EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARA ENGENHARIA ELÉTRICA TE 315

Aula 02_2

EQUAÇÕES SEPARÁVEIS

Equações Separáveis

Nesta aula examinaremos uma subclasse de equações **lineares** e **não lineares** de primeira ordem do tipo

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

Sempre podemos reescrever a equação na forma....

$$M(x, y) + N(x, y)\frac{dy}{dx} = 0$$

Por exemplo, considerando M(x,y) = -f(x,y) e N(x,y)=1, podemos também reescrever a equação na forma diferencial...

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

Se M é uma função somente de x e N é uma função de y então teremos

$$\boxed{\boldsymbol{M(x)dx + N(y)dy = 0}}$$

Neste caso a equação é chamada de variáveis separáveis

Equações Separáveis

Exemplo 1: resolver a equação...

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2 + 1}{y^2 - 1}$$

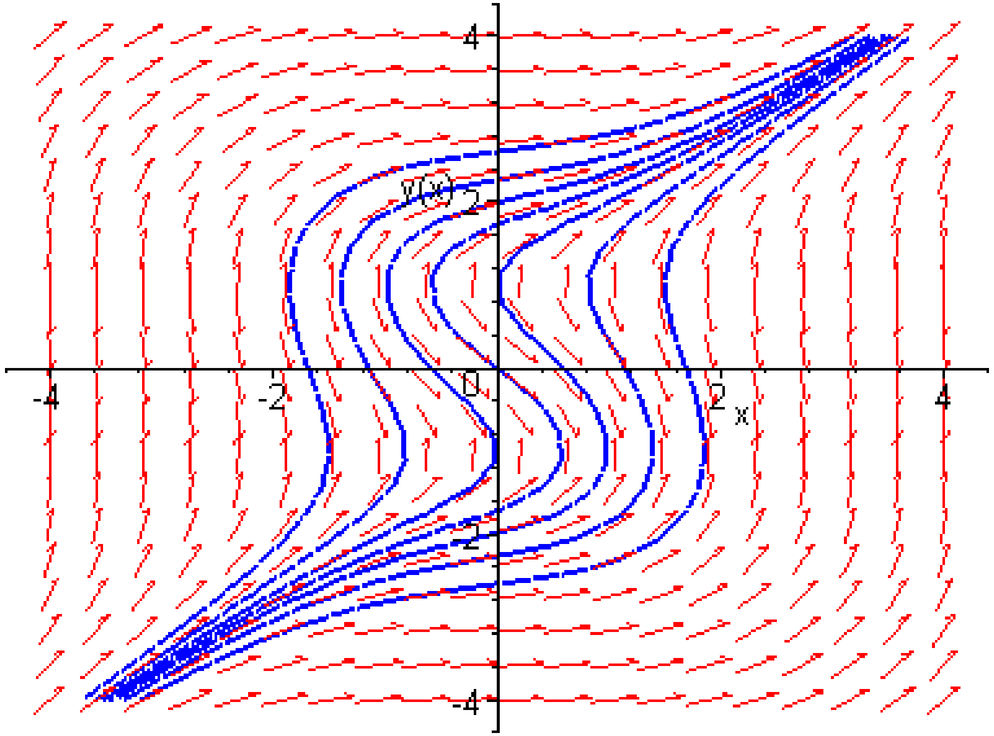
Separando as variáveis e resolvendo...

$$(y^2 - 1)dy = (x^2 + 1)dx$$

$$\int (y^2 - 1)\, dy = \int (x^2 - 1)\, dx$$

$$\frac{1}{3}y^3 - y = \frac{1}{3}x^3 + x + C$$

$$y^3 - 3y = x^3 + 3x + C$$



Campo de direções com diversas curvas integrais (para diferentes condições iniciais)

Equações Separáveis

Exemplo 2: resolver a equação...

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 + 4x + 2}{2(y-1)}$$

Separando as variáveis e resolvendo...

$$2(y-1)dy = (3x^2 + 4x + 2)dx$$

$$2\int (y-1)\,dy = \int (3x^2 + 4x + 2)\,dx$$

$$y^2 - 2y = x^3 + 2x^2 + 2x + C$$

Para encontrar a solução explicitamente (e não implícita como acima)

$$y^2 - 2y - (x^3 + 2x^2 + 2x + C) = 0$$

$$y = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 4(x^3 + 2x^2 + 2x + C)}}{2} = 0$$

$$y = 1 \pm \sqrt{x^3 + 2x^2 + 2x + C}$$

Vamos supor y(0)=-1 ...analisemos a solução para esta condição inicial...

