EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARA ENGENHARIA ELÉTRICA TE 315

Aula 02_3

EQUAÇÕES EXATAS

Equações Exatas

INTRODUÇÃO

Para resolver equações diferenciáveis de primeira ordem, existem diversos métodos de integração aplicáveis a várias classes de problemas.

As equações mais importantes são as lineares e as de variáveis separáveis, que discutimos anteriormente. Vamos considerar agora uma classe de equações conhecidas como **equações exatas**, para as quais também existe um método bem definido de solução.

Lembre-se, no entanto, de que as equações de primeira ordem que podem ser resolvidas por métodos de integração elementares como os já vistos, são bastante especiais; a maioria das equações de primeira ordem não podem ser resolvidas por estes métodos.

Vamos começar por um exemplo de equação exata...

Equações Exatas

EXEMPLO 1

Suponha a equação diferencial $$2x + y^2 + 2xyy' = 0$$

Esta equação não é linear nem separável, entretanto poderíamos notar que a função $\Psi(x,y) = x^2 + xy^2$ tem a seguinte propriedade:

$$2x + y^2 = \frac{\partial\Psi}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad 2xy = \frac{\partial\Psi}{\partial y}$$

Portanto, a equação original pode ser escrita como:

$$\frac{\partial\Psi}{\partial x} + \frac{\partial\Psi}{\partial y}\frac{dy}{dx} = 0$$

Que, considerando que *y* = *f*(*x*), pode ser escrita como: $$\frac{d\Psi(x,y)}{dx} = \frac{d}{dx}(x^2 + xy^2) = 0$$

Integrando obtemos $$\Psi(x,y) = x^2 + xy^2 + C$$

Equações Exatas

Ao resolver a equação diferencial, **o passo-chave** reconhecer que **existe** uma função Ψ que satisfaz as condições

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = 2x + y^2 \qquad \frac{\partial \Psi}{\partial y} = 2xy$$

De modo geral, seja a equação diferencial

$$M(x,y) + N(x,y)y' = 0$$

e suponha que podemos identificar uma **função ψ(x,y)** tal que:

$$\frac{\partial \Psi(x,y)}{\partial x} = M(x,y) \qquad \frac{\partial \Psi(x,y)}{\partial y} = N(x,y)$$

e que ψ(x,y)=C define y=ϕ(x) implicitamente então....

$$M(x,y) + N(x,y)y' = \frac{\partial \Psi(x,y)}{\partial x} + \frac{\partial \Psi(x,y)}{\partial y}\frac{dy}{dx} = \frac{d\Psi[x,\phi(x)]}{dx}$$

Desta forma a ODE original se transforma em: $\frac{d\Psi[x,\phi(x)]}{dx} = 0$

Evidentemente as soluções desta equação são as infinitas ψ(x,y)=C (implícitas)

Este tipo de ODE é chamada de **Equação Diferencial Exata**

Equações Exatas

No **EXEMPLO 1** foi relativamente fácil ver que a equação diferencial era exata e, de fato, foi fácil encontrar sua solução, pelo menos implicitamente, reconhecendo-se a função desejada ψ.

Para equações mais complicadas, pode não ser possível fazer isto tão facilmente.

Duas perguntas são fundamentais:

1. Como podemos saber se determinada equação é exata? e, se for...
2. Como podemos encontrar a função $\psi(x, y)$?

O **teorema** a seguir responde à primeira pergunta, e sua demonstração fornece um modo de responder à segunda

Equações Exatas

TEOREMA

Suponha que uma ODE possa ser escrita na forma:

$$M(x,y) + N(x,y)y' = 0 \qquad (1)$$

em que as funções M, N, M_y e N_x são todas contínuas na região retangular R(x,y): $\alpha<x<\beta$, $\gamma<y<\delta$

Então a equação diferencial (1) é exata em R se, e somente se:

$$M_y(x,y) = N_x(x,y) \qquad \forall(x,y) \in R \qquad (2)$$

em outras palavras, **sempre existe uma função Ψ** que satisfaz as condições

$$\Psi_x(x,y) = M(x,y) \qquad \Psi_y(x,y) = N(x,y) \qquad (3)$$

se M e N satisfazem a condição (2)

Equações Exatas

EXEMPLO 2

Suponha a equação diferencial $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x+4y}{4x-y} \quad \Rightarrow \quad (x+4y) + (4x-y)y' = 0$

Novamente, esta equação não é linear nem separável (identifique o por quê), propomos....

$$M(x,y) = x + 4y$$

$$N(x,y) = 4x - y$$

Verificamos se $M_y(x,y) = N_x(x,y)$ $\quad M_y(x,y) = 4 = N_x(x,y)$!!!

