EQUAÇÕES DIFERENCIAIS PARA ENGENHARIA ELÉTRICA

TE 315

Aula 01_3

CLASSIFICAÇÃO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

Classificação de Equações Diferenciais

O **principal objetivo** deste curso é discutir as propriedades das soluções das equações diferenciais, e apresentar **métodos de encontrar soluções** ou de aproximá-las.

Para fornecer um quadro para esta discussão, nesta aula veremos a forma de **classificar equações diferenciais**.

Quando a função desconhecida depende de uma única variável independente, apenas derivadas comuns aparecem na equação.

Neste caso, diz-se que a equação é uma Equação Diferencial Ordinária - **ODE**.

As equações discutidas nas duas aulas anteriores são equações diferenciais ordinárias. Por exemplo,

$$\frac{dv}{dt} = 9{,}8 - 0{,}2\, v \qquad\qquad \frac{dp}{dt} = 0{,}5\, p - 450$$

Classificação de Equações Diferenciais

Quando a função desconhecida depende de várias variáveis independentes, **derivadas parciais** aparecem na equação. Neste caso, diz-se que a equação é uma **equação diferencial parcial** (**PDE**).

Exemplos:

$$\alpha^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial u(x,t)}{\partial t^2}$$

Equação de calor

$$\alpha^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}$$

Equação de onda

Classificação de Equações Diferenciais

Outra classificação que identifica as equações diferenciais depende do **número de funções desconhecidas envolvidas**.

Se há uma única função desconhecida a ser encontrada, então uma equação é suficiente. Se houver duas ou mais funções desconhecidas, então é necessário um **sistema de equações**.

Por exemplo, equações predador-presas têm a forma

$$\frac{du}{dt} = au - \alpha uv \qquad \frac{dv}{dt} = -cv + \gamma uv$$

onde u(t) e v(t) são as respectivas populações de presas e espécies predadoras. As constantes a, α, c e γ dependem da espécie particular que está sendo estudada.

Classificação de Equações Diferenciais

A **ordem** de uma equação diferencial é a ordem da mais alta derivada que aparece na equação:

Exemplos

$$y' + 3y = 0$$

$$y'' + 3y - 2t = 0$$

$$\frac{d^4 v}{dt^4} - \frac{d^2 v}{dt^2} + 1 = 0$$

$$u_{xx} + u_{yy} = \sin t$$

Estudaremos somente as equações diferenciais para as quais a derivada mais alta pode ser isolada do restante da equação

$$y^n(t) = f(t, y, y', y'', y''', \dots, y^{(n-1)})$$

Classificação de Equações Diferenciais

Equações **lineares** e **não lineares**

Uma equação diferencial ordinária

$$F\left(t, y, y', y'', y''', \ldots, y^{(n)}\right) = 0$$

é linear se F é uma **função linear da suas variáveis** y, y´, y´´, y´´´,...,y^n

$$y^n(t) = f\left(t, y, y', y'', y''', \ldots, y^{(n-1)}\right)$$

Assim, a **equação diferencial ordinária linear** geral de ordem n é:

$$a(t)y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(t)y = g(t)$$

Classificação de Equações Diferenciais

Equações **lineares** e **não lineares**

Determine quais equações são lineares ou não lineares...

$$(1)\ y' + 3y = 0 \qquad (2)\ y'' + 3e^{y}y' - 2t = 0 \qquad (3)\ y'' + 3y' - 2t^2 = 0$$

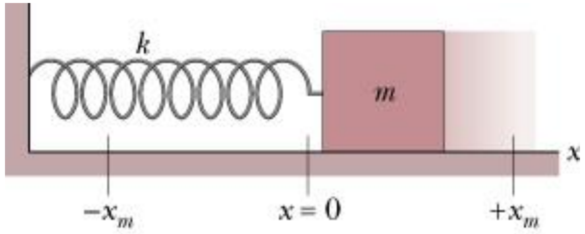
$$(4)\ \frac{d^4y}{dt^4} - t\frac{d^2y}{dt^2} + 1 = t^2 \qquad (5)\ u_{xx} + uu_{yy} = \sin t \qquad (6)\ u_{xx} + \sin(u)u_{yy} = \cos t$$

Vejamos alguns exemplos de problemas físicos que levam às equações diferenciais de diferentes tipos...