Equações Separáveis

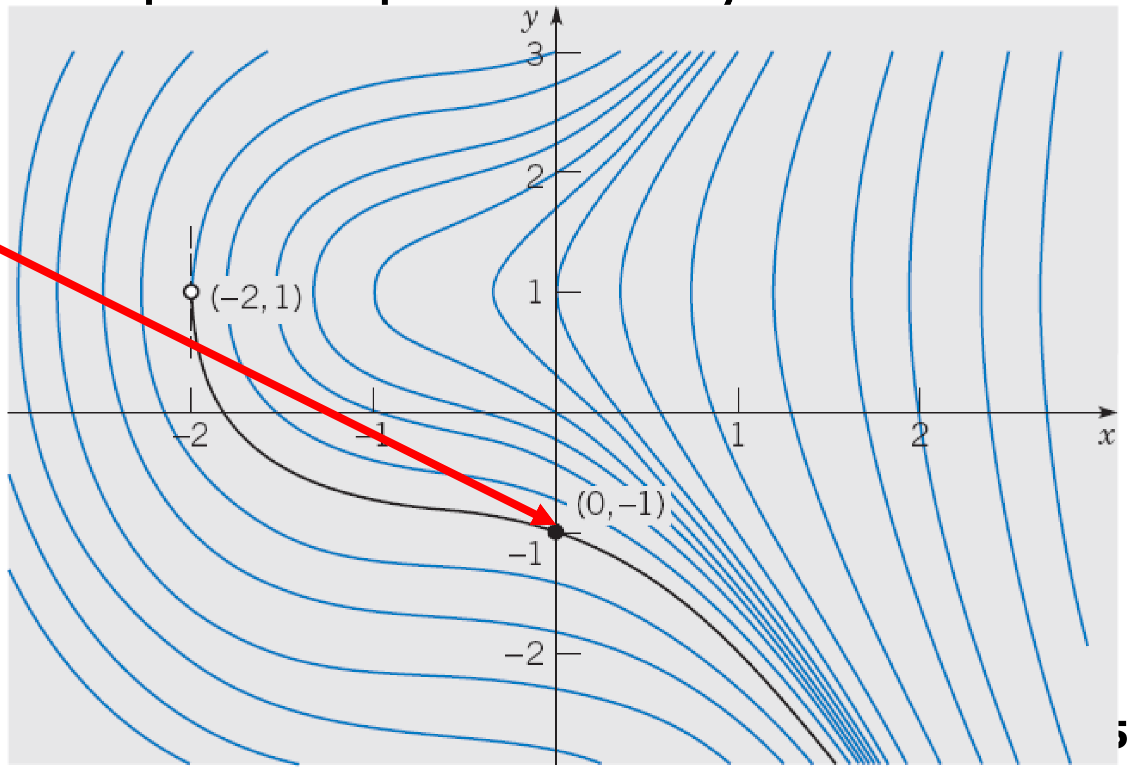
Utilizando a solução implícita para y(0)=-1...

$$y^2 - 2y = x^3 + 2x^2 + 2x + C \quad \Rightarrow \quad (-1)^2 - 2(-1) = C \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{C = 3}$$

Desta forma, para este caso, a equação implícita que define y é:

$$y^2 - 2y = x^3 + 2x^2 + 2x + \mathbf{3}$$

y(0)=-1



Ou utilizando a explicita...