Vamos construir a função Ψ(x,y). A partir do teorema exigimos que:

$$\Psi_x = M(x,y) = x + 4y \qquad \Psi_y = N(x,y) = 4x - y$$

Portanto, integrando uma dessas equações...

$$\Psi(x,y) = \int \Psi_x \ (x,y)dx = \int (x+4y)dx = \frac{1}{2}x^2 + 4xy + C(y)$$

Equações Exatas

EXEMPLO 2

Obtivemos: $\Psi(x,y) = \frac{1}{2}x^2 + 4xy + C(y)$ que cumpre $\Psi_x = M(x,y) = x + 4y$

Mas é necessário também cumprir $\Psi_y = N(x,y) = 4x - y$

Para isso utilizamos a *C(y)* da seguinte forma: $\Psi_y = 4x - y = 4x + C'(y)$

Comparando é evidente que: $C'(y) = -y$ Mas precisamos de C(y)!!!

Integrando por y... $C(y) = \int C'(y)dy = -\frac{y^2}{2} + C$

Desta forma: $\Psi(x,y) = \frac{1}{2}x^2 + 4xy - \frac{y^2}{2} + C$ $\Psi(x,y) = \frac{1}{2}x^2 + 4xy - \frac{y^2}{2}$

E pelo teorema as soluções (implícitas) são todas as : $\boxed{\Psi(x,y) = x^2 + 8xy - y^2 = C}$

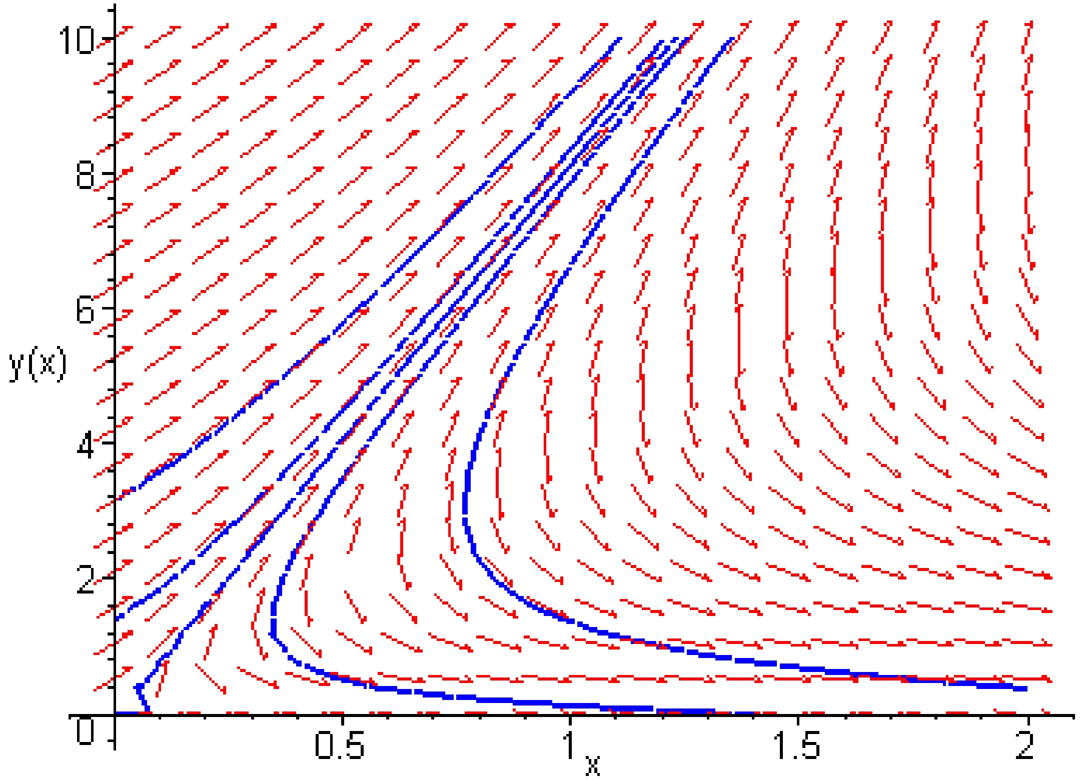
Equações Exatas

EXEMPLO 2

Resumindo, nossa equação e soluções são dadas por:

$$\frac{dx}{dy} = \frac{x + 4y}{4x - y} \qquad (x + 4y) + (4x - y)y' = 0 \qquad x^2 + 8xy - y^2 = C$$

