LISTA 01_2 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS
Soluções de algumas equações diferenciais
Respostas no final
Gabaritos na página do professor

1. Resolva cada um dos problemas de valor inicial a seguir e desenhe os gráficos das soluções para diversos valores de y_0. Observe as semelhanças e diferenças entre as soluções. (utilize algum software tipo Maple ou outro para desenhar os gráficos)

   (a) $dy/dt = -y + 5$, $y(0) = y_0$

   (b) $dy/dt = -2y + 5$, $y(0) = y_0$

   (c) $dy/dt = -2y + 10$, $y(0) = y_0$

2. Repita o Problema 1 para as equações de valor inicial a seguir:

   (a) $dy/dt = y - 5$, $y(0) = y_0$

   (b) $dy/dt = 2y - 5$, $y(0) = y_0$

   (c) $dy/dt = 2y - 10$, $y(0) = y_0$

3. Considere a equação diferencial

$$dy/dt = -ay + b,$$

em que a e b são números positivos.

   (a) Encontre a solução geral da equação diferencial.

   (b) Esboce a solução para diversas condições iniciais diferentes.

   (c) Descreva como a solução muda sob cada uma das seguintes condições:

i. a aumenta;

ii. b aumenta;

iii. Ambos a e b aumentam mas a razão b/a permanece constante.

4. Considere a equação diferencial $dy/dt = ay - b$.

   (a) Encontre a solução de equilíbrio y_e.

   (b) Seja $Y(t) = y - y_e$, de modo que $Y(t)$ é o desvio da solução de equilíbrio. Encontre a equação diferencial satisfeita por $Y(t)$.

12. Considere uma população p de ratos do campo que crescem a uma taxa proporcional à população atual, de modo que $dp/dt = rp$.

   (a) Encontre a taxa constante r se a população dobra em 30 dias.

   (b) Encontre r se a população dobra em N dias.

14. Considere um objeto em queda livre sem resistência do ar.

(a) Escreva a equação que descreve o movimento

(b) Determine quanto tempo leva para o objeto atingir o solo

(c) Determine sua velocidade no instante de impacto

15. Considere o objeto de massa 25 g em queda livre como na aula, mas suponha agora que a resistência do ar é proporcional ao quadrado da velocidade.

(a) Se a velocidade limite é 35 m/s, mostre que a equação de movimento pode ser escrita como

$$dv/dt = [(35)^2 - v^2]/125.$$

Veja também o Problema 25 da Seção 1.1.

(b) Se $v(0) = 0$, encontre uma expressão para $v(t)$ em qualquer instante.

(c) Faça o gráfico da solução encontrada em (b) e da solução do exemplo da aula no mesmo conjunto de eixos.

(d) Baseado nos gráficos encontrados em (c), compare o efeito de um coeficiente de resistência do ar quadrático com um linear.

(e) Encontre a distância $x(t)$ percorrida pelo objeto até o instante t.

(f) Encontre o tempo T que leva para o objeto cair 300 m.

16. Um material radioativo, como o isótopo tório-234, desintegra a uma taxa proporcional à quantidade presente. Se $Q(t)$ é a quantidade presente no instante t, então $dQ/dt = -rQ$, em que $r > 0$ é a taxa de decaimento.

(a)Se 100 mg de tório-234 decaem a 82,04 mg em 1 semana, determine a taxa de decaimento r.

(b)Encontre uma expressão para a quantidade de tório-234 presente em qualquer instante t.

(c)Encontre o tempo necessário para que o tório-234 decaia à metade da quantidade original.

17. A meia-vida de um material radioativo é o tempo necessário para que uma quantidade desse material decaia à metade de sua quantidade original. Mostre que, para qualquer material radioativo que decaia de acordo com a equação $Q' = -rQ$, a meia-vida τ e a taxa de decaimento r estão relacionadas pela equação $r\tau = \ln 2$.

18. O rádio-226 tem uma meia-vida de 1620 anos. Encontre o tempo necessário para que determinada quantidade desse material seja reduzida da quarta parte.

19. De acordo com a lei do resfriamento de Newton (veja o Problema 23 da lista 01.1), a temperatura $u(t)$ de um objeto satisfaz a equação diferencial

$$du/dt = -k(u-T).$$

em que T é a temperatura ambiente constante e k é uma constante positiva. Suponha que a temperatura inicial do objeto é $u(0) = u_0$.

(a) Encontre a temperatura do objeto em qualquer instante.

(b) Seja τ o instante no qual a diferença inicial de temperatura $u_0 - T$ foi reduzida pela metade. Encontre a relação entre k e τ.

20. Suponha que um prédio perde calor de acordo com a lei do resfriamento de Newton (veja o Problema 15) e que a taxa k tem valor 0,15 h^{-1}. Suponha que a temperatura no interior era de 70°F (cerca de 20°C) quando ocorreu uma falha no sistema de aquecimento. Se a temperatura externa estava em 10°F (cerca de –12°C), quanto tempo vai levar para a temperatura no interior chegar a 32°F (0°C)?

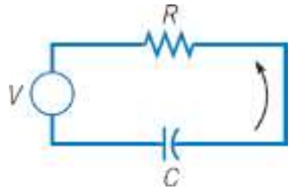
21. Considere um circuito elétrico contendo um capacitor, um resistor e uma bateria; veja a Figura. A carga Q(t) no capacitor satisfaz a equação

$$\boldsymbol{R\frac{dQ}{dt}+\frac{Q}{C}=V}$$

em que R é a resistência, C é a capacitância e V é a voltagem constante fornecida pela bateria.

(a) Se Q(0) = 0, encontre Q(t) em qualquer instante t e esboce o gráfico de Q em função de t.

