EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARA ENGENHARIA ELÉTRICA
TE 315

Aula 02_4

MODELAGEM COM EQUAÇÕES DE PRIMEIRA ORDEM

Modelagem com Eq. de 1º ordem

Introdução

Modelos matemáticos caracterizam sistemas físicos, muitas vezes usando equações diferenciais.

Construção do modelo: Traduz a situação física em termos matemáticos.
O ponto mais crítico neste passo é enunciar claramente o(s) princípio(s) físico(s) que, acredita-se, governa(m) o processo.
A equação diferencial é o modelo matemático do processo, em geral é uma aproximação.

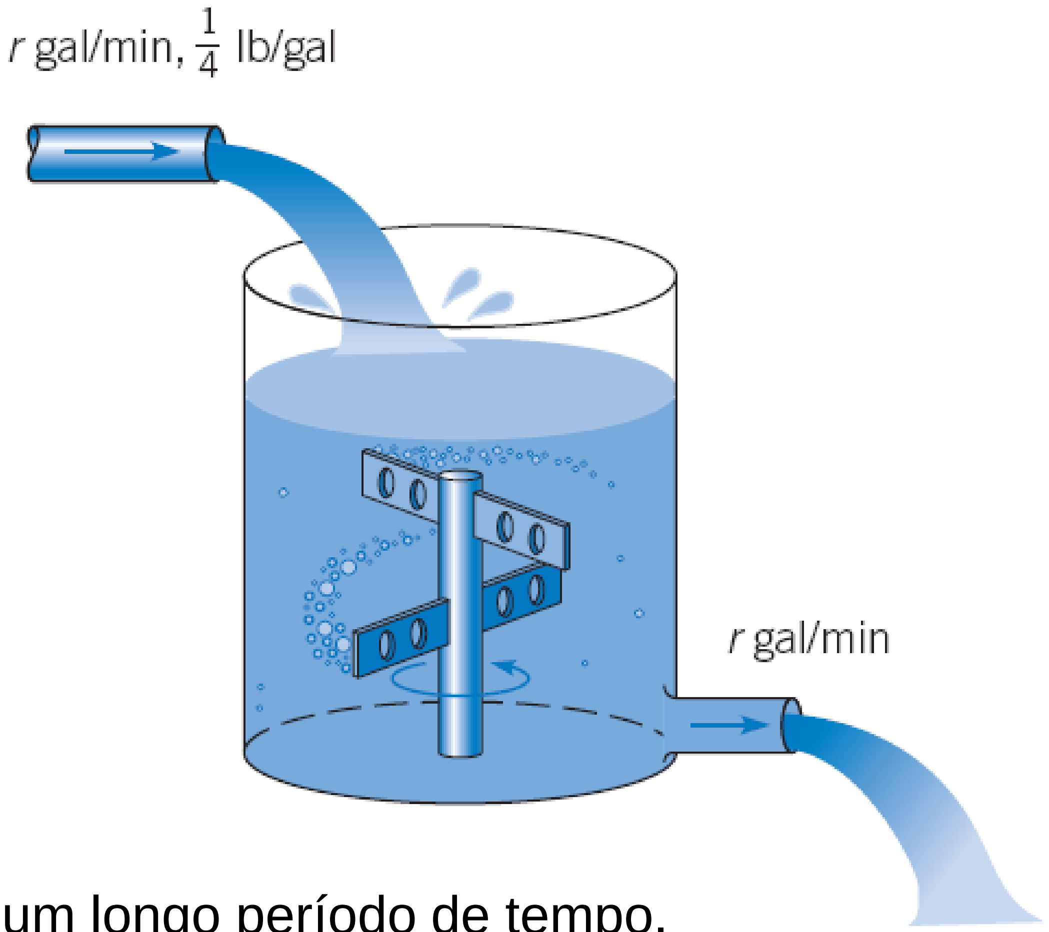
Análise do Modelo: Implica resolver as equações ou obter alguma compreensão qualitativa das possíveis soluções. É possível simplificar o modelo, desde que os aspectos físicos fundamentais sejam preservados.

