LISTA 02_1 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS
Equações lineares – Fatores integrantes
Respostas no final
Gabaritos na página do professor

Em cada um dos problemas de 1 a 12:
(a) Desenhe um campo de direções para a equação diferencial dada.
(b) Com base em uma análise do campo de direções, descreva o comportamento das soluções para valores grandes de t.
(c) Encontre a solução geral da equação diferencial dada e use-a para determinar o comportamento das soluções quando $t \to \infty$.

1. $y' + 3y = t + e^{-2t}$
2. $y' - 2y = t^2 e^{2t}$
3. $y' + y = te^{-t} + 1$.
4. $y' + (1/t)y = 3 \cos 2t, \quad t > 0$
5. $y' - 2y = 3e^t$
6. $ty' + 2y = \operatorname{sen} t, \quad t > 0$
7. $y' + 2ty = 2te^{-t^2}$
8. $(1 + t^2)y' + 4ty = (1 + t^2)^{-2}$
9. $2y' + y = 3t$
10. $ty' - y = t^2 e^{-t}, \quad t > 0$
11. $y' + y = 5 \operatorname{sen} 2t$
12. $2y' + y = 3t^2$

Em cada um dos problemas de 13 a 20, encontre a solução do problema de valor inicial dado.

13. $y' - y = 2te^{2t}, \quad y(0) = 1$
14. $y' + 2y = te^{-2t}, \quad y(1) = 0$
15. $ty' + 2y = t^2 - t + 1, \quad y(1) = \frac{1}{2}, \quad t > 0$
16. $y' + (2/t)y = (\cos t)/t^2, \quad y(\pi) = 0, \quad t > 0$
17. $y' - 2y = e^{2t}, \quad y(0) = 2$
18. $ty' + 2y = \operatorname{sen} t, \quad y(\pi/2) = 1, \quad t > 0$
19. $t^3 y' + 4t^2 y = e^{-t}, \quad y(-1) = 0, \quad t < 0$
20. $ty' + (t + 1)y = t, \quad y(\ln 2) = 1, \quad t > 0$

Em cada um dos problemas de 21 a 23:
(a) Desenhe um campo de direções para a equação diferencial dada. Como parece que as soluções se comportam quando t assume valores grandes? O comportamento depende da escolha do valor inicial a? Seja a_0 o valor de a no qual ocorre a transição de um tipo de comportamento para outro. Estime o valor de a_0.
(b) Resolva o problema de valor inicial e encontre precisamente o valor crítico a_0.
(c) Descreva o comportamento da solução correspondente ao valor inicial a_0.

21. $y' - \frac{1}{2}y = 2 \cos t, \quad y(0) = a$
22. $2y' - y = e^{t/3}, \quad y(0) = a$
23. $3y' - 2y = e^{-\pi t/2}, \quad y(0) = a$

Em cada um dos problemas de 24 a 26:

(a) Desenhe um campo de direções para a equação diferencial dada. Como parece que as soluções se comportam quando $t \to 0$? O comportamento depende da escolha do valor inicial a? Seja a_0 o valor de a no qual ocorre a transição de um tipo de comportamento para outro. Estime o valor de a_0.

(b) Resolva o problema de valor inicial e encontre precisamente o valor crítico a_0.

(c) Descreva o comportamento da solução correspondente ao valor inicial a_0.

24. $ty' + (t+1)y = 2te^{-t}$, $\quad y(1) = a$, $\quad t > 0$

25. $ty' + 2y = (\text{sen } t)/t$, $\quad y(-\pi/2) = a$, $\quad t < 0$

26. $(\text{sen } t)y' + (\cos t)y = e^t$, $\quad y(1) = a$, $\quad 0 < t < \pi$

27. Considere o problema de valor inicial

$$y' + \tfrac{1}{2}y = 2\cos t, \qquad y(0) = -1.$$

Encontre as coordenadas do primeiro ponto de máximo local da solução para $t > 0$.

28. Considere o problema de valor inicial

$$y' + \tfrac{2}{3}y = 1 - \tfrac{1}{2}t, \qquad y(0) = y_0.$$

Encontre o valor de y_0 para o qual a solução toca, mas não cruza o eixo dos t.

29. Considere o problema de valor inicial

$$y' + \tfrac{1}{4}y = 3 + 2\cos 2t, \qquad y(0) = 0.$$

(a) Encontre a solução desse problema de valor inicial e descreva seu comportamento para valores grandes de t.

(b) Determine o valor de t para o qual a solução intersecta pela primeira vez a reta $y = 12$.

30. Encontre o valor de y_0 para o qual a solução do problema de valor inicial

$$y' - y = 1 + 3\,\text{sen } t, \qquad y(0) = y_0$$

permanece finita quando $t \to \infty$.

31. Considere o problema de valor inicial

$$y' - \frac{3}{2}y = 3t + 2e^t, \qquad y(0) = y_0.$$

Encontre o valor de y_0 que separa as soluções que crescem positivamente quando $t \to \infty$ das que crescem em módulo, mas permanecem negativas. Como a solução que corresponde a esse valor crítico de y_0 se comporta quando $t \to \infty$?

32. Mostre que todas as soluções de $2y' + ty = 2$ [veja a Eq. (41) do texto] tendem a um limite quando $t \to \infty$, e encontre esse limite.

