instante t e Q_0 é a quantidade original, então a razão $Q(t)/Q_0$ pode ser determinada, pelo menos se essa quantidade não for pequena demais. Técnicas atuais de medida permitem o uso desse método por períodos de tempo de 50.000 anos ou mais.
 - (a) Supondo que Q satisfaz a equação diferencial $Q' = -rQ$, determine a constante de decaimento r para o carbono-14.
 - (b) Encontre uma expressão para $Q(t)$ em qualquer instante t , se $Q(0) = Q_0$.
 - (c) Suponha que determinados restos foram descobertos nos quais a quantidade residual atual de carbono-14 é 20% da quantidade original. Determine a idade desses restos.

14. Suponha que determinada população tem uma taxa de crescimento que varia com o tempo e que essa população satisfaz a equação diferencial

$$\dot{y}/dt = (0,5 + \sin t)y/5.$$

- (a) Se $y(0) = 1$, encontre (ou estime) o instante τ no qual a população dobrou. Escolha outras condições iniciais e determine se o tempo de duplicação τ depende da população inicial.
 (b) Suponha que a taxa de crescimento é substituída pelo seu valor médio $1/10$. Determine o tempo de duplicação τ nesse caso.
 (c) Suponha que o termo $\sin t$ na equação diferencial é substituído por $\sin(2\pi t)$; ou seja, a variação na taxa de crescimento tem uma frequência substancialmente mais alta. Qual o efeito disto no tempo de duplicação τ ?
 (d) Faça o gráfico das soluções obtidas nos itens (a), (b) e (c) em um único conjunto de eixos.

15. Suponha que determinada população satisfaz o problema de valor inicial

$$\dot{y}/dt = r(t)y - k, \quad y(0) = y_0,$$

em que a taxa de crescimento $r(t)$ é dada por $r(t) = (1 + \sin t)/5$, e k representa a taxa predatória.

- (a) Suponha que $k = 1/5$. Faça gráficos de y em função de t para diversos valores de y_0 entre $1/2$ e 1 .
 (b) Estime a população inicial crítica y_c abaixo da qual a população será extinta.
 (c) Escolha outros valores de k e encontre a população crítica y_c correspondente para cada um deles.
 (d) Use os dados encontrados nos itens (b) e (c) para fazer o gráfico de y_c em função de k .
 16. A lei do resfriamento de Newton diz que a temperatura de um objeto varia a uma razão proporcional à diferença entre sua temperatura e a temperatura ambiente. Suponha que a temperatura de uma xícara de café obedece à lei do resfriamento de Newton. Se o café está a uma temperatura de 200°F quando colocado na xícara e, 1 minuto depois, esfriou e está a 190°F em uma sala à temperatura de 70°F , determine quando o café alcança a temperatura de 150°F .

17. O calor transferido de um corpo para seu ambiente por radiação, baseado na lei de Stefan-Boltzmann,⁵ é descrito pela equação diferencial

$$\frac{du}{dt} = -\alpha(u^4 - T^4), \quad (i)$$

em que $u(t)$ é a temperatura absoluta (em graus Kelvin) do corpo no instante t , T é a temperatura absoluta do ambiente, e α é uma constante que depende dos parâmetros físicos do corpo. No entanto, se u for muito maior do que T , as soluções da Eq. (i) podem ser bem aproximadas por soluções da equação mais simples

$$\frac{du}{dt} = -\alpha u^4. \quad (ii)$$

Suponha que um corpo, a uma temperatura inicial de 2000°K , está em um meio à temperatura de 300°K e que $\alpha = 2,0 \times 10^{-12} \text{ }^\circ\text{K}^{-3}/\text{s}$.

- (a) Determine a temperatura do corpo em um instante qualquer resolvendo a Eq. (ii).
 (b) Faça o gráfico de u em função de t .
 (c) Encontre o instante τ no qual $u(\tau) = 600$, ou seja, o dobro da temperatura ambiente. Até esse instante, o erro ao usar a Eq. (ii) para aproximar as soluções da Eq. (i) não é maior do que 1%.