Classificação de Equações Diferenciais

UNIVERSIDADE FEDERAL DO PARANÁ

O Sistema Massa-Mola



O sistema massa mola é um exemplo de sistema oscilante

Aplicando a Segunda Lei de Newton temos que $\Sigma \boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$

No caso massa-mola $F_x = -kx$, k-constante de elasticidade da mola

$$\boxed{F_x = -kx = ma_x = m\frac{d^2x}{dt^2}}$$

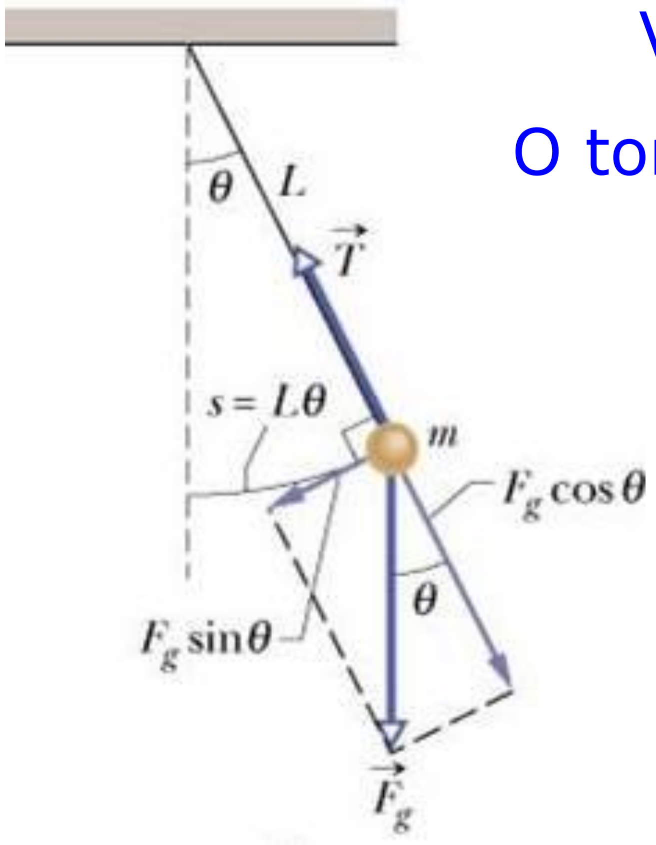
ou

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0}$$

Equação Diferencial Linear Ordinária de segunda ordem, homogênea com coeficientes constantes.

Classificação de Equações Diferenciais

O Pêndulo Simples



Vamos obter a equação diferencial do movimento

O torque líquido sobre o pêndulo é $\tau = -r_{\perp}F_g = -Lmg \text{ sen}\theta$

Aplicando a Segunda Lei de Newton para a rotação temos que $\Sigma\tau = I\alpha$

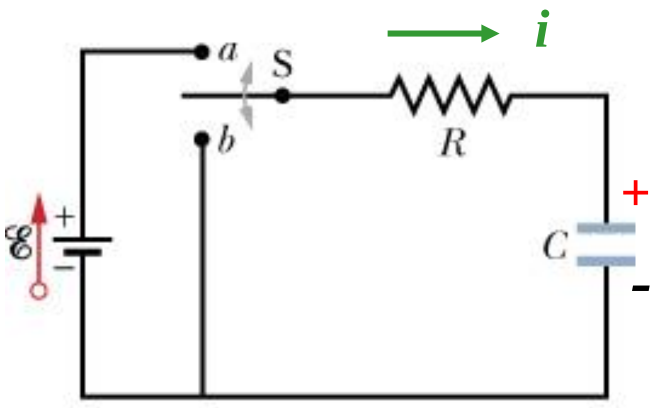
Neste caso $\tau = -Lmg \text{ sen}\theta$, portanto:

$$\boxed{\tau = -Lmg \; sen\theta = I\alpha = I\frac{d^2\theta}{dt^2}}$$

Considerando ângulos pequenos teremos sen$\theta \approx \theta$ e como $I = mL^2$:

$$\boxed{-Lmg\,\theta = mL^2\frac{d^2\theta}{dt^2}} \quad \text{ou} \quad \boxed{\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{g}{L}\theta = 0}$$

O Circuito RC



A fonte **carrega o capacitor** até $V_c = \varepsilon$.

Como $C \equiv q/V_c$ a carga de equilíbrio é $C\varepsilon$.

