Conjunto de problemas 3.3

1. Resolva $Ax = b$ utilizando os mínimos quadrados, depois encontre $p = A\hat{x}$ se

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Certifique-se de que o erro $b - p$ seja perpendicular às colunas de A.

2. Escreva $E^2 = \|Ax - b\|^2$ e defina como zero suas derivadas em relação a u e v, se

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad x = \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Compare as equações resultantes com $A^{\mathrm{T}}A\hat{x} = A^{\mathrm{T}}b$, confirmando que tanto o cálculo quanto a geometria fornecem as equações normais. Encontre a solução $\hat{x}$ e a projeção $p = A\hat{x}$. Por que $p = b$?

3. Consideremos que os valores $b_1 = 1$ e $b_2 = 7$ multiplicados por $t_1 = 1$ e $t_2 = 2$ são representados por uma reta $b = Dt$ *que passa pela origem*. Resolva $D = 1$ e $2D = 7$ por meio dos mínimos quadrados e depois esboce a melhor reta.

4. O sistema abaixo não tem solução:

$$Ax = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C \\ D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ 9 \end{bmatrix} = b.$$

Esboce e encontre uma reta que leva à minimização da soma dos quadrados $(C - D - 4)^2 + (C - 5)^2 + (C + D - 9)^2$. Qual é a projeção de b no espaço-coluna de A?

5. Encontre a melhor solução com mínimos quadrados $\hat{x}$ para $3x = 10$, $4x = 5$. Qual erro E^2 está minimizado? Certifique-se de que o vetor de erro $(10 - 3\hat{x}, 5 - 4\hat{x})$ seja perpendicular à coluna $(3, 4)$.

6. Encontre a projeção de b no espaço-coluna de A:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}, \qquad b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

Desmembre b em $p + q$, com p no espaço-coluna e q perpendicular àquele espaço. Dos quatro subespaços, qual contém q?

7. Se os vetores a_1, a_2 e b são ortogonais, o que são $A^{\mathrm{T}}A$ e $A^{\mathrm{T}}b$? Qual é a projeção de b no plano de a_1 e a_2?

8. Sendo P a matriz de projeção sobre uma reta no plano xy, desenhe uma figura para descrever o efeito da "matriz de reflexão" $H = I - 2P$. Explique, tanto geométrica quanto algebricamente por que $H^2 = I$.

9. Encontre a melhor representação com linha reta (mínimos quadrados) para as medidas:

$$\begin{array}{llllll} b=4 & \text{em} & t=-2, & b=3 & \text{em} & t=-1, \\ b=1 & \text{em} & t=0, & b=0 & \text{em} & t=2. \end{array}$$

Depois, encontre a projeção de $b = (4, 3, 1, 0)$ no espaço-coluna de:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

10. (a) Sendo $P = P^{\mathrm{T}}P$, demonstre que P é uma matriz de projeção.

(b) Em qual subespaço a matriz $P = 0$ se projeta?

11. Os vetores $a_1 = (1, 1, 0)$ e $a_2 = (1, 1, 1)$ geram um plano em $\mathbf{R}^3$. Encontre a matriz de projeção P no plano e depois descubra um vetor b não nulo projetado a zero.

12. Encontre a matriz de projeção P no espaço gerado por $a_1 = (1, 0, 1)$ e $a_2 = (1, 1, -1)$.

13. Qual matriz 2 por 2 projeta o plano xy na reta $-45°\ x + y = 0$?

14. Demonstre que, se u possui módulo unitário, a matriz $P = uu^{\mathrm{T}}$ de posto 1 é uma matriz de projeção: ela possui propriedades (i) e (ii) em 3N. Ao escolher $u = a/\|a\|$, P se torna a projeção na reta que passa em a, e Pb é o ponto $p = \hat{x}a$. As projeções de posto 1 correspondem exatamente aos problemas com mínimos quadrados em uma incógnita.

15. Sendo $\mathbf{V}$ o subespaço gerado por $(1, 1, 0, 1)$ e $(0, 0, 1, 0)$, encontre:

(a) uma base para o complemento ortogonal $\mathbf{V}^{\perp}$.

(b) a matriz de projeção P em $\mathbf{V}$.

(c) o vetor em $\mathbf{V}$ mais próximo do vetor $b = (0, 1, 0, -1)$ em $\mathbf{V}^{\perp}$.

16. Sendo P a matriz de projeção em um subespaço $\mathbf{S}$ de dimensão k de $\mathbf{R}^n$, qual é o espaço--coluna de P e qual é o seu posto?

17. Seja P a matriz de projeção no subespaço $\mathbf{S}$ e Q a projeção no complemento ortogonal $\mathbf{S}^{\perp}$. O que serão $P + Q$ e PQ? Demonstre que $P - Q$ é sua própria inversa.

