ALGEBRA LINEAR

Prof. Dr. Patricio R. Impinnisi

Aula 7

Equações diferencias e e^{At}

Equações diferenciais

Vamos ver como resolver equações diferenciais lineares de primeira ordem com coeficientes constantes...

$$\frac{du}{dt} = Au$$

Sabemos que as soluções destas equações são funções exponenciais *u(t)* = $e^{At}u_0$

Vai ser parecido com encontrar as potencias A^k de matrizes...mas agora serão exponenciais e^{At}

Vamos ver um exemplo

Como resolver:

$$\frac{du_1}{dt} = -\,u_1 + 2\,u_2$$

$$u_2$$

$$\frac{du_2}{dt} = u_1 - 2\,u_2$$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

com as condições iniciais: $u_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

Vamos começar calculando os autovalores e as autofunções da matriz A...

Equações diferenciais

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

A matriz A é singular (a segunda coluna é -2 vezes a primeira) e seus autovalores são (a partir do polinômio característico que sai de calcular o determinante):

$$|A - \lambda I| = \begin{bmatrix} -1-\lambda & 2 \\ 1 & -2-\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 + 3\lambda = \lambda\,(\lambda + 3) = 0$$

de onde λ_1=0 (pois a matriz original já é singular sem adicionar nada) e λ_2=-3 (pelo traço de A)

Os autovetores serão os x que dão Ax=λx e saem da equação:

1º autovetor

$$A - \lambda_1 I = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{1,1} \\ x_{1,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A - \lambda_1 I = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

2º autovetor

$$A - \lambda_2 I = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{2,1} \\ x_{2,2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$A - \lambda_2 I = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

A solução geral desta equações é uma CL: $u(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} x_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} x_2$

Equações diferenciais

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

As constantes c_1 e c_2 saem das condições iniciais (duas incógnitas e duas equações)...

$$u(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = C_1 1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + C_2 e^{-3t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

de onde $c_1 = 1/3$ e $c_2 = 1/3$ saem das condições iniciais (duas incógnitas e duas equações)...

$$u(t) = \frac{1}{3} 1 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{3} e^{-3t} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

No estado estacionário (neste caso para $\lambda=0$) teremos...

$$u(t) = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Como ficou a estabilidade destas equações exponenciais?

Equações diferenciais

A estabilidade das soluções neste caso (e^{At}) será:

1. Estável se todos os autovalores satisfizerem Re $\lambda_i < 0$ (a solução tende a zero!)
2. Estacionário se algum $\lambda_1 = 0$ e todos os outros Re $\lambda_i < 0$
3. E instável se pelo menos um autovalor possuir Re $\lambda_i > 0$

No caso da estabilidade de matrizes 2x2 (só nesse caso) se cumpre que para uma matriz qualquer ser estável (caso 1):

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

o traço será a+d = $\lambda_1 + \lambda_2 < 0$ (se houver parte imaginaria elas se cancelam por serem conjugadas)

Isso não é suficiente...ter traço negativo...(a soma pode ser negativa e um dos termos ser positivo)...a outra condição é:

O produto (ou determinante) ser positivo $\lambda_1 \lambda_2 > 0$

Equações diferenciais

Nos resolvemos nosso sistema encontrando os autovalores, logo os autovetores e logo os coeficientes... estes coeficientes foram encontrados a partir das equações

$$u(0) = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = c_1 1 \begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix} + c_2 e^{-3t} \begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}$$

Que de fato são o resultado de utilizar uma matriz já conhecida...

$$\begin{bmatrix}? & ?\\? & ?\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\\c_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$$

Comparando as expressões vemos que a matriz é a matriz S formada pelo autovetores de A

$$\begin{bmatrix}2 & 1\\1 & -1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c_1\\c_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$$

$$Sc = u_0$$

Vamos agora retornar a nossa equação diferencial: $\frac{du}{dt} = Au$

Equações diferenciais

$$\frac{du}{dt} = Au$$

Quando diagonalizamos uma matriz A desacoplamos as equações que formam esse sistema...e tornamos a solução muito mais simples

Os elementos dessa matriz A acoplam as soluções puras umas com as outras através dos elementos não diagonais...