18. Considere uma caixa isolada termicamente (um prédio, talvez) com temperatura interna $u(t)$. De acordo com a lei do resfriamento de Newton, u satisfaz a equação diferencial

$$\frac{du}{dt} = -k[u - T(t)], \quad (i)$$

em que $T(t)$ é a temperatura do ambiente (externo). Suponha que $T(t)$ varia como uma senoide; por exemplo, suponha que $T(t) = T_0 + T_1 \cos(\omega t)$.

- (a) Resolva a Eq. (i) e expresse $u(t)$ em termos de t , k , T_0 , T_1 e ω . Observe que parte de sua solução tende a zero quando t fica muito grande; esta é chamada de parte transiente. O restante da solução é chamado de estado estacionário; denote-a por $S(t)$.
 (b) Suponha que t está medido em horas e que $\omega = \pi/12$, correspondendo a um período de 24 horas para $T(t)$. Além disso, sejam $T_0 = 60^\circ\text{F}$, $T_1 = 15^\circ\text{F}$ e $k = 0,2/\text{h}$. Desenhe gráficos de $S(t)$ e de $T(t)$ em função de t nos mesmos eixos. A partir de seu gráfico, estime a amplitude R da parte oscilatória de $S(t)$. Estime, também, a diferença de tempo τ entre os máximos correspondentes de $T(t)$ e de $S(t)$.
 (c) Sejam k , T_0 , T_1 e ω não especificados. Escreva a parte oscilatória de $S(t)$ na forma $R \cos[\omega(t - \tau)]$. Use identidades trigonométricas para encontrar expressões para R e τ . Suponha que T_1 e ω têm os valores dados no item (b) e desenhe gráficos de R e τ em função de k .
 19. Considere um lago, de volume constante V , contendo, no instante t , uma quantidade $Q(t)$ de poluentes distribuídos uniformemente em todo o lago com uma concentração $c(t)$, onde $c(t) = Q(t)/V$. Suponha que está entrando no lago água contendo uma concentração k de poluentes a uma taxa r e que está saindo água do lago à mesma taxa. Suponha também que são adicionados poluentes diretamente no lago a uma taxa constante P . Note que as hipóteses feitas não consideram uma série de fatores que podem ser importantes em alguns casos — por exemplo, a água que é adicionada ou perdida devido à precipitação, à absorção ou à evaporação; a estratificação em consequência das diferenças de temperatura em um lago profundo; a produção de baías protegidas, por causa de irregularidades na borda; e o fato de que os poluentes não são depositados uniformemente em todo o lago (em geral), mas em pontos isolados em sua periferia. Os resultados a seguir têm que ser interpretados levando em consideração que não foram contemplados fatores como esses.
 (a) Se a concentração de poluentes no instante $t = 0$ é c_0 , encontre uma expressão para a concentração $c(t)$ em qualquer instante t . Qual é a concentração limite quando $t \rightarrow \infty$

TABELA 2.3.2 Dados sobre Volume e Fluxo nos Grandes Lagos

Lago	$V(\text{km}^3 \times 10^3)$	$r(\text{km}^3/\text{ano})$
Superior	12,2	65,2
Michigan	4,9	158
Erie	0,46	175
Ontário	1,6	209

- (b) Se a adição de poluentes no lago termina ($k = 0$ e $P = 0$ para $t > 0$), determine o intervalo de tempo T necessário para que a concentração de poluentes seja reduzida a 50% de seu valor original; e a 10% de seu valor original.
 (c) A Tabela 2.3.2 contém dados⁶ para os Grandes Lagos.* Usando esses dados, determine, a partir do item (b), o tempo T necessário para reduzir a contaminação desses lagos a 10% de seu valor original.