18. Queremos ajustar um plano $y = C + Dt + Ez$ aos quatro pontos:

$$\begin{array}{llllll} y=3 & \text{em} & t=1, z=1 & y=6 & \text{em} & t=0, z=3 \\ y=5 & \text{em} & t=2, z=1 & y=0 & \text{em} & t=0, z=0. \end{array}$$

(a) Encontre 4 equações em 3 incógnitas para passar um plano pelos pontos (se houver tal plano)

(b) Encontre 3 equações em 3 incógnitas para a melhor solução com mínimos quadrados.

19. Supondo que L_1 seja a reta que passa pela origem na direção de a_1, e L_2 seja a reta que passa por b na direção de a_2. A fim de encontrar os pontos $x_1 a_1$ e $b + x_2 a_2$ mais próximos nas duas retas, encontre as duas equações para x_1 e x_2 que minimizem $\|x_1 a_1 - x_2 a_2 - b\|$. Resolva x se $a_1 = (1, 1, 0)$, $a_2 = (0, 1, 0)$, $b = (2, 1, 4)$.

20. Demonstre que a melhor representação de mínimos quadrados para um conjunto de medidas $y_1, \ldots, y_m$ por uma *reta horizontal* (uma função constante $y = C$) é sua média

$$C = \frac{y_1 + \cdots + y_m}{m}.$$

21. Vamos supor que, em vez de usar uma linha reta, representemos os dados no problema 23 com uma parábola: $y = C + Dt + Et^2$. No sistema inconsistente $Ax = b$ que surge dos quatro pontos, descubra qual é a matriz de coeficiente A, o vetor incógnita x e o vetor de dados b. Não é necessário calcular $\hat{x}$.

22. Sendo P a projeção no espaço-coluna de A, qual é a projeção no espaço nulo à esquerda?

23. Encontre a reta que melhor representa as seguintes medidas e esboce sua solução:

$$\begin{array}{llllll} y = 2 & \text{em} & t = -1, & y = 0 & \text{em} & t = 0, \\ y = -3 & \text{em} & t = 1, & y = -5 & \text{em} & t = 2. \end{array}$$

24. Um homem de meia-idade esticou-se em uma prateleira de comprimentos $L = 5$, 6 e 7 pés sob forças aplicadas de $F = 1$, 2 e 4 toneladas. Utilizando a lei de Hooke $L = a + bF$, descubra seu comprimento normal a utilizando mínimos quadrados.

25. Sendo $Pc = A(A^{\mathrm{T}}A)^{-1} A^{\mathrm{T}}$ a projeção no espaço-coluna de A, qual é a projeção P_R no espaço-linha (não é P_C^{T}!)?

26. Encontre a reta $C + Dt$ que melhor representa $b = 4, 2, -1, 0, 0$ com $t = -2, -1, 0, 1, 2$.

Os problemas 27 a 31 apresentam ideias básicas sobre a estatística – a base dos mínimos quadrados.

27. Segunda afirmação por trás dos mínimos quadrados: Os m erros e_i são independentes com variância σ^2, de forma que a média de $(b - Ax)(b - Ax)^{\mathrm{T}}$ é $\sigma^2 I$. Multiplique na esquerda por $(A^{\mathrm{T}}A)^{-1} A^{\mathrm{T}}$ e na direita por $A(A^{\mathrm{T}}A)^{-1}$ a fim de demonstrar que a média de $(\hat{x} - x)(\hat{x} - x)^{\mathrm{T}}$ é $\sigma^2 (A^{\mathrm{T}}A)^{-1}$. Esta é a importantíssima ***matriz de covariância*** do erro em $\hat{x}$.

28. (Recomendado) Este problema projeta $b = (b_1, \ldots, b_m)$ na reta que passa por $a = (1, \ldots, 1)$. Resolvemos m equações $ax = b$ em uma incógnita (por meio dos mínimos quadrados).

(a) Resolva $a^{\mathrm{T}} a\hat{x} = a^{\mathrm{T}} b$ a fim de demonstrar que $\hat{x}$ é a *média* (a média aritmética) dos bs.

(b) Encontre $e = b - a\hat{x}$, a *variância* $\|e\|^2$ e o *desvio padrão* $\|e\|$.

(c) A reta horizontal $\hat{b} = 3$ é a mais próxima de $b = (1, 2, 6)$. Certifique-se de que $p = (3, 3, 3)$ seja perpendicular a e e encontre a matriz de projeção P.

29. Primeira afirmação por trás dos mínimos quadrados: Cada erro de medição possui ***média zero***. Multiplique os 8 vetores erro $b - Ax = (\pm 1, \pm 1, \pm 1)$ por $(A^{\mathrm{T}}A)^{-1} A^{\mathrm{T}}$ a fim de demonstrar que os 8 vetores $\hat{x} - x$ também resultam em zero. O $\hat{x}$ estimado é *imparcial*.