Aplicando a Lei das Malhas no sentido horário

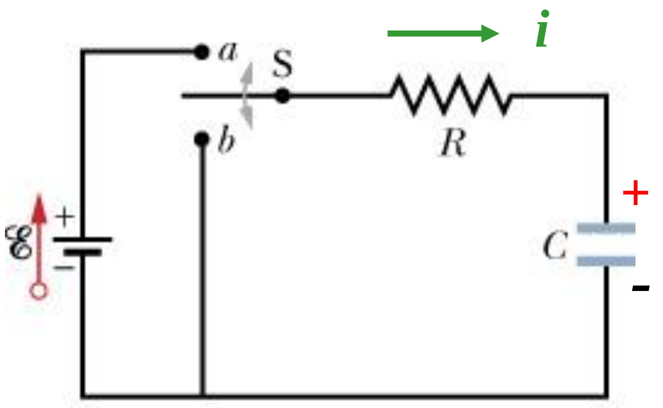
$$\varepsilon - iR - \frac{q}{C} = 0 \qquad \text{ou} \qquad \frac{dq}{dt} + \frac{q}{RC} = \frac{\varepsilon}{R}$$

Equação Diferencial Ordinária Linear não homogênea de primeira ordem com coeficientes constantes

Vamos tentar resolver ela....

Classificação de Equações Diferenciais

O Circuito RC



$$\frac{dq}{dt}+\frac{q}{RC}=\frac{\varepsilon}{R}$$

Solução (particular + homogênea): $q = q_p + q_h$

Vejamos. Solução da equação homogênea: $\frac{dq}{dt}+\alpha q=0$

$$\frac{1}{RC}\equiv\alpha \quad \frac{dq}{q}=-\alpha\,dt \quad \int_{q_0}^{q}\frac{dq}{q}=-\int_{t_0}^{t}\alpha\,dt \quad \ln q+C_1=-\alpha t+C_2$$

$q_h = K\,e^{-\alpha t}$

Uma solução particular pode ser quando dq/dt =0 ou seja no equilíbrio, com o capacitor já carregado. Neste caso $q_p = C\mathcal{E}$

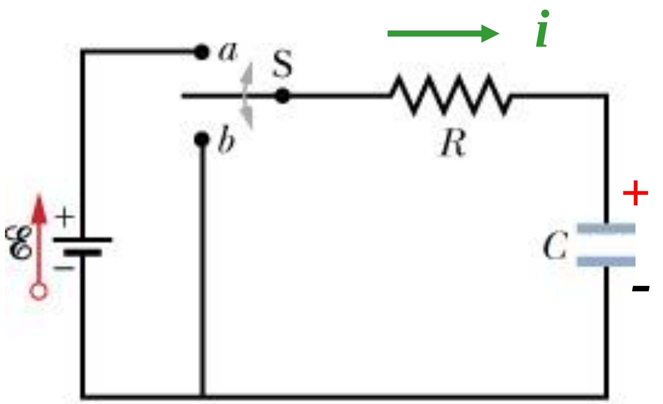
Agora podemos determinar K substituindo nossas soluções e aplicando a condição inicial $q_0(t=0) = 0$:

$$q=C\mathcal{E}\left(1-e^{-\alpha t}\right) \quad 0=C\mathcal{E}+K \quad K=-C\mathcal{E}$$

Logo teremos: $q=C\mathcal{E}+Ke^{-\alpha t} \quad q=C\mathcal{E}\left(1-\exp(-\frac{t}{RC})\right)$

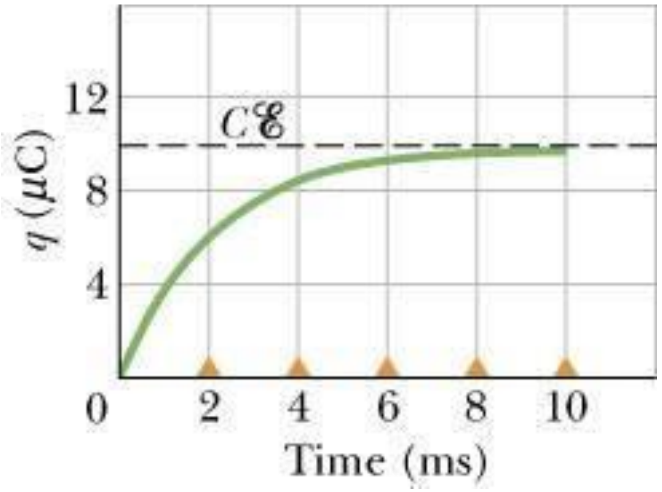
Classificação de Equações Diferenciais

O Circuito RC



Assim na carga do capacitor teremos:

$$q = C\mathcal{E}\left(1-\exp(-\frac{t}{RC})\right)$$

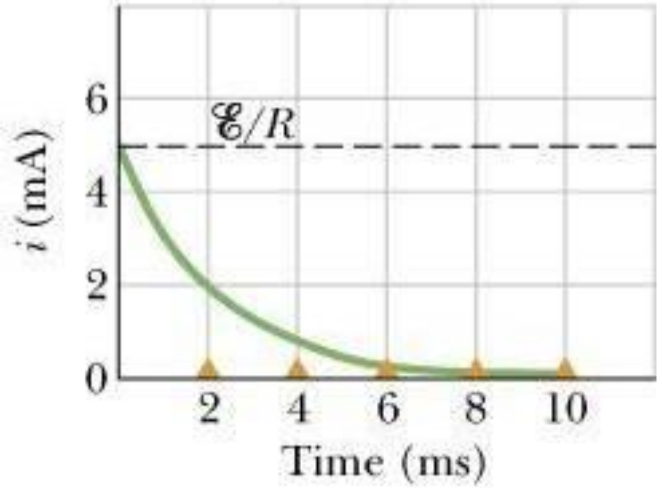


E a tensão?

$$V_c = \frac{q}{C} = \mathcal{E}\left(1-\exp(-\frac{t}{RC})\right)$$

E a corrente?

$$i = \frac{dq}{dt} = \frac{\mathcal{E}}{R}e^{-\frac{t}{RC}}$$

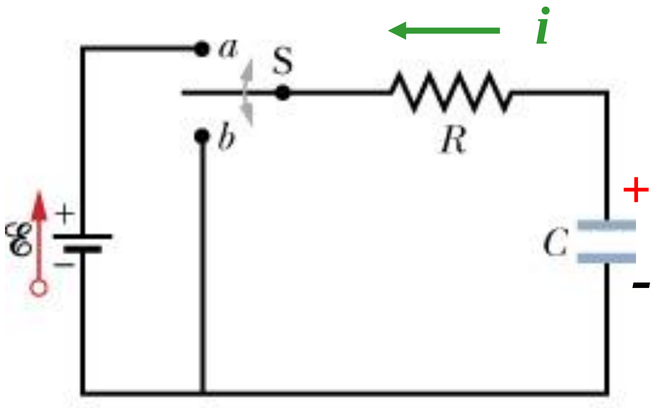


E na descarga do capacitor? Qual é a equação e como resolver?

Classificação de Equações Diferenciais

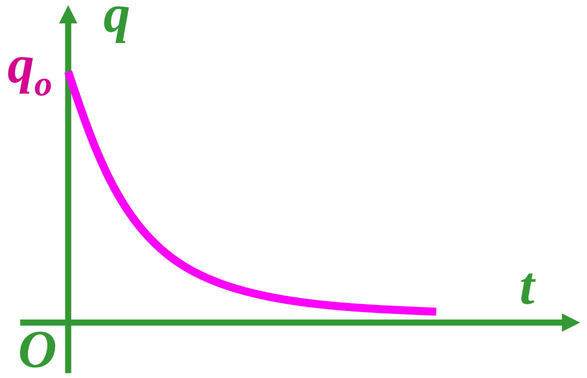
O Circuito RC

Na **descarga do capacitor** a equação é: $$\frac{dq}{dt}+\frac{q}{RC}=0$$



Equação diferencial linear homogênea de primeira ordem com coeficientes constantes

Solução: q = K $e^{-\alpha t}$



Agora podemos determinar K da condição inicial (t=0)

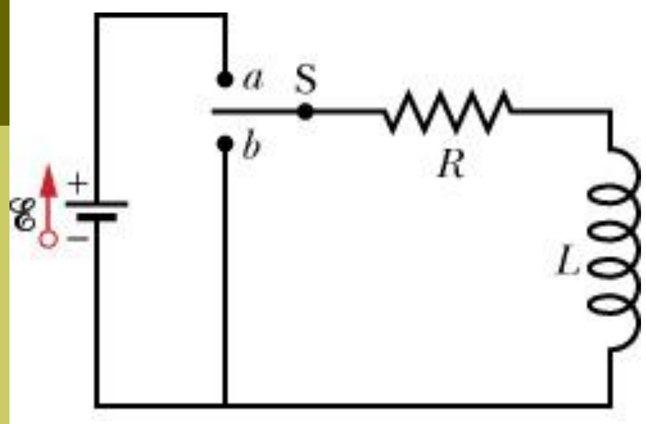
$$\boxed{q=q_0 e^{-\frac{t}{RC}}}$$

E a tensão? $$\boxed{V_c=\frac{q_0}{C}e^{-\frac{t}{RC}}}$$

E a corrente? $$\boxed{i=\frac{dq}{dt}=-\frac{q_0}{RC}e^{-\frac{t}{RC}}}$$

Classificação de Equações Diferenciais

O Circuito RL



Vamos considerar o circuito da figura (posição b)