20. Uma bola com massa de 0,15 kg é jogada para cima, com velocidade inicial de 20 m/s, do teto de um prédio com 30 m de altura. Não leve em consideração a resistência do ar.
- Encontre a altura máxima acima do solo alcançada pela bola.
 - Supondo que a bola não atinge o prédio quando desce, encontre o instante em que ela bate no chão.
 - Desenhe os gráficos da velocidade e da posição em função do tempo.
21. Suponha que as condições são como no Problema 20, exceto que existe uma força devido à resistência do ar com sentido oposto ao da velocidade e magnitude $|v|/30$, em que a velocidade v é medida em m/s.
- Encontre a altura máxima acima do solo alcançada pela bola.
 - Encontre o instante em que a bola bate no chão.
 - Desenhe os gráficos da velocidade e da posição em função do tempo. Compare esses gráficos com os gráficos correspondentes no Problema 20.
22. Suponha que as condições são como no Problema 20, exceto que existe uma força devido à resistência do ar com sentido oposto ao da velocidade e magnitude $v^2/1325$, em que a velocidade v é medida em m/s.
- Encontre a altura máxima acima do solo alcançada pela bola.
 - Encontre o instante em que a bola bate no chão.
 - Desenhe os gráficos da velocidade e da posição em função do tempo. Compare esses gráficos com os gráficos correspondentes nos Problemas 20 e 21.
23. Um paraquedista pesando 180 lb (incluindo o equipamento) cai verticalmente de uma altura de 5000 pés** e abre o paraquedas depois de 10 s de queda livre. Suponha que a força de resistência do ar, que tem sentido oposto ao da velocidade, tem magnitude $0,75|v|$ quando o paraquedas está fechado e magnitude $12|v|$ quando está aberto, em que a velocidade v está em pés/s.
- Encontre a velocidade do paraquedista quando o paraquedas abre.
 - Encontre a distância percorrida até o paraquedas abrir.
 - Qual é a velocidade limite v_L depois que o paraquedas abre?
 - Determine quanto tempo o paraquedista fica no ar depois que o paraquedas abre.
 - Desenhe o gráfico da velocidade em função do tempo desde o início da queda até o paraquedista atingir o solo.
24. Um tremó foguete, com velocidade inicial de 150 milhas/h (≈ 240 km/h), é freado por um canal de água. Suponha que, enquanto está sendo freado, a aceleração a do tremó é dada por $a(v) = -\mu v^2$, em que v é a velocidade e μ é uma constante.
- Como no Exemplo 4 no texto, use a relação $dv/dt = v(dv/dx)$ para escrever a equação de movimento em termos de v e de x .
 - Se for necessária uma distância de 2000 pés para diminuir a velocidade do tremó para 15 milhas/h, determine o valor de μ .
 - Encontre o tempo τ necessário para diminuir a velocidade do tremó para 15 milhas/h.
25. Um corpo de massa m é projetado verticalmente para cima com uma velocidade inicial v_0 em um meio que oferece uma resistência $k|v|$, em que k é constante. Não leve em consideração variações na força gravitacional.
- Encontre a altura máxima x_m alcançada pelo corpo e o instante t_m no qual essa altura máxima é atingida.
 - Mostre que, se $kv_0/mg < 1$, então t_m e x_m podem ser expressos como

$$t_m = \frac{v_0}{g} \left[1 - \frac{1}{2} \frac{kv_0}{mg} + \frac{1}{3} \left(\frac{kv_0}{mg} \right)^2 - \dots \right],$$

$$x_m = \frac{v_0^2}{2g} \left[1 - \frac{2}{3} \frac{kv_0}{mg} + \frac{1}{2} \left(\frac{kv_0}{mg} \right)^2 - \dots \right].$$

- Mostre que a quantidade kv_0/mg é adimensional.
26. Um corpo de massa m é projetado verticalmente para cima com uma velocidade inicial v_0 em um meio que oferece uma resistência $k|v|$, em que k é constante. Suponha que a atração gravitacional da Terra é constante.
- Encontre a velocidade $v(t)$ do corpo em qualquer instante t .
 - Use o resultado do item (a) para calcular o limite de $v(t)$ quando $k \rightarrow 0$, ou seja, quando a resistência tende a zero. Esse resultado é igual à velocidade de uma massa m projetada para cima com uma velocidade inicial v_0 no vácuo?
 - Use o resultado do item (a) para calcular o limite de $v(t)$ quando $m \rightarrow 0$, ou seja, quando a massa se aproxima de zero.
27. Um corpo caindo em um fluido relativamente denso, óleo, por exemplo, está sob a ação de três forças (veja a Figura 2.3.5): uma força de resistência R , um empuxo B e seu peso w devido à gravidade. O empuxo é igual ao peso do fluido deslocado pelo objeto. Para um corpo esférico de raio a se movimentando lentamente, a força de resistência é dada pela lei de Stokes, $R = 6\pi\mu a|v|$, em que v é a velocidade do corpo e μ é o coeficiente de viscosidade do fluido.⁷
- Encontre a velocidade limite de uma esfera sólida de raio a e densidade ρ caindo livremente em um meio de densidade ρ' e coeficiente de viscosidade μ .
 - Em 1910, R. A. Millikan⁸ estudou o movimento de gotículas de óleo caindo em um campo elétrico. Um campo de intensidade E exerce uma força Ee em uma gotícula com carga e . Suponha que E foi ajustado de modo que a gotícula é mantida estacionária ($v = 0$) e que w e B são dados como acima. Encontre uma expressão para e . Millikan repetiu esse experimento muitas vezes e, a partir dos dados coletados, deduziu a carga de um elétron.