O gráfico do campo de direções (todas as soluções) e algumas soluções y(x) específicas são apresentadas a seguir:



Equações Exatas

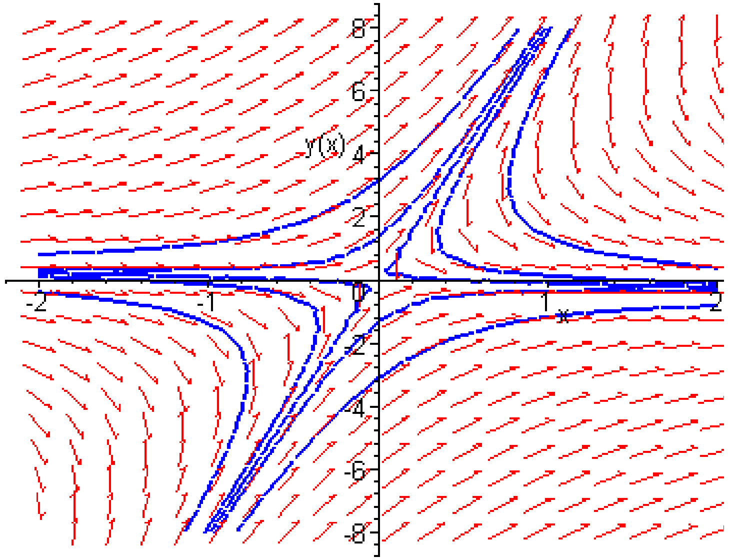
EXEMPLO 2

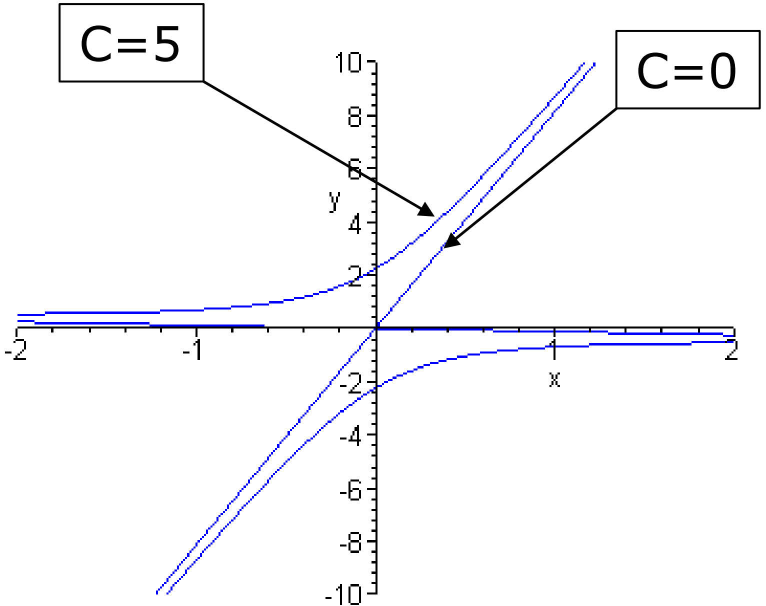
As soluções obtidas foram definidas implicitamente por $x^2 + 8xy - y^2 = C$

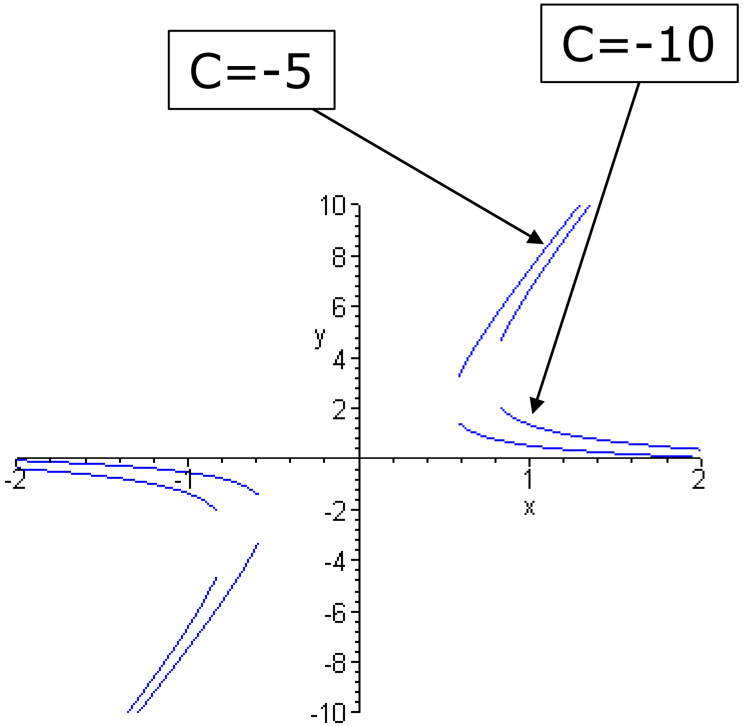
Neste caso particular podemos expressar elas explicitamente...