Comparação com Experimentos ou Observações: Confirma a solução (e portanto o modelo utilizado) ou sugere um refinamento do modelo.

Vejamos alguns exemplos (além dos já vistos nas primeiras aulas...)

Modelagem com Eq. de 1º ordem

Tanque de água salgada



Imagine um tanque de água que no momento t=0 contém Q_0 libras de sal dissolvidas em 100 galões de água.

Considere que a água, contendo ¼ de libras de sal por galão, entra no tanque a uma taxa de r galões por minuto. A solução salina (já homogênea) sai do tanque com a mesma taxa.

(a) Escreva o Problema de Valor Inicial (PVI) que descreve o fluxo.

(b) Encontre a quantidade de sal Q(t) no tanque em qualquer momento de tempo t

(c) Encontre a quantidade limite de sal Q_L no tanque após um longo período de tempo.

(d) Finalmente, se $r = 3$ e $Q_0 = 2Q_L$, encontre o instante T após o qual o nível de sal está a 2% de Q_L e encontre a taxa de fluxo necessária para que o valor de T não seja inferior a 45 minutos.

Modelagem com Eq. de 1º ordem

Tanque de água salgada

Se o sal não é criado nem destruído dentro do tanque e está distribuído uniformemente podemos escrever:

$$\frac{dQ}{dt} = \ taxa\ de\ entrada\ - taxa\ de\ saída$$

ou considerando os dados do nosso problema...

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{r}{4} - ?$$

Para encontrar a taxa à qual o sal deixa o tanque, há que multiplicar a concentração de sal no tanque pela taxa de fluxo, r gal/min. Como as taxas de fluxo de saída e de entrada são iguais, o volume de água no tanque permanece constante e igual a 100 gal; como a mistura está “bem mexida”, a concentração é uniforme no tanque, a saber, [Q(t)/100] lb/gal. Portanto, a taxa de saída do sal no tanque é [rQ(t)/100] lb/min. Logo, a equação diferencial que governa esse processo é:

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{r}{4} - \frac{rQ}{100}$$

Modelagem com Eq. de 1º ordem

Tanque de água salgada

Então nosso PVI é: $$\frac{dQ}{dt} = \frac{r}{4} - \frac{rQ}{100} \qquad Q(0) = Q_0$$

Pense no problema fisicamente antes de iniciar sua resolução!

Poderíamos antecipar que em alguma hora a mistura original será essencialmente substituída pela mistura que está entrando, cuja concentração de sal é ¼ lb/gal.

Em consequência, poderíamos esperar que a quantidade de sal no tanque finalmente devesse ficar bem próxima de 25 lb.

Também podemos encontrar a quantidade limite $Q_L = 25$ fazendo dQ/dt igual a zero na equação e resolvendo a equação algébrica resultante para Q.

Modelagem com Eq. de 1º ordem

Tanque de água salgada

Então nosso PVI é: $$\frac{dQ}{dt} = \frac{r}{4} - \frac{rQ}{100} \qquad Q(0) = Q_0$$

Vamos então resolver...

Observe que a equação é linear e também é separável $$\frac{dQ}{dt} + \frac{rQ}{100} = \frac{r}{4}$$

Vamos resolver aplicando o método dos fatores integrantes...

Qual o fator integrante μ(t) desta equação?

Lembrando que $\mu(t) = e^{\int p(t)dt}$ Obtemos $\mu(t) = e^{\frac{rt}{100}}$

Lembrando o resultado de como calcular a função Q(t) neste método:

$$y(t) = \frac{1}{\mu(t)} \int \mu(t) g(t) dt + C \qquad Q(t) = e^{-\frac{rt}{100}} \int \frac{r}{4} e^{\frac{rt}{100}} ds + C$$

Modelagem com Eq. de 1º ordem

Tanque de água salgada

Como vimos...com este fator integrante podemos escrever

$$Q(t) = e^{-rt/100}\left[\int \frac{re^{rt/100}}{4} dt\right] = e^{-rt/100}\left[25e^{rt/100} + C\right] = 25 + Ce^{-rt/100}$$

$$Q(t) = 25 + [Q_0 - 25]e^{-rt/100} \qquad Q(t) = 25\left(1 - e^{-rt/100}\right) + Q_0 e^{-rt/100}$$

você pode ver que Q(t) → 25 (lb) quando t → ∞, de modo que o valor limite Q_L é 25

Além disso, *Q(t)* se aproxima desse limite mais rapidamente quando r aumenta.

