Conjunto de problemas 3.2

1. (a) Dado qualquer par positivo de números x e y, escolha o vetor b igual a $(\sqrt{y}, \sqrt{x})$ e $a = (\sqrt{y}, \sqrt{x})$. Aplique a Desigualdade de Schwarz a fim de comparar a média aritmética $\frac{1}{2}(x + y)$ com a média geométrica $\sqrt{xy}$.

(b) Supondo que comecemos com um vetor desde a origem até o ponto x, e então adicionamos um vetor de módulo $\|y\|$ conectando x a $x + y$. O terceiro lado do triângulo vai da origem até $x + y$. *A desigualdade triangular afirma que essa distância não pode ser maior do que a soma das duas primeiras distâncias:*

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

Após elevar ambos os lados ao quadrado e expandir $(x + y)^{\mathrm{T}}(x + y)$, deduza a partir desta expressão a Desigualdade de Schwarz.

2. Eleve ao quadrado a matriz $P = aa^{\mathrm{T}} / a^{\mathrm{T}}a$, que se projeta em uma linha, e demonstre que $P^2 = P$ (observe o número $a^{\mathrm{T}}a$ no meio da matriz $aa^{\mathrm{T}}aa^{\mathrm{T}}$!).

3. Escolha o vetor b correto na Desigualdade de Schwarz e prove que:

$$(a_1 + \cdots + a_n)^2 \leq n\left(a_1^2 + \cdots + a_n^2\right).$$

Quando a igualdade se verifica?

4. Verifique se o módulo da projeção na Figura 3.7 é $\|p\| = \|b\| \cos\theta$. Para tanto, utilize a fórmula (5).

5. (a) Encontre a matriz de projeção P_1 sobre a reta na direção $a = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$. Encontre também a matriz P_2 que projeta sobre a reta perpendicular a a.

(b) Calcule $P_1 + P_2$ e P_1P_2. Explique.

6. A molécula de metano CH_4 está organizada como se o átomo de carbono estivesse no centro de um tetraedro regular com quatro átomos de hidrogênio nos vértices. Se os vértices forem colocados em (0, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 0, 1) e (0, 1, 1) – observando que todas as seis arestas medem $\sqrt{2}$, de forma que este é um tetraedro regular –, qual será o cosseno do ângulo entre os raios que vão do centro $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ aos vértices (o próprio ângulo de ligação, um velho amigo dos químicos, é de aproximadamente 109,5°)?

7. Explique por que a Desigualdade de Schwarz se torna uma igualdade caso, e somente neste caso, de a e b estarem na mesma reta que passa pela origem. O que aconteceria se eles estivessem em lados opostos da origem?

8. Prove que o *traço* de $P = aa^{\mathrm{T}} / a^{\mathrm{T}}a$ – que é a soma dos elementos da diagonal – sempre é igual a 1.

9. Encontre a matriz que projeta cada ponto do plano sobre a reta $x + 2y = 0$.

10. Em n dimensões, qual é o ângulo que o vetor $(1, 1, ..., 1)$ faz com os eixos coordenados? Qual é a matriz de projeção P sobre aquele vetor?

11. Qual múltiplo de $a = (1, 1, 1)$ está mais próximo do ponto $b = (2, 4, 4)$? Descubra também, na reta que passa por b, o ponto mais próximo de a.

12. A matriz de projeção P é invertível? Justifique.

13. Existe uma prova de uma linha para a Desigualdade de Schwarz se, e somente se, por hipótese, tomarmos a e b vetores unitários.

$$|a^{\mathrm{T}}b| = \left|\sum a_j b_j\right| \le \sum |a_j|\,|b_j| \le \sum \frac{|a_j|^2 + |b_j|^2}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \|a\|\,\|b\|.$$

Qual problema anterior justifica a etapa intermediária?

14. Demonstre que o módulo de Ax é igual ao módulo de $A^{\mathrm{T}}x$ caso $AA^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}}A$.

15. Seja P a matriz de projeção sobre a reta na direção de a.

(a) Por que o produto escalar de x com Py é igual ao produto escalar de Px com y?

(b) Os dois ângulos são iguais? Encontre seus cossenos, caso $a = (1, 1, -1)$, $x = (2, 0, 1)$ e $y = (2, 2, 2)$.

(c) Por que o produto escalar de Px com Py é novamente igual? Qual é o ângulo entre os dois?

