Conjunto de problemas 5.2

1. Se uma matriz triangular superior 3 por 3 possui elementos diagonais 1, 2, 7, como é possível saber se ela pode ser diagonalizada? Qual é Λ?

2. (a) Se $A^2 = I$, quais são os possíveis autovalores de A?
(b) Se essa matriz A for 2 por 2, e não I ou $-I$, encontre seu traço e seu determinante.
(c) Se a primeira linha for $(3, -1)$, qual será a segunda linha?

3. Fatore as seguintes matrizes em $S\Lambda S^{-1}$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

4. Se $A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, encontre A^{100} diagonalizando A.

5. Encontre a matriz A cujos autovalores sejam 1 e 4 e os autovetores sejam $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, respectivamente. (*Dica*: $A = S\Lambda S^{-1}$.)

6. Encontre *todos* os autovalores e os autovetores de

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

e apresente duas matrizes de diagonalização diferentes S.

7. Suponha que $A = uv^{\mathrm{T}}$ seja uma coluna multiplicada por uma linha (uma matriz de posto 1).
(a) Multiplicando-se A vezes u, mostre que u é um autovetor. Qual é o valor de λ?
(b) Quais são os outros autovalores de A? Justifique sua resposta.
(c) Calcule o traço (A) a partir da soma da diagonal e da soma dos valores de λs.

8. Quais dessas matrizes não podem ser diagonalizadas?

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \qquad A_3 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

9. Suponha que A possua autovalores 1, 2, 4. Qual é o traço de A^2? Qual é o determinante de $(A^{-1})^{\mathrm{T}}$?

10. Suponha que as matrizes de autovetores S possua $S^{\mathrm{T}} = S^{-1}$. Mostre que $A = S\Lambda S^{-1}$ é simétrica e possui autovetores ortogonais.

11. Diagonalize a matriz $A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$ e encontre uma de suas raízes quadradas – uma matriz, tal que $R^2 = A$. Quantas raízes quadradas há nesta matriz?

12. Se os autovalores de A são 1, 1, 2, quais das seguintes alternativas são verdadeiras? Se a alternativa for verdadeira, justifique; se for falsa, dê um contraexemplo.
(a) A é invertível.
(b) A é diagonalizável.
(c) A não é diagonalizável.

13. Mostre, calculando diretamente, que AB e BA possuem o mesmo traço quando:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} q & r \\ s & t \end{bmatrix}.$$

Deduza que $AB - BA = I$ é impossível (exceto em dimensão infinita).

14. Suponha que os únicos autovetores de A sejam múltiplos de $x = (1, 0, 0)$. Verdadeiro ou falso:
(a) A não é invertível.
(b) A possui um autovalor repetido.
(c) A não é diagonalizável.

Os problemas 15 a 25 abordam matrizes de autovalores e de autovetores.

15. Se A possui $\lambda_1 = 2$ com autovetor $x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ e $\lambda_2 = 5$ com $x_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, utilize $S\Lambda S^{-1}$ para encontrar A. Nenhuma outra matriz possui os mesmos λ's e x's.

16. Fatore as duas matrizes abaixo em $A = S\Lambda S^{-1}$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

17. Verdadeiro ou falso? Se as n colunas de S (autovetores de A) são independentes, então:

(a) A é invertível.

(b) A é diagonalizável.

(c) S é invertível.

(d) S é diagonalizável.

18. Se os autovetores de A são as colunas de I, então A é uma matriz _______. Se a matriz de autovetores S é triangular, então S^{-1} é triangular e A é triangular.

19. Suponha que $A = S\Lambda S^{-1}$. Qual é a matriz de autovalores de $A + 2I$? Qual é a matriz de autovetores? Verifique se $A + 2I = (\ )(\ )(\ )^{-1}$.

20. Se $A = S\Lambda S^{-1}$, então $A^3 = (\ )(\ )(\ )$ e $A^{-1} = (\ )(\ )(\ )$.

21. Apresente a matriz mais geral que possua autovetores $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

22. Encontre os autovalores de A, B, AB e BA:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad AB = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad BA = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Os autovalores de AB (são iguais aos) (não são iguais aos) autovalores de A multiplicados pelos autovalores de B. Os autovalores de AB (são) (não são) iguais aos autovalores de BA.

23. Descreva todas as matrizes S que diagonalizam a seguinte matriz A:

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Em seguida, descreva todas as matrizes que diagonalizam A^{-1}.

24. Encontre os autovalores de A, B e $A + B$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad A + B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Os autovalores de $A + B$ (são iguais aos) (não são iguais aos) autovalores de A mais os autovalores de B.

Os problemas 25 a 28 abordam a diagonalizabilidade de A.

25. Se os autovalores de A forem 1 e 0, mostre tudo o que é possível saber sobre as matrizes A e A^2.

26. A matriz $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ não é diagonalizável, pois o posto de $A - 3I$ é ____. Altere um elemento para tornar A diagonalizável. Que elementos você poderia alterar?

27. Verdadeiro ou falso? Se os autovalores de A são 2, 2, 5, então a matriz certamente é:

(a) invertível.

(b) diagonalizável.

(b) não diagonalizável.

28. Complete as matrizes abaixo de modo que det $A = 25$. Então, traço $= 10$, e $\lambda = 5$ seja repetido! Encontre um autovetor com $Ax = 5x$. Essas matrizes não serão diagonalizáveis, pois não há uma segunda linha de autovetores.

$$A = \begin{bmatrix} 8 & \\ & 2 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 9 & 4 \\ & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{bmatrix} 10 & 5 \\ -5 & \end{bmatrix}.$$

Os problemas 29 a 33 abordam potências de matrizes.