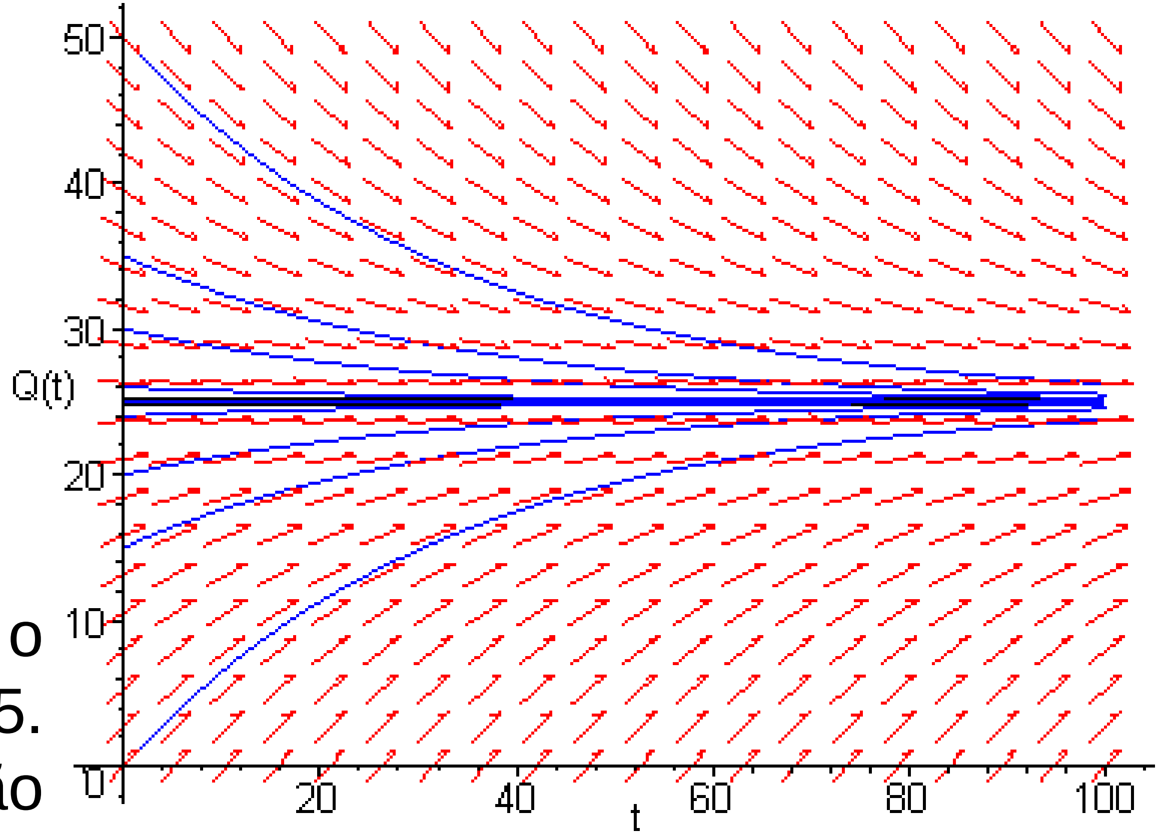
Ao analisar a solução note que o segundo termo à direita do sinal de igualdade é a porção do sal original que permanece no tanque no instante t, enquanto o primeiro termo fornece a quantidade de sal no tanque em consequência da ação dos fluxos.

Vejamos o gráfico...