Para isso resolvemos a equação acima para y $y^2 - x^2 - 8xy + C = 0$

$$y = 4x \pm \sqrt{17x^2 + C}$$







Equações Exatas

EXEMPLO 3

Encontre as soluções da ODE $(ycosx + 2xe^y) + (senx + x^2e^y - 1)y' = 0$

Evidentemente, esta equação não é nem linear nem separável

$$M(x,y) = ycosx + 2xe^y$$
$$N(x,y) = senx + x^2e^y - 1$$

Verificamos se $M_y(x,y) = N_x(x,y)$ $\quad M_y(x,y) = cosx + 2xe^y = N_x(x,y)$!!!

Quer dizer que é exata e portanto existe Ψ!!! tal que:

$$M(x,y) = ycosx + 2xe^y \equiv \Psi_x$$
$$N(x,y) = senx + x^2e^y - 1 \equiv \Psi_y$$

Integrando... $\Psi(x,y) = \int \Psi_x\ (x,y)dx = \int (ycosx + 2xe^y)dx = ysenx + x^2e^y + C(y)$

Derivando por y e igualando.. $\Psi_y(x,y) = senx + x^2e^y + C'(y) = senx + x^2e^y - 1$

Obtemos: $C'(y) = -1 \quad C(y) = -y + C \qquad \Psi(x,y) = ysenx + x^2e^y - y = C$

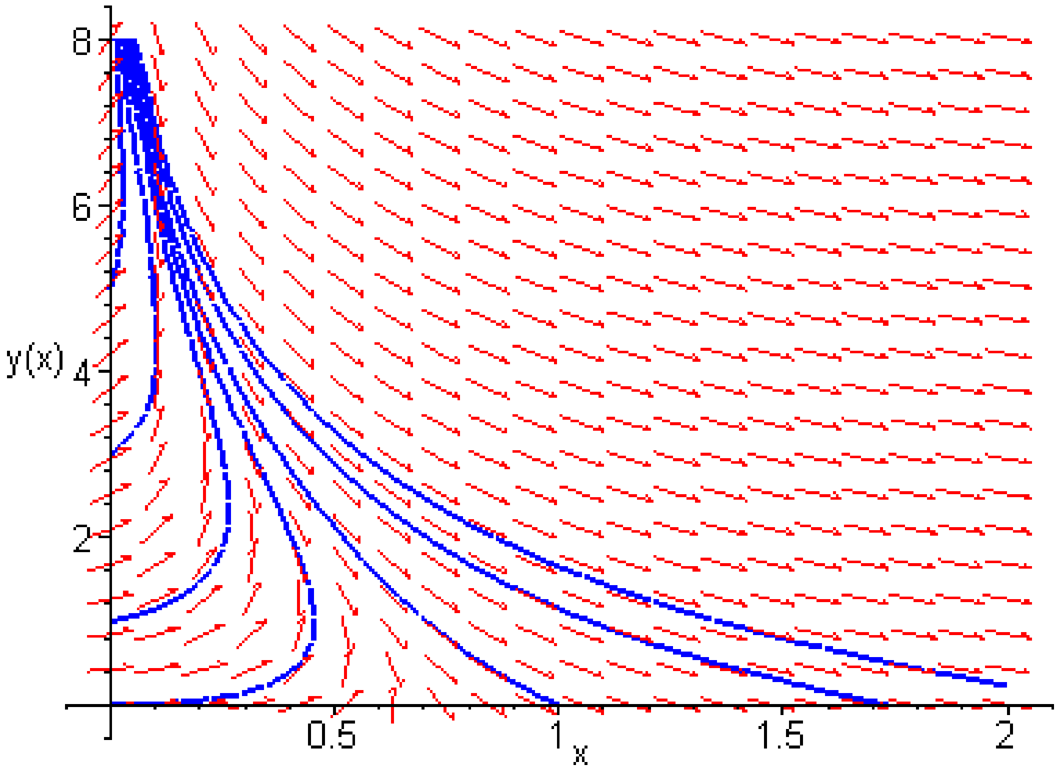
Equações Exatas

EXEMPLO 3

A equação e as soluções são dadas por:

$$(y\cos x + 2xe^{y}) + (\operatorname{sen} x + x^{2}e^{y} - 1)y' = 0 \qquad y\operatorname{sen} x + x^{2}e^{y} - y = C$$