Aplicando a Lei das Malhas temos:

$$L\frac{di}{dt} + Ri = 0 \qquad \frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = 0 \qquad \frac{R}{L} \equiv \alpha$$

Podemos tentar resolver esta equação segundo aprendemos na aula...

$$\frac{di}{i} = -\alpha\, dt \qquad \int_{i_0}^{i} \frac{di}{i} = -\int_{t_0}^{t} \alpha\, dt \qquad \ln i + C_1 = -\alpha t + C_2 \qquad i = K e^{-\alpha t}$$

A solução para a corrente no indutor é: $\boxed{i = I_0\, e^{-\frac{R}{L}t}}$

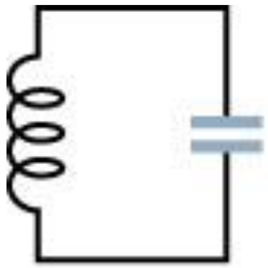
Onde I_0 é a corrente inicial no circuito

Classificação de Equações Diferenciais

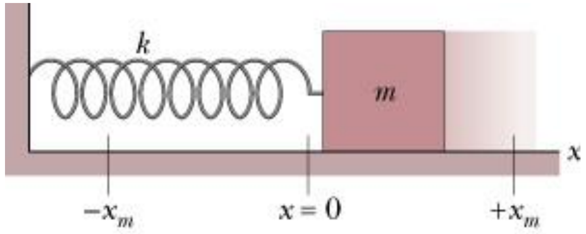
O Circuito LC

A equação é: $$L\frac{di}{dt}+\frac{q}{C}=0$$

$$\boxed{\frac{d^2q}{dt^2}+\frac{q}{LC}=0}$$

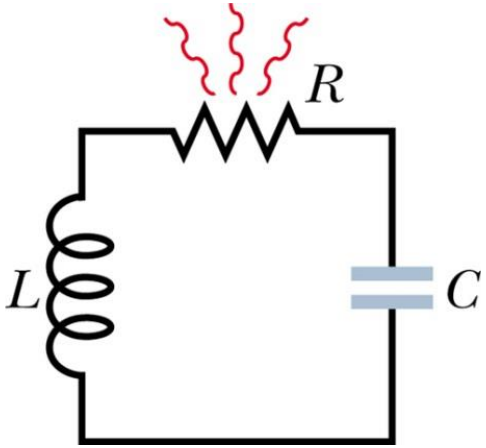


Esta equação é idêntica à do sistema massa-mola!!!



$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{k}{m}x=0}$$

O Circuito RLC



A equação é: $$L\frac{di}{dt}+Ri+\frac{q}{C}=0$$

$$\boxed{\frac{d^2q}{dt^2}+R\frac{dq}{dt}+\frac{q}{LC}=0}$$

Classificação de Equações Diferenciais

Soluções de equações diferenciais

A solução $\phi(t)$ de uma equação diferencial

$$\boldsymbol{y^n(t) = f(t, y, y^{'}, y^{''}, y^{'''}, \dots, y^{(n-1)})}$$

Satisfaz a equação

$$\boldsymbol{\phi^n(t) = f(t, y, y^{'}, y^{''}, y^{'''}, \dots, \phi^{(n-1)})}$$

Vejamos alguns exemplos. Verifique as solução a seguir para a ODE

$$y'' + y = 0; \;\; y_1(t) = \sin t, \;\; y_2(t) = -\cos t, \;\; y_3(t) = 2\sin t$$

Classificação de Equações Diferenciais

As três questões mais importantes o estudar equações diferenciais são:

1. **Existe solução?**
2. **Se ela existe, ela é a única possível?**
3. **Como encontrar essas soluções? (analítica, numérica, etc.)**

Classificação de Equações Diferenciais

Lista de exercícios disponível em:

http://www.eletrica.ufpr.br/p/professores:patricio:inicial

Disciplina TE315 (Equações Diferenciais para Engenharia Elétrica)

Gabaritos disponíveis no mesmo endereço