Modelagem com Eq. de 1º ordem

Tanque de água salgada

As soluções para r = 3 e diversos valores de Q_0 estão ilustrados na Figura



Suponha agora que r = 3 e $Q_0 = 2Q_L$ = 50; então ....

$$Q(t) = 25 + [Q_0 - 25]e^{-rt/100} = 25 + 25e^{-0,03t}$$

Como 2% de 25 é 0,5, queremos encontrar o instante T no qual Q(t) tem o valor 25,5. Substituindo t = T e Q = 25,5 na equação acima e resolvendo para T, obtemos

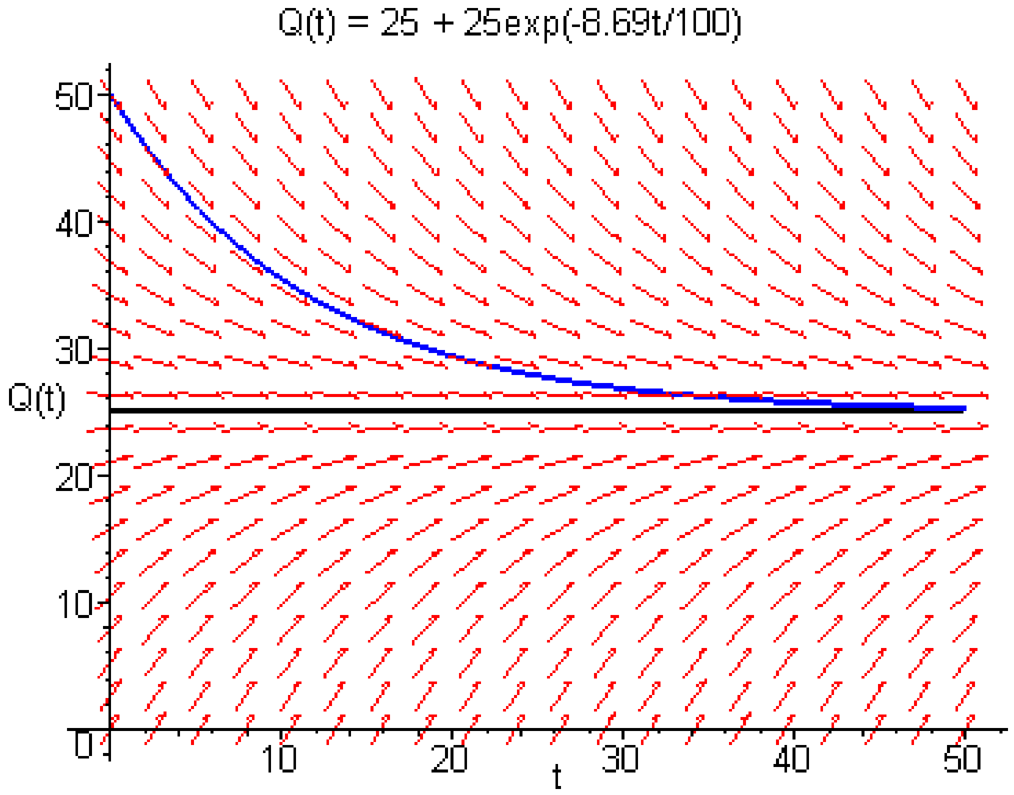
$$25.5 = 25 + 25e^{-0.03T} \quad 0.02 = e^{-0.03T} \quad \ln(0.02) = -0.03T \quad T = \frac{\ln(0.02)}{-0.03} \approx 130.4 \text{ min}$$

Modelagem com Eq. de 1º ordem

Tanque de água salgada

Para calcular o fluxo r requerido para que T não exceda 45 minutos retornamos à equação:

$$Q(t) = 25 + [Q_0 - 25]e^{-rt/100}$$



Onde colocamos t = 45 min, Q_0=50 e Q(t)=25,5

$$25{,}5 = 25 + [50 - 25]e^{-r\left(\frac{45}{100}\right)}$$

Resolvendo para r obtemos:

$$0{,}02 = e^{-0{,}45r} \qquad \ln(0{,}02) = -0{,}45r \qquad r = \frac{\ln(0.02)}{-0.45} \approx 8.69 \text{ gal/min}$$

Vamos ver outro exemplo...o caso clássico dos juros compostos...