30. Sabendo-se a média $\hat{x}_9$ de 9 números $b_1, \ldots, b_9$, qual é a maneira mais rápida de se encontrar a média $\hat{x}_{10}$ com mais um número b_{10}? A ideia dos mínimos quadrados recursivos é evitar a soma de 10 números. Qual coeficiente de $\hat{x}_9$ fornece corretamente $\hat{x}_{10}$?

$$\hat{x}_{10} = \tfrac{1}{10} b_{10} + \_\_ \hat{x}_9 = \tfrac{1}{10}(b_1 + \cdots + b_{10}).$$

31. Um doutor faz quatro registros de sua frequência cardíaca. A melhor solução para $x = b_1$, $\ldots, x = b_4$ é a média $\hat{x}$ de $b_1, \ldots, b_4$. A matriz A é uma coluna de números 1. O problema 27 fornece o erro esperado $(\hat{x} - x)^2$ como $\sigma^2(A^T A)^{-1} =$ ________. Ao se calcular a média, a variância cai de σ^2 para $\sigma^2/4$.

Os problemas 33, 34 e 38 a 40 utilizam os quatro pontos $b = (0, 8, 8, 20)$ para apresentar novas ideias.

32. Partindo de m medições independentes $b_1, \ldots, b_m$ de sua frequência de pulso, ponderadas por $w_1, \ldots, w_m$, qual é a média ponderada que substitui a equação (9)? Ela será o melhor valor estimado quando as variâncias de estatística forem $\sigma_i^2 = 1/w_i^2$.

33. Escreva as quatro equações $Ax = b$ para a expressão cúbica $b = C + Dt + Et^2 + Ft^3$ mais próxima dos mesmos quatro pontos, resolvendo-as por eliminação. Esta expressão cúbica passa agora exatamente pelos pontos. O que são p e e?

34. (A reta $C + Dt$ realmente passa pelos p's) Com $b = 0, 8, 8, 20$ em $t = 0, 1, 3, 4$, escreva as quatro equações $Ax = b$ (insolúveis). Modifique as medições para $p = 1, 5, 13, 17$ e encontre uma solução exata para $A\hat{x} = p$.

35. Sendo $W = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, encontre o W-ponto escalar de $x = (2, 3)$ e $y = (1, 1)$, além do W-módulo de x. Qual reta é W-perpendicular à reta por y?

36. O que acontece com a média ponderada $\hat{x}_w = (w_1^2 b_1 + w_2^2 b_2)/(w_1^2 + w_2^2)$ se a primeira ponderada w_1 se aproximar de zero? A medição b_1 definitivamente não é confiável.

37. Certifique-se de que $e = b - p = (-1, 3, -5, 3)$ seja perpendicular a ambas as colunas de A. Qual é a menor distância $\|e\|$ de b até o espaço-coluna de A?

38. Escreva as equações insolúveis $Ax = b$ em três incógnitas $x = (C, D, E)$ para a parábola $b = C + Dt + Et^2$ mais próxima dos mesmos quatro pontos. Monte as três equações normais $A^T A\hat{x} = A^T b$ (a solução não é necessária). Agora, você está adequando uma parábola aos quatro pontos. O que está acontecendo na Figura 3.9b?

39. Com $b = 0, 8, 8, 20$ em $t = 0, 1, 3, 4$, monte e solucione as equações normais $A^T A\hat{x} = A^T b$. Como na Figura 3.9a, encontre os quatro pontos p_i de altura e os quatro erros e_i da melhor linha reta. Qual é o valor mínimo $E^2 = e_1^2 + e_2^2 + e_3^2 + e_4^2$?

40. A média dos quatro registros é $\hat{t} = \frac{1}{4}(0 + 1 + 3 + 4) = 2$. A média dos quatro b's é $\hat{b} = \frac{1}{4}(0 + 8 + 8 + 20) = 9$.

(a) Verifique que a melhor reta passa *pelo ponto central* $(\hat{t}, \hat{b}) = (2, 9)$.

(b) Explique por que $C + D\hat{t} = \hat{b}$ surge a partir da primeira equação em $A^T A\hat{x} = A^T b$.

41. Encontre a solução com mínimos quadrados ponderados $\hat{x}_W$ para $Ax = b$:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad W = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Certifique-se de que a projeção $A\hat{x}_W$ também seja perpendicular (W-produto escalar!) ao erro $b - A\hat{x}_W$.

42. (a) Suponha que você tente adivinhar a idade de seu professor, cometendo erros $e = -2$, -1, 5, com probabilidades $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{4}$. Certifique-se de que o erro esperado $E(e)$ seja zero e encontre a variância $E(e^2)$.

(b) Se o professor também tentasse adivinhar (ou tentasse se lembrar), e cometesse os erros -1, 0, 1, com probabilidades $\frac{1}{8}$, $\frac{6}{8}$, $\frac{1}{8}$, quais ponderadas w_1 e w_2 forneceriam a confiabilidade de seu palpite e o de seu professor?