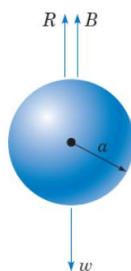


FIGURA 2.3.5 Um corpo caindo em um fluido denso.

28. Uma massa de 0,25 kg cai, a partir do repouso, em um meio que oferece uma resistência de $0,2|v|$, em que v está em m/s.
- Se a massa cai de uma altura de 30 m, encontre sua velocidade ao atingir o solo.
 - Se a massa não pode atingir uma velocidade maior do que 10 m/s, encontre a altura máxima da qual ela pode ser largada.
 - Suponha que a força de resistência é $k|v|$, onde v está em m/s e k é constante. Se a massa cai de uma altura de 30 m e tem que atingir o solo com uma velocidade menor ou igual a 10 m/s, determine o coeficiente de resistência k necessário.
29. Suponha que um foguete é lançado verticalmente a partir da superfície da Terra com velocidade inicial $v_0 = \sqrt{2gR}$, em que R é o raio da Terra. Não considere a resistência do ar.
- Encontre uma expressão para a velocidade v em função da distância x da superfície da Terra.
 - Encontre o tempo necessário para o foguete atingir 240.000 milhas (a distância aproximada da Terra à Lua). Suponha que $R = 4000$ milhas.
30. Sejam $v(t)$ e $w(t)$ a componente horizontal e a componente vertical, respectivamente, da velocidade de uma bola de beisebol rebatida (ou lançada). Na ausência de resistência do ar, v e w satisfazem as equações

$$dv/dt = 0 \quad dw/dt = -g.$$

- (a) Mostre que

$$v = u \cos A, \quad w = -gt + u \sin A,$$

em que u é a velocidade escalar inicial da bola e A é o ângulo inicial de elevação.

- Sejam $x(t)$ e $y(t)$, respectivamente, a coordenada horizontal e a coordenada vertical da bola no instante t . Se $x(0) = 0$ e $y(0) = h$, encontre $x(t)$ e $y(t)$ em qualquer instante t .
- Sejam $g = 32$ pés/s², $u = 125$ pés/s e $h = 3$ pés. Desenhe a trajetória da bola para diversos valores do ângulo A , ou seja, faça os gráficos de $x(t)$ e $y(t)$ parametricamente.
- Suponha que o muro que delimita o campo está a uma distância L e tem altura H . Encontre uma relação entre u e A que tem que ser satisfeita para que a bola passe por cima do muro.
- Suponha que $L = 350$ pés e $H = 10$ pés. Usando a relação no item (d), encontre (ou estime a partir de um gráfico) o intervalo de valores de A que correspondem a uma velocidade escalar inicial $u = 110$ pés/s.
- Para $L = 350$ e $H = 10$, encontre a velocidade inicial mínima u e o ângulo ótimo correspondente A para o qual a bola passa por cima do muro.

31. Um modelo mais realista (do que o no Problema 30) para a trajetória de uma bola de beisebol inclui o efeito da resistência do ar. Nesse caso, as equações de movimento são

$$dv/dt = -rv, \quad dw/dt = -g - rw,$$

em que r é o coeficiente de resistência.

