

LISTA 01_3 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS**Classificação de equações diferenciais****Respostas no final****Gabaritos na página do professor**

Em cada um dos problemas de 1 a 6, determine a ordem da equação diferencial dada e diga se ela é linear ou não linear.

1. $t^2 \frac{d^2 y}{dt^2} + t \frac{dy}{dt} + 2y = \sin t$
2. $(1 + y^2) \frac{d^2 y}{dt^2} + t \frac{dy}{dt} + y = e^t$
3. $\frac{d^4 y}{dt^4} + \frac{d^3 y}{dt^3} + \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} + y = 1$
4. $\frac{dy}{dt} + ty^2 = 0$
5. $\frac{d^2 y}{dt^2} + \sin(t + y) = \sin t$
6. $\frac{d^3 y}{dt^3} + t \frac{dy}{dt} + (\cos^2 t)y = t^3$

Em cada um dos problemas de 7 a 14, verifique se cada função dada é solução da equação diferencial.

7. $y'' - y = 0$; $y_1(t) = e^t$, $y_2(t) = \cosh t$
8. $y'' + 2y - 3y = 0$; $y_1(t) = e^{-3t}$, $y_2(t) = e^t$
9. $ty' - y = t^2$; $y = 3t + t^2$
10. $y''' + 4y''' + 3y = t$; $y_1(t) = t/3$, $y_2(t) = e^{-t} + t/3$
11. $2t^2 y'' + 3ty' - y = 0$, $t > 0$; $y_1(t) = t^{1/2}$, $y_2(t) = t^{-1}$
12. $t^2 y'' + 5ty' + 4y = 0$, $t > 0$; $y_1(t) = t^{-2}$, $y_2(t) = t^{-2} \ln t$
13. $y'' + y = \sec t$, $0 < t < \pi/2$; $y = (\cos t) \ln \cos t + t \sin t$
14. $y' - 2ty = 1$; $y = e^{t^2} \int_0^t e^{-s^2} ds + e^{t^2}$

Em cada um dos problemas de 15 a 18, determine os valores de r para os quais a equação diferencial dada tem uma solução da forma $y = e^{rt}$.

15. $y' + 2y = 0$
16. $y'' - y = 0$
17. $y'' + y' - 6y = 0$
18. $y''' - 3y'' + 2y' = 0$

Nos Problemas 19 e 20, determine os valores de r para os quais a equação diferencial dada tem uma solução da forma $y = t^r$ para $t > 0$.

$$19. \quad t^2 y'' + 4ty' + 2y = 0$$

$$20. \quad t^2 y'' + 4ty' + 4y = 0$$

21. Siga os passos indicados aqui para deduzir a equação de movimento do pêndulo (como feito em sala de aula). Suponha que a barra do pêndulo é rígida e sem peso, que a massa é pontual e que não existe atrito ou resistência em nenhum ponto do sistema.

(a) Suponha que a massa está em uma posição deslocada arbitrária, indicada pelo ângulo θ . Desenhe um diagrama mostrando as forças que agem sobre a massa.

(b) Aplique a lei do movimento de Newton na direção tangencial ao arco circular sobre o qual a massa se move. Então, a força de tensão sobre a barra não aparece na equação. Note que é necessário encontrar a componente da força gravitacional na direção tangencial. Note também que a aceleração linear, em oposição à aceleração angular, é $(L \cdot d^2\theta/dt^2)$, em que L é o comprimento da barra.

(c) Simplifique o resultado obtido no item (b) para obter a equação da aula (aproxime a função trigonométrica).

22. Outra maneira de deduzir a equação do pêndulo baseia-se no princípio de conservação de energia.

(a) Mostre que a energia cinética T do pêndulo em movimento é

$$T = \frac{1}{2} mL^2 \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2.$$

(b) Mostre que a energia potencial V do pêndulo relativa à posição de repouso é

$$V = mgL(1 - \cos \theta).$$

(c) Pelo princípio de conservação de energia, a energia total $E = T + V$ é constante. Calcule dE/dt , iguale a zero e mostre que a equação resultante pode ser reduzida à equação da aula

23. Uma terceira dedução da equação do pêndulo depende do princípio do momento angular: A taxa de variação do momento angular em torno de qualquer ponto é igual ao momento externo total em torno do mesmo ponto.

(a) Mostre que o momento angular M em torno do ponto de suporte é dado por $M = mL^2 d\theta/dt$.

(b) Iguale dM/dt ao momento da força gravitacional e mostre que a equação resultante pode ser reduzida à equação da aula. Note que os momentos positivos são no sentido trigonométrico (anti-horário).

RESPOSTAS

1. Segunda ordem, linear.
2. Segunda ordem, não linear.
3. Quarta ordem, linear.
4. Primeira ordem, não linear.
5. Segunda ordem, não linear.
6. Terceira ordem, linear.

15. $r = -2$
16. $r = \pm 1$
17. $r = 2, -3$
18. $r = 0, 1, 2$
19. $r = -1, -2$
20. $r = 1, 4$

21. Segunda ordem, linear.
22. Segunda ordem, não linear.
23. Quarta ordem, linear.
24. Segunda ordem, não linear.