Modelagem com Eq. de 1º ordem

Os juros compostos

Suponha que é depositada uma quantia em dinheiro em um banco, que paga juros a uma taxa anual r.

O valor S(t) do investimento em qualquer instante t depende tanto da frequência de capitalização dos juros quanto da taxa de juros.

As instituições financeiras têm políticas variadas em relação à capitalização: em algumas, a capitalização é mensal; em outras, é semanal, e algumas até capitalizam diariamente.

Se supusermos que a capitalização é feita continuamente, podemos montar um problema de valor inicial simples que descreve o crescimento do investimento.

A taxa de variação do valor do investimento é dS/dt e esta quantidade é igual à taxa segundo a qual os juros acumulam, que é a taxa de juros r multiplicada pelo valor atual do investimento S(t). Assim....

$$\frac{dS}{dt} = rS$$

Modelagem com Eq. de 1º ordem

Os juros compostos

Supondo que sabemos o valor inicial S(0) = S_0 nosso problema é:

$$\frac{dS}{dt} = rS$$

$$S(0) = S_0$$

Esta é uma equação linear e separável simples e sua solução é:

$$S(t) = S_0 e^{rt}$$

Vamos agora comparar os resultados desse modelo contínuo com a situação em que a capitalização acontece em intervalos finitos de tempo.

Se os juros são capitalizados uma vez por ano, depois de t anos $S(t) = S_0(1+r)^t$

Se os juros são capitalizados duas vezes por ano, ao final de seis meses o valor do investimento é $S_0[1 + (r/2)]$ e, ao final do primeiro ano, é $S_0[1 + (r/2)]^2$. Logo, depois de t anos, temos

$$S(t) = S_0\left(1 + \frac{r}{2}\right)^{2t}$$

Modelagem com Eq. de 1º ordem

Os juros compostos

Se os juros são capitalizados m vez por ano, depois de t anos teremos...

$$S(t) = S_0\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{mt}$$

Lembrando do cálculo que $$\lim_{m\to\infty} S_0\left(1 + \frac{r}{m}\right)^{mt} = S_0 e^{rt}$$

Vemos que é nosso resultado obtido inicialmente

Vamos agora adicionar a nossa equação depósitos (k>0) ou retiradas (k<0) numa taxa constante k, a equação ficaria:

$$\frac{dS}{dt} = rS + k \qquad \frac{dS}{dt} - rS = k$$

Modelagem com Eq. de 1º ordem

Os juros compostos

A equação $\frac{dS}{dt} - rS = k$ é linear com o fator integrante e^{-rt}

Sua solução geral é $S(t) = Ce^{rt} - \left(\frac{k}{r}\right)$

Pela condição inicial... $C = S_0 + \left(\frac{k}{r}\right)$

Portanto... $S(t) = S_0 e^{rt} + \left(\frac{k}{r}\right)(e^{rt} - 1)$

O primeiro termo na expressão é a parte de S(t) devida à acumulação de retornos sobre a quantidade inicial S_0 e o segundo termo é a parte referente a depósitos ou retiradas a uma taxa k.

Modelagem com Eq. de 1º ordem

Os juros compostos

Por exemplo, suponha que alguém abre uma conta para um plano de previdência privada (PPP) aos 25 anos, com investimentos anuais de R$ 2.000,00 continuamente.

Supondo uma taxa de retorno de 8% ao ano, qual será o saldo no PPP aos 65 anos?

Temos S_0 = 0, r = 0,08, k = R$ 2.000,00 e queremos determinar S(40).

$$S(t) = S_0 e^{rt} + \left(\frac{k}{r}\right)(e^{rt} - 1) \qquad S(40) = 0 + \left(\frac{2000}{0{,}08}\right)(e^{0{,}08\,40} - 1)$$

$$S(40) = (25000)(e^{3{,}2} - 1) = \text{R\$ } 588.313{,}00$$

É interessante notar que a quantidade total investida é R$ 80.000,00, de modo que a quantia restante de R$ 508.313,00 resulta do retorno acumulado do investimento.