- Determine $v(t)$ e $w(t)$ em termos da velocidade escalar inicial u e do ângulo inicial de elevação A .
 - Encontre $x(t)$ e $y(t)$ se $x(0) = 0$ e $y(0) = h$.
 - Desenhe as trajetórias da bola para $r = 1/5$, $u = 125$, $h = 3$ e para diversos valores de A . Como essas trajetórias diferem das do Problema 31 com $r = 0$?
 - Supondo $r = 1/5$ e $h = 3$, encontre a velocidade inicial mínima u e o ângulo ótimo correspondente A para o qual a bola passa por cima de um muro que está a uma distância de 350 pés e tem 10 pés de altura. Compare esse resultado com o do Problema 30(f).
32. **O Problema da Braquistócrona.** Um dos problemas famosos na história da matemática é o problema da braquistócrona:⁵ encontrar uma curva ao longo da qual uma partícula desliza sem atrito em um tempo mínimo de um ponto dado P até outro ponto Q , em que o segundo ponto está mais baixo do que o primeiro, mas não diretamente abaixo (veja a Figura 2.3.6). Esse problema foi proposto por Johann Bernoulli em 1696 como um desafio para os matemáticos da época. Johann Bernoulli e seu irmão Jakob Bernoulli, Isaac Newton, Gottfried Leibniz e o marquês de L'Hôpital encontraram soluções corretas. O problema da braquistócrona é importante no desenvolvimento da matemática como um dos precursores do cálculo das variações.

As resolver esse problema, é conveniente colocar a origem no ponto superior P e orientar os eixos conforme ilustrado na Figura 2.3.6. O ponto mais baixo Q tem coordenadas (x_0, y_0) . É possível mostrar, então, que a curva de tempo mínimo é dada por uma função $y = \phi(t)$ que satisfaz a equação diferencial

$$(1 + y'^2)y = k^2, \quad (i)$$

em que k^2 é certa constante positiva a ser determinada mais tarde.

- Resolva a Eq. (i) para y' . Por que é necessário escolher a raiz quadrada positiva?
- Introduza uma nova variável t pela relação

$$y = k^2 \sin^2 t. \quad (ii)$$

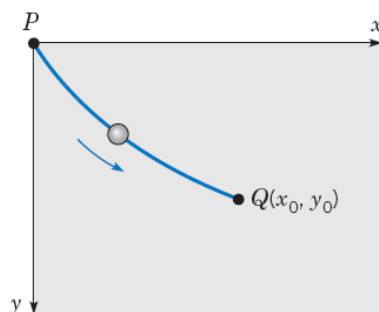


FIGURA 2.3.6 A braquistócrona.

Mostre que a equação encontrada no item (a) fica, então, na forma

$$2k^2 \sin^2 t \, dt = dx. \quad (iii)$$

- (c) Fazendo $\theta = 2t$, mostre que a solução da Eq. (iii) para a qual $x = 0$ quando $y = 0$ é dada por

$$x = k^2(\theta - \sin \theta)/2, \quad y = k^2(1 - \cos \theta)/2. \quad (iv)$$

As Eqs. (iv) são equações paramétricas da solução da Eq. (i) que contém o ponto $(0, 0)$. O gráfico das Eqs. (iv) é chamado de **cicloide**.

- (d) Se fizermos uma escolha apropriada da constante k , então a cicloide também contém o ponto (x_0, y_0) e é a solução do problema da braquistócrona. Encontre k , se $x_0 = 1$ e $y_0 = 2$.