Por isso o primeiro que fazemos (utilizando os autovalores) é desacoplar a matriz A...

Para desacoplar reescrevemos u como u = Sv (uma CL dada por v dos autovetores de A) o que se obtêm a partir da equação inicial substituindo u...

$$\frac{du}{dt} = Au \qquad S\frac{dv}{dt} = ASv \qquad \frac{dv}{dt} = S^{-1}ASv = \Lambda v$$

Assim obtemos um sistema de equações diagonalizado ou seja, desacoplado e fácil de resolver...este novo sistema (diagonalizado) é:

$$\frac{dv_1}{dt} = \lambda_1 v_1 \qquad \frac{dv_2}{dt} = \lambda_2 v_2 \qquad \ldots \qquad \frac{dv_n}{dt} = \lambda_n v_n$$

A solução será... $v(t) = e^{\Lambda t} v(0)$ e $u(t)$ será $u(t) = Sv(t) = S\, e^{\Lambda t} S^{-1} u(0)$

Equações diferenciais

$$\frac{du}{dt} = Au$$

Esta solução é o exponente ...ou seja u(t) = e^{At} u(0) = S $e^{\Lambda t}$ S^{-1} u(0)

Ou seja $e^{At} = Se^{\Lambda t}S^{-1}$

Para utilizar este procedimento precisamos definir o que significa e^A

A definição de e^A utiliza a séries de Taylor (como no caso de e^x só que agora x é At)

$$e^x \equiv 1 + x + \frac{(x)^2}{2} + \frac{(x)^3}{6} + \cdots + \frac{(x)^n}{n!} + \cdots = \sum_0^\infty \frac{x^n}{n!}$$

$$e^{At} \equiv I + At + \frac{(At)^2}{2} + \frac{(At)^3}{6} + \cdots + \frac{(At)^n}{n!} + \cdots$$

A outra série de Taylor útil para nosso desenvolvimento é:

$$\frac{1}{1-x} \equiv 1 + x + (x)^2 + (x)^3 + \cdots + (x)^n + \cdots = \sum_0^\infty x^n$$

Pois serve para:

$$(I - At)^{-1} \equiv I + At + (At)^2 + (At)^3 + \cdots += \sum_0^\infty At^n$$

Equações diferenciais

Agora que sabemos o que é e^{At} vamos verificar que $e^{At} = Se^{\Lambda t}S^{-1}$ ...

Nosso interesse é poder calcular e^{At} por meio de S e Λ pois é mais fácil

Como vamos obter S e Λ?

Vamos utilizar a definição $$e^{At} \equiv I + At + \frac{(At)^2}{2} + \frac{(At)^3}{6} + \cdots + \frac{(At)^n}{n!} + \cdots \qquad (1)$$

E a diagonalização de A que já vimos A = $S\Lambda S^{-1}$ desta forma teremos (como $I=SS^{-1}$):

$$e^{At} = SS^{-1} + S\Lambda S^{-1}t + \frac{S\Lambda^2 S^{-1}t^2}{2} + \frac{S\Lambda^3 S^{-1}t^3}{6} + \cdots + \frac{S\Lambda^n S^{-1}t^n}{n!} + \cdots = S\,?\,S^{-1} =$$

$$e^{At} = SS^{-1} + S\Lambda S^{-1}t + \frac{S\Lambda^2 S^{-1}t^2}{2} + \frac{S\Lambda^3 S^{-1}t^3}{6} + \cdots + \frac{S\Lambda^n S^{-1}t^n}{n!} + \cdots = Se^{\Lambda t}S^{-1} \qquad (2)$$

A equação (1) sempre converge pois n! sempre é maior (At é uma constante para cada tempo t)

A equação (2) só funciona se A puder ser diagonalizada (se tiver n autovetores independentes)