O saldo depois de 40 anos também é bastante sensível à taxa. Por exemplo, S(40) = R$ 508.948,00 se r = 0,075 e S(40) = R$ 681.508,00 se r = 0,085.

Modelagem com Eq. de 1º ordem

Poluição

Considere uma lagoa que contém, inicialmente, 10 milhões de galões de água fresca. Água contendo um produto químico indesejável flui para a lagoa a uma taxa de 5 milhões de gal/ano (galões por ano) e a mistura sai da lagoa à mesma taxa.

A concentração $\gamma(t)$ do produto químico na água que entra varia periodicamente com o tempo t de acordo com a expressão $\gamma(t) = 2 + \text{sen}(2t)$ g/gal (gramas por galão).

Construa um modelo matemático desse processo de fluxo e determine a quantidade de produto químico na lagoa em qualquer instante. Desenhe o gráfico da solução e analise a solução.

Modelagem com Eq. de 1º ordem

Poluição

Como os fluxos de entrada e de saída de água são iguais, a quantidade de água na lagoa permanece constante com 10^7 galões.

Vamos denotar o tempo por t, medido em anos, e a massa do produto químico por Q(t), medida em gramas. Assim,

$$\frac{dQ}{dt} = \ taxa\ de\ entrada\ - taxa\ de\ saída$$

ou considerando os dados, nosso PVI é...

$$\frac{dQ}{dt} = \ (2\ +\ \sin 2t)(5 \text{ x } 10^6) - \frac{Q(t)}{2} \qquad\qquad Q(0) = 0$$

Pois a taxa de saída é: [$Q(t)$ g/10^7 gal][5 x 10^6 gal/ano] = $Q(t)$/2 g/ano

Definindo q(t)=Q(t)/10^6 $\quad \frac{dq}{dt} = 5\ (2\ +\ \sin 2t) - \frac{q(t)}{2} \qquad\qquad q(0) = 0$

Modelagem com Eq. de 1º ordem

Poluição

Reescrevendo nossa equação fica...

$$\frac{dq}{dt} + \frac{q(t)}{2} = 10 + 5\sin 2t \qquad q(0) = 0$$

A equação é linear e, embora a expressão à direita do sinal de igualdade seja uma função de t, o coeficiente de q (1/2) é constante.

Logo, o fator integrante é $e^{t/2}$. Multiplicando por esse fator e integrando a equação resultante, obtemos a solução geral:

$$q(t) = e^{-t/2}\int e^{t/2}(10 + 5\sin 2\,t)dt$$

Como resolver essa integral?

Modelagem com Eq. de 1º ordem

Poluição

Por partes...

$$\int e^{t/2}\sin 2t dt = \left[-\frac{1}{2}e^{t/2}\cos 2t + \frac{1}{4}\left(\int e^{t/2}\cos 2t dt\right)\right]$$

$$= \left[-\frac{1}{2}e^{t/2}\cos 2t + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}e^{t/2}\sin 2t - \frac{1}{4}\int e^{t/2}\sin 2t dt\right)\right]$$

$$= \left[-\frac{1}{2}e^{t/2}\cos 2t + \frac{1}{8}e^{t/2}\sin 2t - \frac{1}{16}\int e^{t/2}\sin 2t dt\right]$$

$$\frac{17}{16}\int e^{t/2}\sin 2t dt = -\frac{1}{2}e^{t/2}\cos 2t + \frac{1}{8}e^{t/2}\sin 2t + C$$

$$\int e^{t/2}\sin 2t dt = -\frac{8}{17}e^{t/2}\cos 2t + \frac{2}{17}e^{t/2}\sin 2t + C$$

$$5\int e^{t/2}\sin 2t dt = -\frac{40}{17}e^{t/2}\cos 2t + \frac{10}{17}e^{t/2}\sin 2t + C$$