RESPOSTAS

1. $t = 100 \ln 100 \text{ min} \cong 460,5 \text{ min}$
2. $Q(t) = 120\gamma[1 - \exp(-t/60)]$; 120γ
3. $Q = 50e^{-0,2}(1 - e^{-0,2}) \text{ lb} \cong 7,42 \text{ lb}$
4. $Q(t) = 200 + t - [100(200)^2/(200 + t)^2] \text{ lb}$, $t < 300$; $c = 121/125 \text{ lb/gal}$; $\lim_{t \rightarrow \infty} c = 1 \text{ lb/gal}$
5. (a) $Q(t) = \frac{63,150}{2501}e^{-t/50} + 25 - \frac{625}{2501}\cos t + \frac{25}{5002}\sin t$
 (c) nível = 25; amplitude = $25\sqrt{2501/5002} \cong 0,24995$
6. (c) 130,41 s
7. (a) $(\ln 2)/r$ anos
 (b) 9,90 anos
 (c) 8,66%
8. (a) $k(e^{rt} - 1)/r$
 (b) $k \cong \text{R\$}3930$
 (c) 9,77%
9. $k = \text{R\$}3086,64/\text{ano}$; $\text{R\$}1259,92$
10. (a) $\text{R\$}209.641,74$ (20 anos); $\text{R\$}250.410,33$ (30 anos)
 (b) $\text{R\$}150.358,26$ (20 anos); $\text{R\$}289.589,67$ (30 anos)
11. (a) $\text{R\$}1788,77$ (20 anos); $\text{R\$}1497,54$ (30 anos)
 (b) $\text{R\$}179.303,83$ (20 anos); $\text{R\$}289.115,13$ (30 anos)
12. (a) $t \cong 146,54$ meses
 (b) $\text{R\$}246,758,02$
13. (a) $0,00012097 \text{ ano}^{-1}$
 (b) $Q_0 \exp(-0,00012097t)$, t em anos
 (c) 13.305 anos
14. (a) $\tau \cong 2,9632$; não
 (b) $\tau = 10 \ln 2 \cong 6,9315$
 (c) $\tau = 6,3805$
15. (b) $y_c \cong 0,83$
16. $t = \ln \frac{13}{8} / \ln \frac{13}{12} \text{ min} \cong 6,07 \text{ min}$
17. (a) $u(t) = 2000/(1 + 0,048t)^{1/3}$
 (c) $\tau \cong 750,77 \text{ s}$
18. (a) $u(t) = ce^{-kt} + T_0 + kT_1(k \cos \omega t + \omega \sin \omega t)/(k^2 + \omega^2)$
 (b) $R \cong 9,11^\circ\text{F}$; $\tau \cong 3,51 \text{ h}$
 (c) $R = kT_1/\sqrt{k^2 + \omega^2}$; $\tau = (1/\omega) \arctan(\omega/k)$
19. (a) $c = k + (P/r) + [c_0 - k - (P/r)]e^{-rt/V}$; $\lim_{t \rightarrow \infty} c = k + (P/r)$
 (b) $T = (V \ln 2)/r$; $T = (V \ln 10)/r$
 (c) Superior, $T = 431$ anos; Michigan, $T = 71,4$ anos; Erie, $T = 6,05$ anos; Ontario, $T = 17,6$ anos
20. (a) 50,408 m
 (b) 5,248 s
21. (a) 45,783 m
 (b) 5,129 s

22. (a) 48,562 m
(b) 5,194 s
23. (a) 176, 7 pês/s
(b) 1074, 5 pês
(c) 15 pês/s
(d) 256, 6 s
24. (a) $dv/dx = -\mu v$
(b) $\mu = (66/25) \ln 10 \text{ milhas}^{-1} \cong 6,0788 \text{ milhas}^{-1}$
(c) $\tau = 900/(11 \ln 10) \text{ s} \cong 35,533 \text{ s}$
25. (a) $x_m = -\frac{m^2 g}{k^2} \ln \left(1 + \frac{kv_0}{mg} \right) + \frac{mv_0}{k}; \quad t_m = \frac{m}{k} \ln \left(1 + \frac{kv_0}{mg} \right)$
26. (a) $v = -(mg/k) + [v_0 + (mg/k)] \exp(-kt/m)$
(b) $v = v_0 - gt$; sim
(c) $v = 0$ para $t > 0$
27. (a) $vL = 2\alpha^2 g(\rho - \rho')/9\mu$
(b) $e = 4\pi\alpha^3 g(\rho - \rho')/3E$
28. (a) 11,58 m/s
(b) 13,45 m
(c) $k \geq 0,2394 \text{ kg/s}$
29. (a) $v = R\sqrt{2g/(R+x)}$
(b) 50,6 h
30. (b) $x = ut \cos A, y = -gt^2/2 + ut \sin A + h$
(d) $-16L^2/(u^2 \cos^2 A) + L \tan A + 3 \geq H$
(e) $0,63 \text{ rad} \leq A \leq 0,96 \text{ rad}$
(f) $u = 106,89 \text{ pês/s}, A = 0,7954 \text{ rad}$
31. (a) $v = (u \cos A)e^{-rt}, \omega = -g/r + (u \sin A + g/r)e^{-rt}$
(b) $x = u \cos A(1 - e^{-rt})/r, y = -gt/r + (u \sin A + g/r)(1 - e^{-rt})/r + h$
(d) $u = 145,3 \text{ pês/s}, A = 0,644 \text{ rad}$
32. (d) $k = 2,193$