O gráfico do campo de direções (todas as soluções) e algumas soluções y(x) específicas são apresentadas a seguir:



Equações Exatas

EXEMPLO 4

Suponha a equação diferencial $(3xy + y^2) + (x^2 + xy)y' = 0$

Novamente, esta equação não é linear nem separável ....tentamos exata....

$$M(x,y) = 3xy + y^2$$
$$N(x,y) = x^2 + xy$$

Verificamos se $M_y(x,y) = N_x(x,y)$ $M_y(x,y) = 3x + 2y \neq N_x(x,y) = 2x + y$!!!

Algumas vezes é possível converter uma equação diferencial que **não é exata** em uma **exata** multiplicando-se a equação por um fator integrante apropriado.

Esse foi o procedimento que usamos para resolver equações lineares.

Vamos investigar a possibilidade de usar essa ideia em um caso geral...

Equações Exatas

EXEMPLO 4

Vamos multiplicar a equação geral original $M(x,y) + N(x,y)y' = 0$

por uma função μ e depois tentar escolher μ de forma que a equação resultante:

$$\mu(x,y)M(x,y) + \mu(x,y)N(x,y)y' = 0$$

seja exata, ou seja, pelo teorema: $(\mu M)_y = (\mu N)_x$

Lembrando que M e N são funções conhecidas, a função ⍰ (chamada de **fator integrante**) tem que satisfazer a equação diferencial parcial de primeira ordem:

$$M\mu_y - N\mu_x + (M_y - N_x)\mu = 0$$

Infelizmente, esta equação é, em muitos casos, pelo menos tão difícil de resolver quanto a equação original... na prática só pode ser utilizada em casos simples...

Equações Exatas

EXEMPLO 4

As situações mais importantes nas quais fatores integrantes simples podem ser encontrados ocorrem quando μ é uma função de só uma das variáveis x ou y, em vez de ambas.

Supondo que μ é uma função só de x, a derivada parcial μ_x se reduz à derivada ordinária dμ/dx e $\mu_y = 0$. Fazendo essas substituições na equação anterior....

$$0 - N\frac{d\mu}{dx} + (M_y - N_x)\mu = 0$$

Obtemos:

$$\frac{d\mu}{dx} = \frac{M_y - N_x}{N}\mu$$

Esta é uma equação linear e separável...

Vamos aplicar este procedimento a $(3xy + y^2) + (x^2 + xy)y' = 0$

Equações Exatas

EXEMPLO 4

Retomamos a equação $(3xy + y^2) + (x^2 + xy)y' = 0$

Calculamos o fator integrante $\dfrac{M_y - N_x}{N} = \dfrac{3x + 2y - (2x + y)}{x^2 + xy} = \dfrac{1}{x}$

logo $\dfrac{d\mu}{dx} = \dfrac{\mu}{x}$ portanto... $\mu(x) = x$

Multiplicando a equação original por esse fator integrante teremos: $(3x^2y + xy^2) + (x^3 + x^2y)y' = 0$

em que: $M_y(x,y) = 3x^2 + 2xy = N_x(x,y) = 3x^2 + 2xy$

Portanto existe Ψ(x,y) tal que: $\Psi_y(x,y) = x^3 + x^2y$ $\Psi_x(x,y) = 3x^2y + xy^2$

Integrando etc. etc...encontramos as soluções: $x^3y + \dfrac{1}{2}x^2y^2 = C$

Equações Exatas

EXEMPLO 4

As soluções explicitas podem ser facilmente obtidas pois $x^3 y + \frac{1}{2} x^2 y^2 = C$

é quadrática em y... $\frac{1}{2} x^2 y^2 + x^3 y + C = 0$

Lista de exercícios disponível em:

http://www.eletrica.ufpr.br/p/professores:patricio:inicial

Disciplina TE315 (Equações Diferenciais para Engenharia Elétrica)

Gabaritos disponíveis no mesmo endereço