Modelagem com Eq. de 1º ordem

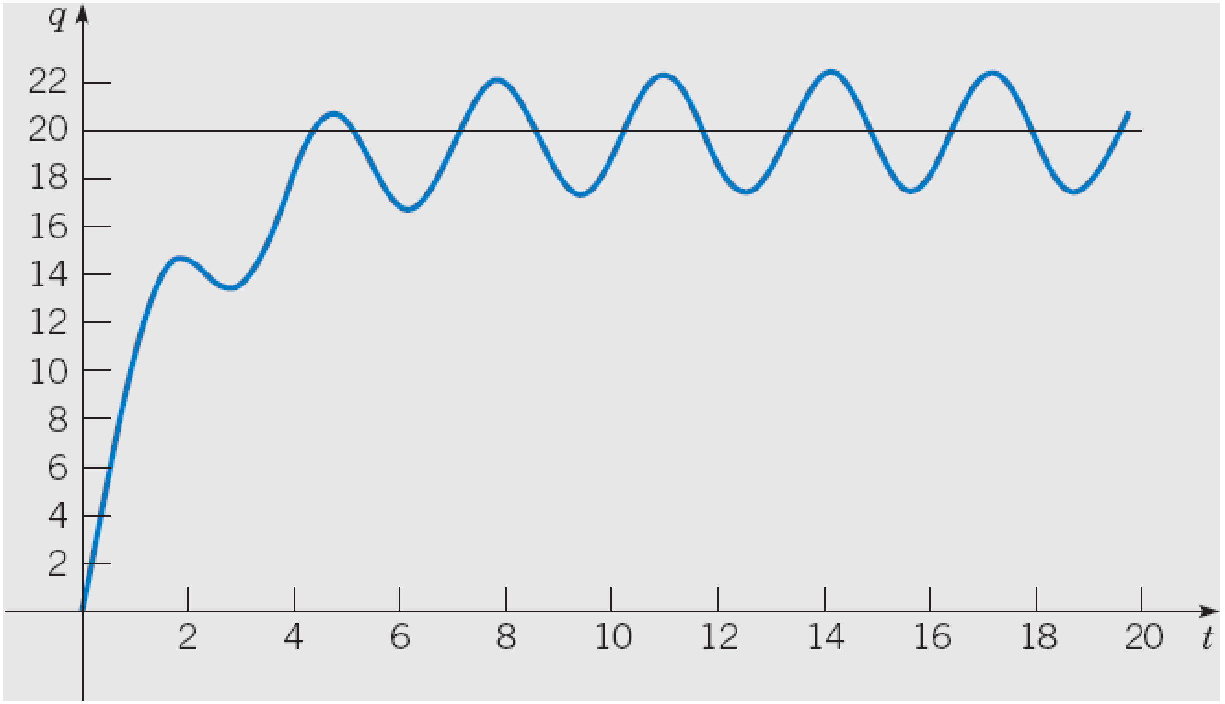
Poluição

Desta forma a solução (após simplificação) fica:

$$q(t) = e^{-t/2}\left[20e^{t/2} - \frac{40}{17}e^{t/2}\cos 2\,t + \frac{10}{17}e^{t/2}\sin 2\,t + C\right]$$

$$q(t) = 20 - \frac{40}{17}\cos 2\,t + \frac{10}{17}\sin 2\,t - \frac{300}{17}e^{-t/2}$$

A figura mostra um gráfico da solução junto com a reta q = 20. O termo exponencial na solução é importante para valores pequenos de t, mas diminui rapidamente quando t aumenta. No fim, a solução vai consistir em uma oscilação, devido aos termos sen(2t) e cos(2t), em torno do nível constante q = 20.



Modelagem com Eq. de 1º ordem

Lista de exercícios disponível em:

http://www.eletrica.ufpr.br/p/professores:patricio:inicial

Disciplina TE315 (Equações Diferenciais para Engenharia Elétrica)

Gabaritos disponíveis no mesmo endereço