$$y = 1 \pm \sqrt{x^3 + 2x^2 + 2x + C}$$

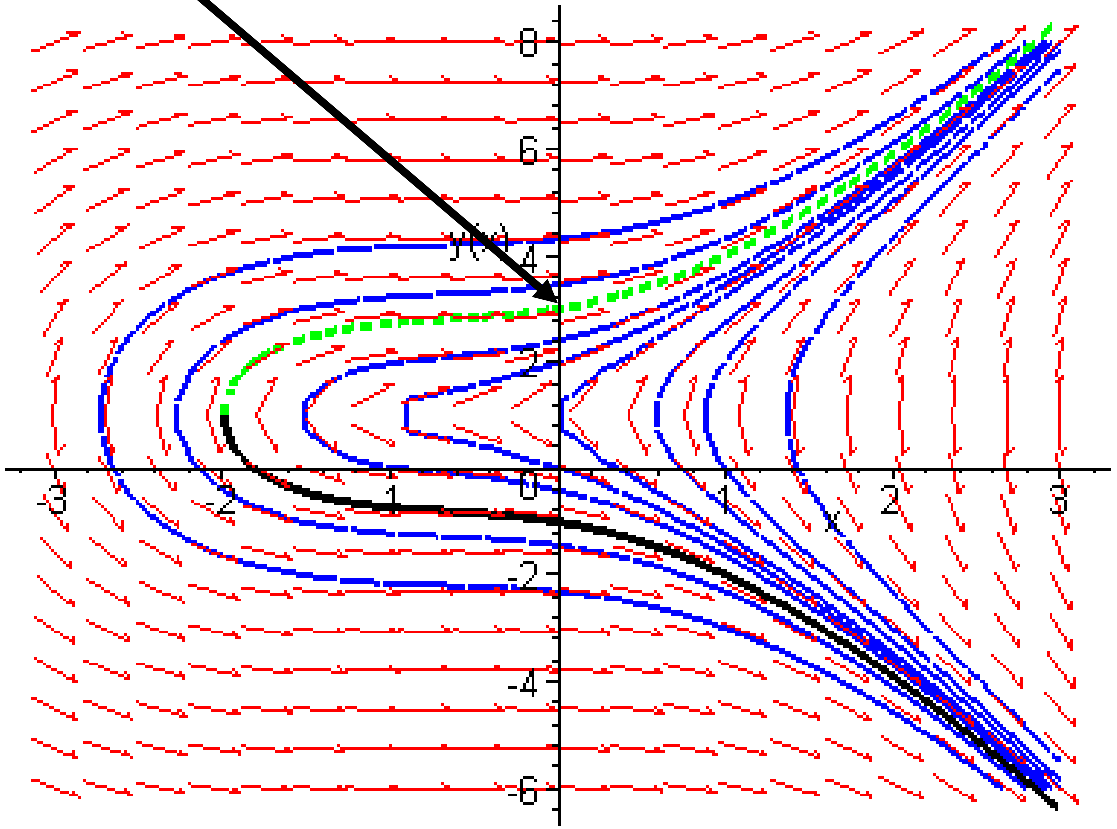
$$-1 = 1 - \sqrt{x^3 + 2x^2 + 2x + C} \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{C = 4}$$

$$\Rightarrow \quad y = 1 - \sqrt{x^3 + 2x^2 + 2x + 4}$$

Equações Separáveis

Perceber que se a condição inicial é y(0)=3, implica que escolhemos o sinal positivo (no lugar do negativo) na raiz

$$y = 1 + \sqrt{x^3 + 2x^2 + 2x + 4}$$



Desta forma as soluções do problema de valor inicial

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 + 4x + 2}{2(y-1)} \qquad y(0) = -1$$

São dadas por:

$$y^2 - 2y = x^3 + 2x^2 + 2x + 3$$ implícita

$$y = 1 - \sqrt{x^3 + 2x^2 + 2x + 4}$$ explícita

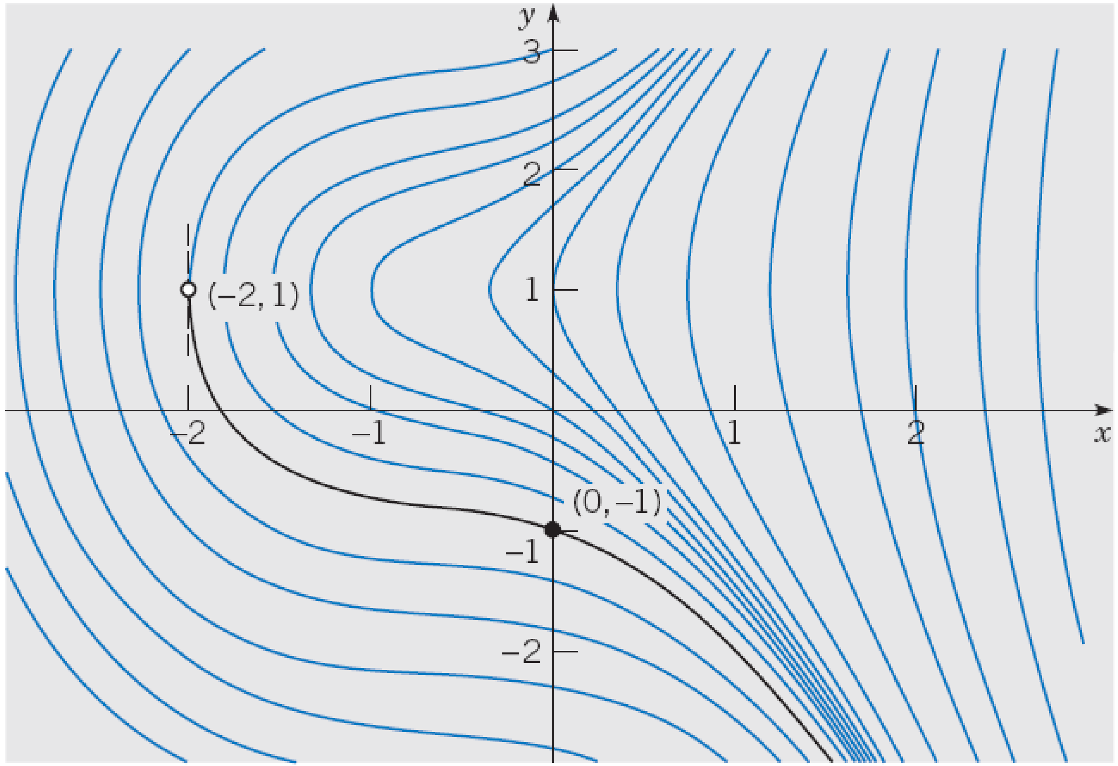
Equações Separáveis

Da solução explícita segue que:

$$y = 1 - \sqrt{x^3 + 2x^2 + 2x + 4} =$$

$$= 1 - \sqrt{x^2(x+2) + 2(x+2)} =$$

$$= 1 - \sqrt{(x+2)\,(x^2+2)}$$



Portanto o domínio de y é x∈(-2,∞)

Notar que para x=-2 teremos y=1 o que torna o denominador de dy/dx=0 (tangente vertical)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 + 4x + 2}{2(y-1)}$$

Portanto, o domínio de y pode ser estimado localizando as tangentes verticais na figura, **procedimento útil quando trabalhamos com soluções implícitas**

Equações Separáveis

Da solução explícita segue que:

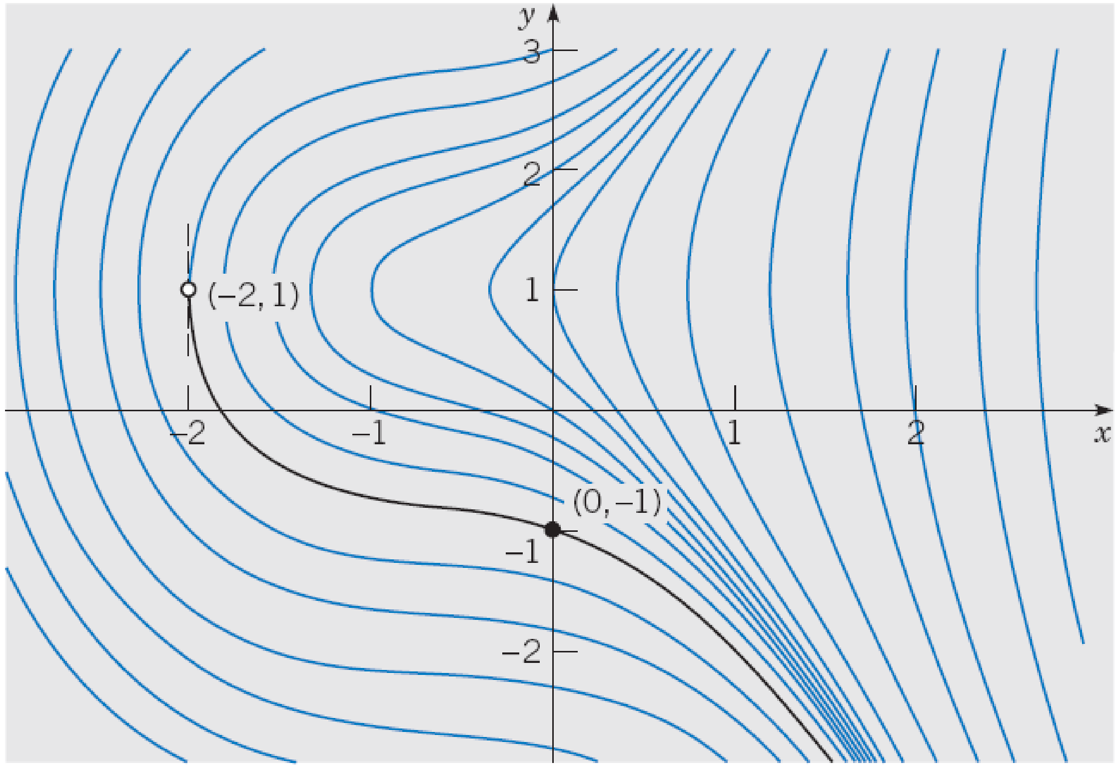
$$y = 1 - \sqrt{x^3 + 2x^2 + 2x + 4} =$$

$$= 1 - \sqrt{x^2(x+2) + 2(x+2)} =$$

$$= 1 - \sqrt{(x+2)\,(x^2+2)}$$

Portanto o domínio de y é x∈(-2,∞)