16. Qual é a matriz P que projeta cada ponto em $\mathbf{R}^3$ sobre a reta de interseção dos planos $x + y + + t = 0$ e $x - t = 0$?

Os problemas 17 a 26 pedem projeções em retas, além de erros $e = b - p$ e matrizes P.

17. *Desenhe* a projeção de b sobre a e a calcule a partir de $p = \hat{x}a$:

(a) $b = \begin{bmatrix} \cos\theta \\ \mathrm{sen}\theta \end{bmatrix}$ e $a = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. (b) $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $a = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

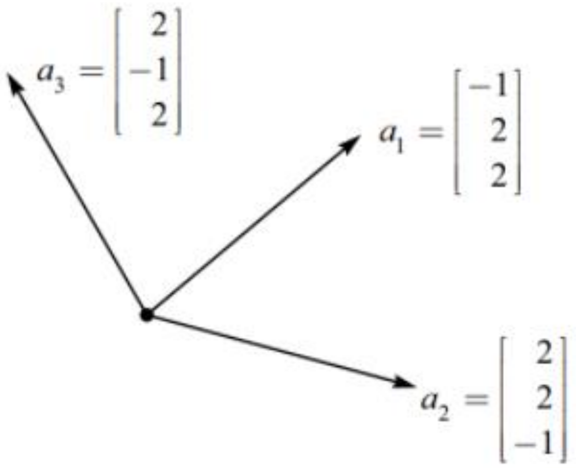
18. Crie as matrizes de projeção P_1 e P_2 sobre as retas que passam pelos a's do problema 17. A expressão $(P_1 + P_2)^2 = P_1 + P_2$ é verdadeira? Isto *seria* verdadeiro caso $P_1 P_2 = 0$.

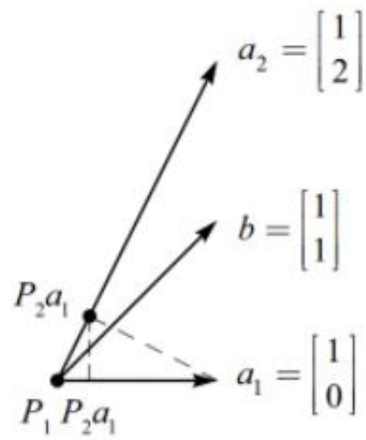
19. Faça a projeção do vetor b sobre a reta que passa por a. Certifique-se de que e seja perpendicular a a:

(a) $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$ e $a = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. (b) $b = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $a = \begin{bmatrix} -1 \\ -3 \\ -1 \end{bmatrix}$.

20. Descubra, no problema 19, a matriz de projeção $P = aa^T/a^Ta$ na reta que passa por cada vetor a. Em ambos os casos, certifique-se de que $P^2 = P$. Multiplique Pb em cada caso a fim de calcular a projeção p.

Consulte as figuras seguintes para resolver os problemas 21 a 26.





21. Calcule as matrizes de projeção aa^T/a^Ta sobre as retas que passam por $a_1 = (-1, 2, 2)$ e $a_2 = (2, 2, -1)$. Multiplique essas matrizes de projeção e explique a razão de ser de seu produto P_1P_2.

22. Faça a projeção do vetor $b = (1, 1)$ nas linhas que passam por $a_1 = (1, 0)$ e $a_2 = (1, 2)$. Desenhe as projeções p_1 e p_2 e some $p_1 + p_2$. As projeções não se somam a b, pois os as não são ortogonais.

23. No problema 22, a projeção de b no *plano* de a_1 e a_2 será igual a b. Encontre $P = A(A^TA)^{-1}A^T$ para $A = [\,a_1 \quad a_2\,] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$.

24. Faça a projeção de $b = (1, 0, 0)$ nas retas que passam por a_1 e a_2 no problema 21 e também em $a_3 = (2, -1, 2)$. Adicione as três projeções $p_1 + p_2 + p_3$.

25. Faça a projeção de $a_1 = (1, 0)$ em $a_2 = (1, 2)$. Então, projete de volta o resultado em a_1. Desenhe essas projeções e multiplique as matrizes de projeção P_1P_2. Isto é uma projeção?

26. Continuando os problemas 21 e 24, encontre a matriz de projeção P_3 em $a_3 = (2, -1, 2)$. Certifique-se de que $P_1 + P_2 + P_3 = I$. A base a_1, a_2, a_3 é ortogonal!