(b) Encontre o valor limite Q_L para onde Q(t) tende após um longo período de tempo.



16. Suponha que Q(t1) = QL e que, no instante t = t1, a bateria é removida e o circuito é fechado novamente. Encontre Q(t) para t > t1 e esboce seu gráfico.

22. Um pequeno lago contendo 1.000.000 de galões (cerca de 4.550.000 litros) de água não contém, inicialmente, produto químico indesejável (veja o Problema 21 da Lista 01.1). O lago recebe água contendo 0,01 g/gal de um produto químico a uma taxa de 300 gal/h e a água sai do lago à mesma taxa. Suponha que o produto químico está distribuído uniformemente no lago.

(a) Seja Q(t) a quantidade de produto químico no lago no instante t. Escreva um problema de valor inicial para Q(t).

(b) Resolva o problema no item (a) para Q(t). Quanto produto químico o lago terá ao final de 1 ano?

(c) Ao final de 1 ano, a fonte do produto químico despejado no lago é retirada; a partir daí, o lago recebe água pura, e a mistura sai à mesma taxa de antes. Escreva o problema de valor inicial que descreve essa nova situação.

(d) Resolva o problema de valor inicial no item (c). Qual a quantidade de produto químico que ainda permanece no lago após mais 1 ano (2 anos após o início do problema)?

(e) Quanto tempo vai levar para que Q(t) seja igual a 10 g?

(f) Faça o gráfico de Q(t) em função de t para até 3 anos.

23. Sua piscina, contendo 60.000 galões (cerca de 273.000 litros) de água, foi contaminada por 5 kg de uma tinta não tóxica que deixa a pele de um nadador com uma cor verde, nada atraente. O sistema de filtragem da piscina pode retirar a água, remover a tinta e devolver a água para a piscina a uma taxa de 200 gal/min.

    (a) Escreva o problema de valor inicial para o processo de filtragem; seja q(t) a quantidade de tinta na piscina em qualquer instante t.

    (b) Resolva o problema encontrado em (a).

    (c) Você convidou diversas dúzias de amigos para uma festa em torno da piscina que está marcada para começar em 4 horas. Você já verificou que o efeito da tinta é imperceptível se a concentração é menor do que 0,02 g/gal. Seu sistema de filtragem é capaz de reduzir a concentração de tinta a esse nível dentro de 4 horas?

    (d) Encontre o instante T em que a concentração de tinta alcança, pela primeira vez, o valor de 0,02 g/gal.

    (d) Encontre a taxa do fluxo de água que é suficiente para obter a concentração de 0,02 g/gal dentro de 4 horas.

Respostas

1.

(a) $y = 5 + (y_0 - 5)\, e^{-t}$

(b) $y = (5/2) + [\, y_0 - (5/2)]e^{-2t}$

(c) $y = 5 + (y_0 - 5)e^{-2t}$

A solução de equilíbrio é y = 5 em (a) e (c), y = 5/2 em (b); a solução tende ao equilíbrio mais depressa em (b) e (c) do que em (a).

2.

(a) $y = 5 + (y_0 – 5)\, e^{t}$

(b) $y = (5/2) + [\, y_0 – (5/2)]\, e^{2t}$

(c) $y = 5 + (y_0 – 5)\, e^{2t}$

A solução de equilíbrio é y = 5 em (a) e (c), y = 5/2 em (b); a solução se afasta do equilíbrio mais depressa em (b) e (c) do que em (a).

3.

(a) $y = ce^{-at} + (b/a)$

(b)

(i) O equilíbrio é mais baixo e é aproximado mais rapidamente

(ii) O equilíbrio é mais alto

(iii) O equilíbrio permanece o mesmo e é aproximado mais rapidamente.

4. (a) $y_e = b/a$

(b) $Y' = aY$

12.(a) r = (ln 2)/30 dia−1

(b)r = (ln 2)/N dia−1

14.(a) dv/ dt = 9,8, v(0) = 0

(b)T=7,82 s

(c)v ≅ 76,68 m/s

15.

(b) v(t) = 35 tanh(7t / 25) m/s

(e)x = 125 ln cosh(7t/25) m

(f)T ≅ 11,04 s

16.(a) $r \cong 0{,}02828\ \text{dia}^{-1}$

(b)$Q(t) = 100e^{-0{,}02828t}$

(c)$T \cong 24{,}5$ d

18.1620 $\ln(4/3)/\ln 2 \cong 672{,}4$ anos

19.(a) $u = T + (u_0 - T)\, e^{-kt}$

(b)$k\tau = \ln 2$

20.t=6,69 h

21.(a) $Q(t) = CV(1 - e^{-t/RC})$

(b)$Q(t) \rightarrow CV = Q_L$

(c)$Q(t) = CV \exp[-(t - t_1)/RC]$

22.(a) $Q' = 3(1 - 10^{-4}Q)$, $Q(0) = 0$

(b)$Q(t) = 10^4(1 - e^{-3t}/10^4)$, t em h; depois de 1 ano $Q \cong 9277{,}77$ g

(c)$Q' = -3Q/10^4$, $Q(0) = 9277{,}77$

(d)$Q(t) = 9277{,}77e^{-3t/104}$, t em h; depois de 1 ano $Q \cong 670{,}07$ g

(e)$T \cong 2{,}60$ anos

23.(a) $q = -q/300$, $q(0) = 5000$ g

(b)$q(t) = 5000e^{-t/300}$

(c)não

(d)$T = 300 \ln(25/6) \cong 428{,}13$ min $\cong 7{,}136$ h

(e)$r = 250 \ln(25/6) \cong 356{,}78$ gal/min