Notar que para x=-2 teremos y=1 o que torna o denominador de dy/dx=0 (tangente vertical)



$$\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 + 4x + 2}{2(y-1)}$$

Portanto, o domínio de y pode ser estimado localizando as tangentes verticais na figura, **procedimento útil quando trabalhamos com soluções implícitas**

Equações Separáveis

UFPR UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

Exemplo 3: resolver o problema de valor inicial, desenhar os gráficos etc.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4x - x^3}{4 + y^3} \qquad y(0) = 1$$

Separando as variáveis...

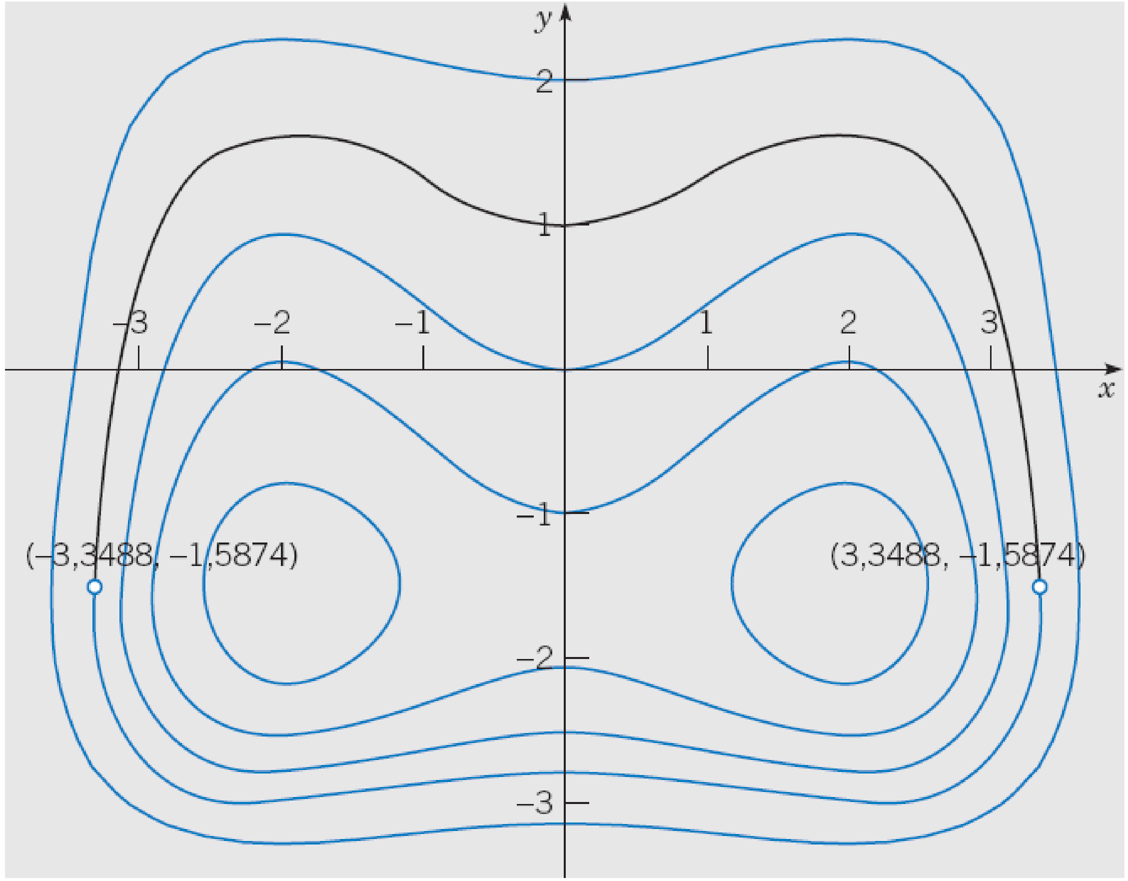
$$(4 + y^3)dy = (4x - x^3)dx$$

Integrando e arrumando...