Sugestão: Considere a solução geral, Eq. (47), e use a regra de L'Hôpital no primeiro termo.

33. Mostre que, se a e λ são constantes positivas e se b é um número real arbitrário, então toda solução da equação

$$y' + ay = be^{-\lambda t}$$

tem a propriedade de que $y \to 0$ quando $t \to \infty$.

Sugestão: Considere os casos $a = \lambda$ e $a \neq \lambda$ separadamente.

Em cada um dos problemas de 34 a 37, construa uma equação diferencial linear de primeira ordem cujas soluções têm o comportamento descrito quando $t \to \infty$. Depois resolva sua equação e confirme que todas as soluções têm, de fato, a propriedade especificada.

34. Todas as soluções têm limite 3 quando $t \to \infty$.
35. Todas as soluções são assintóticas à reta $y = 3 - t$ quando $t \to \infty$.
36. Todas as soluções são assintóticas à reta $y = 2t - 5$ quando $t \to \infty$.
37. Todas as soluções se aproximam da curva $y = 4 - t^2$ quando $t \to \infty$.

RESPOSTAS

1. **(c)** $y = ce^{-3t} + (t/3) - (1/9) + e^{-2t}$; y é assintótico a $t/3 - 1/9$ quando $t \to \infty$

2. **(c)** $y = ce^{2t} + t^3e^{2t}/3$; $y \to \infty$ quando $t \to \infty$

3. **(c)** $y = ce^{-t} + 1 + t^2e^{-t}/2$; $y \to 1$ quando $t \to \infty$

4. **(c)** $y = (c/t) + (3 \cos 2t)/4t + (3 \operatorname{sen} 2t)/2$; y é assintótico a $(3 \operatorname{sen} 2t)/2$ quando $t \to \infty$

5. **(c)** $y = ce^{2t} - 3e^t$; $y \to \infty$ ou $-\infty$ quando $t \to \infty$

6. **(c)** $y = (c - t \cos t + \operatorname{sen} t)/t^2$; $y \to 0$ quando $t \to \infty$

7. **(c)** $y = t^2e^{-t^2} + ce^{-t^2}$; $y \to 0$ quando $t \to \infty$

8. **(c)** $y = (\arctan t + c)/(1 + t^2)^2$; $y \to 0$ quando $t \to \infty$

9. **(c)** $y = ce^{-t/2} + 3t - 6$; y é assintótico a $3t - 6$ quando $t \to \infty$

10. **(c)** $y = -te^{-t} + ct$; $y \to \infty$, 0, ou $-\infty$ quando $t \to \infty$

11. **(c)** $y = ce^{-t} + \operatorname{sen} 2t - 2 \cos 2t$; y é assintótico a $\operatorname{sen} 2t - 2 \cos 2t$ quando $t \to \infty$

12. **(c)** $y = ce^{-t/2} + 3t^2 - 12t + 24$; y é assintótico a $3t^2 - 12t + 24$ quando $t \to \infty$

13. $y = 3e^t + 2(t - 1)e^{2t}$

14. $y = (t^2 - 1)e^{-2t}/2$

15. $y = (3t^4 - 4t^3 + 6t^2 + 1)/ 12t^2$

16. $y = (\operatorname{sen} t)/t^2$

17. $y = (t + 2)e^{2t}$

18. $y = t^{-2}[(\pi^2/4) - 1 - t \cos t + \operatorname{sen} t]$

19. $y = -(1 + t)e^{-t}/t^4, \quad t \neq 0$

20. $y = (t - 1 + 2e^{-t})/t, \quad t \neq 0$

21. **(b)** $y = -\frac{4}{5} \cos t + \frac{8}{5} \operatorname{sen} t + (a + \frac{4}{5})e^{t/2}; \quad a_0 = -\frac{4}{5}$

(c) y oscila para $a = a_0$

22. **(b)** $y = -3e^{t/3} + (a + 3)e^{t/2}; \quad a_0 = -3$

(c) $y \to -\infty$ para $a = a_0$

23. **(b)** $y = [2 + a(3\pi + 4)e^{2t/3} - 2e^{-\pi t/2}]/(3\pi + 4)$; $a = -2/(3\pi + 4)$

(c) $y \to 0$ para $a = a_0$

24. **(b)** $y = te^{-t} + (ea - 1)e^{-t}/t$; $a_0 = 1/e$

(c) $y \to 0$ quando $t \to 0$ para $a = a_0$

25. **(b)** $y = -(\cos t)/t^2 + \pi^2a/4t^2$; $a_0 = 4/\pi^2$

(c) $y \to \frac{1}{2}$ quando $t \to 0$ para $a = a_0$

26. **(b)** $y = (e^t - e + a \operatorname{sen} 1)/\operatorname{sen} t$; $a_0 = (e - 1)/\operatorname{sen} 1$

(c) $y \to 1$ para $a = a_0$

27. $(t, y) = (1{,}364312,\ 0{,}820082)$

28. $y_0 = -1{,}642876$

29. **(b)** $y = 12 + \frac{8}{65}\cos 2t + \frac{64}{65}\operatorname{sen} 2t - \frac{788}{65}e^{-t/4}$; y oscila em torno de 12 quando $t \to \infty$

(c) $t = 10{,}065778$

30. $y_0 = -5/2$

31. $y_0 = -16/3$; $y \to -\infty$ quando $t \to \infty$ para $y_0 = -16/3$