29. (Recomendado) Encontre Λ e S para diagonalizar A no problema 30. Qual é o limite de Λ^k quando $k \to \infty$? Qual é o limite de $S\Lambda^k S^{-1}$? Nas colunas desta matriz de limite, é possível visualizar ________.

30. $A^k = S\Lambda^k S^{-1}$ tende à matriz nula como $k \to \infty$ se, e somente se, todo λ possuir valor absoluto menor que ____. Neste caso, $A^k \to 0$ ou $B^k \to 0$?

$$A = \begin{bmatrix} 0{,}6 & 0{,}4 \\ 0{,}4 & 0{,}6 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 0{,}6 & 0{,}9 \\ 0{,}1 & 0{,}6 \end{bmatrix}.$$

31. Diagonalize A e calcule $S\Lambda^k S^{-1}$ para provar esta fórmula para A^k:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{possui} \quad A^k = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3^k + 1 & 3^k - 1 \\ 3^k - 1 & 3^k + 1 \end{bmatrix}.$$

32. Diagonalize B e calcule $S\Lambda^k S^{-1}$ para provar esta fórmula para B^k:

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{possui} \quad B^k = \begin{bmatrix} 3^k & 3^k - 2 \\ 0 & 2^k \end{bmatrix}.$$

33. Encontre Λ e S para diagonalizar B no problema 30. Quanto é $B^{10}u_0$ para esses vetores u_0?

$$u_0 = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad u_0 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \text{e} \quad u_0 = \begin{bmatrix} 6 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Os problemas 34 a 45 mostram novas aplicações de $A = S\Lambda S^{-1}$.

34. Se $A = S\Lambda S^{-1}$, diagonalize a matriz de bloco $B = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 2A \end{bmatrix}$. Encontre suas matrizes de autovalores e autovetores.

35. Teste o Teorema de Cayley-Hamilton sobre matriz de Fibonacci $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$. O teorema prevê que $A^2 - A - I = 0$, já que det $(A - \lambda I)$ é $\lambda^2 - \lambda - 1$.

36. Suponha que $A = S\Lambda S^{-1}$. Empregue os determinantes para provar que det $A = \lambda_1 \lambda_2 \ldots \lambda_n =$ produto dos valores de λ's. Esta prova rápida só funciona quando A é ________.

37. Se $A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & d \end{bmatrix}$, então det $(A - \lambda I)$ é $(\lambda - a)(\lambda - d)$. Verifique a afirmação de Cayley-Hamilton quanto a $(A - aI)(A - dI) =$ *matriz nula*.

38. Substitua $A = S\Lambda S^{-1}$ na equação $(A - \lambda_1 I)\,(A - \lambda_2 I) \cdots (A - \lambda_n I)$ e explique por que isto gera a *matriz nula*. Estamos substituindo a matriz A pelo número λ no polinômio $p(\lambda) = \det\,(A - \lambda I)$. O ***Teorema de Cayley-Hamilton*** afirma que este produto é sempre $p\,(A) =$ *matriz nula*, mesmo que A não seja diagonalizável.

39. O traço de S multiplicado por ΛS^{-1} iguala o traço de ΛS^{-1} multiplicado por S. Assim, o traço de uma matriz diagonalizável A iguala o traço de Λ, que é ________.

40. Suponha que $Ax = \lambda x$. Se $\lambda = 0$, então x está no espaço nulo. Se $\lambda \neq 0$, então x está no espaço-coluna. Esses espaços possuem dimensões $(n - r) + r = n$. Então, por que nem toda matriz quadrada possui n autovetores linearmente independentes?

41. Considere todas as matrizes A 4 por 4 que são diagonalizadas pela mesma matriz fixa de autovetores. Mostre que as matrizes A formam um subespaço (cA e $A_1 + A_2$ possuem esse mesmo S). Qual é o subespaço quando $S = I$? Qual é sua dimensão?

42. Suponha que $A^2 = A$. No lado esquerdo, A multiplica todas as colunas de A. Qual dos nossos quatro subespaços contém autovetores com $\lambda = 1$? Qual subespaço contém autovetores com $\lambda = 0$? A partir das dimensões desses subespaços, A possui um conjunto completo de autovetores independentes e pode ser diagonalizada.

43. Se $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ e $AB = BA$, mostre que $B = \begin{bmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} \\ \mathbf{c} & \mathbf{d} \end{bmatrix}$ também é diagonal. B possui os mesmos auto ________ de A, mas diferentes auto ________. Essas matrizes diagonais B formam um subespaço bidimensional do espaço matricial. $AB - BA = 0$ fornece quatro equações para as incógnitas **a**, **b**, **c** e **d** – encontre o posto da matriz 4 por 4.

44. Encontre os autovalores e autovetores de ambas as matrizes de Markov A e A^∞ abaixo. Explique por que A^{100} está próxima de A^∞:

$$A = \begin{bmatrix} 0{,}6 & 0{,}2 \\ 0{,}4 & 0{,}8 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A^\infty = \begin{bmatrix} 1/3 & 1/3 \\ 2/3 & 2/3 \end{bmatrix}.$$

45. Se A for 5 por 5, então $AB - BA =$ matriz nula fornece 25 equações para os 25 elementos de B. Mostre que a matriz 25 por 25 é singular exibindo uma solução não nula B.