$$y^4 + 16y + x^4 - 8x^2 = C$$

Qualquer função y=f(x) que satisfaz essa condição é solução da equação inicial

A figura mostra as soluções para diversos valores de C (condições iniciais)



Equações Separáveis

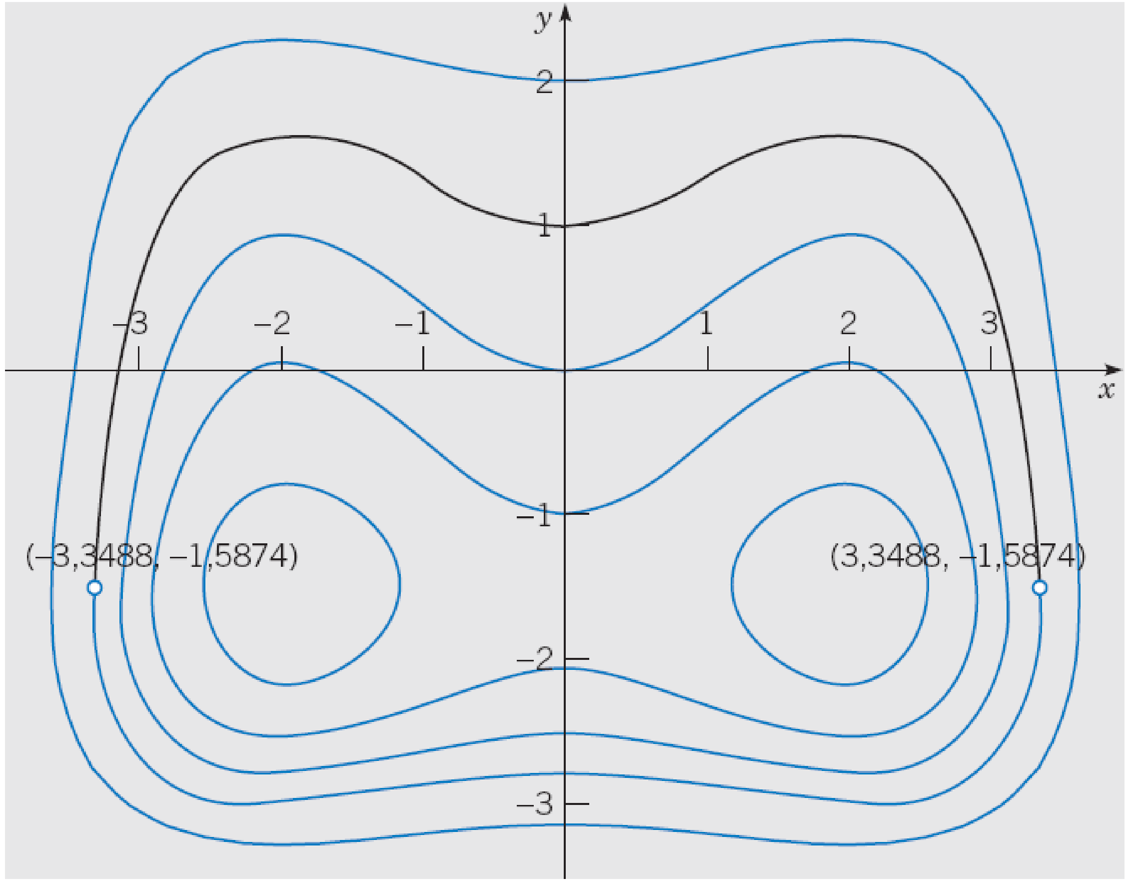
A partir da condição inicial $y(0) = 1$ ...obtemos... $\boldsymbol{C = 17}$

Logo nossa solução particular para C=17 é: $y^4 + 16y + x^4 - 8x^2 = 17$

Olhando na figura esta solução está limitada (domínio) pelos pontos vazados (tangentes verticais).

Esses pontos correspondem a $4+y^3=0$ pois:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4x - x^3}{4 + y^3}$$



Os valores de y = $(-4)^{1/3} \cong -1{,}5874$ correspondem a x $\cong \pm 3{,}3488$ obtido de:

$$y^4 + 16y + x^4 - 8x^2 = 17$$

Equações Separáveis

Lista de exercícios disponível em:

http://www.eletrica.ufpr.br/p/professores:patricio:inicial

Disciplina TE315 (Equações Diferenciais para Engenharia Elétrica)

Gabaritos disponíveis no mesmo endereço