Equações diferenciais

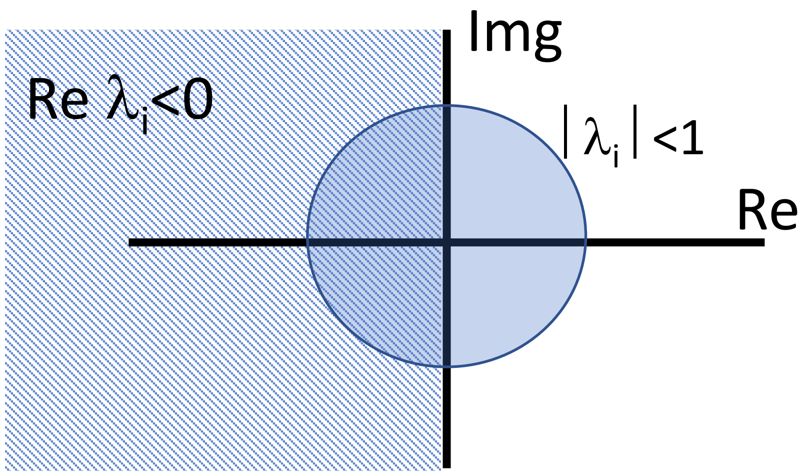
O que é explicitamente $e^{\Lambda t}$?

Lembrando que $\Lambda \equiv \begin{bmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}$ $\rightarrow$ $e^{\Lambda t} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1 t} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & e^{\lambda_n t} \end{bmatrix}$ (3)

Quando e^{At} tende a zero? $$e^{At} \equiv I + At + \frac{(At)^2}{2} + \frac{(At)^3}{6} + \cdots + \frac{(At)^n}{n!} + \cdots \quad (1)$$

Pela relação (2) vemos e^{At} tende a zero quando $e^{\Lambda t}$ tende a zero $$e^{At} = S e^{\Lambda t} S^{-1} \quad (2)$$

O que implica que cada um dos λ_i da equação (3) devem ter Re $\lambda_i<0$



As regiões de estabilidade para as exponenciais e as potências são apresentadas na figura...

Equações diferenciais

EXEMPLO 1

Vamos ver como lidar com equações de ordens superiores a 1...
Vamos supor a equação y´´+ b y´+ k y = 0
Para transformar em equações de 1 ordem vamos definir um vetor $u \equiv \begin{bmatrix} y' \\ y \end{bmatrix}$

Portanto teremos que $u' = \begin{bmatrix} y'' \\ y' \end{bmatrix}$

E como montamos agora o sistema de equações original utilizando o vetor u?

$$u' = \begin{bmatrix} y'' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ? & ? \\ ? & ? \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y' \\ y \end{bmatrix}$$

Qual é a matriz A?

$$u' = \begin{bmatrix} y'' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -b & -k \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y' \\ y \end{bmatrix}$$

y´´+ b y´+ k y = 0
y´ = y´

E se tivermos uma equação de 5 ordem?

Equações diferenciais

EXEMPLO 2 Vamos supor a equação y’’’’’+ a y’’’’+ b y’’’+ c y´´ + d y´+ e y = 0

Definimos o vetor u
$$u \equiv \begin{bmatrix} y'''' \\ y''' \\ y'' \\ y' \\ y \end{bmatrix}$$

Portanto teremos que
$$u' = \begin{bmatrix} y''''' \\ y'''' \\ y''' \\ y'' \\ y' \end{bmatrix}$$

Assim se transforma em 5 equações de primeira ordem, com a primeira linha sendo dada pela equação original e as outras 4 são as triviais y’=y’; y’’=y’’, etc.

$$u' = Au = \begin{bmatrix} -a & -b & -c & -d & -e \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y'''' \\ y''' \\ y'' \\ y' \\ y \end{bmatrix}$$

Exercícios

Livro Álgebra Linear e suas aplicações. Gilbert Strang. 4 edição

Página 275

Conjunto de problemas 5.4

Resolver: 1; 3; 4; 6; 8; 18; 20; 22; 25; 32; 36; 38; 39; 42