ALGEBRA LINEAR

Prof. Dr. Patricio R. Impinnisi

Aula 4

Ortogonalidade de Espaços Vetoriais

Espaços Vetoriais Ortogonais

Uma base é um conjunto de vetores independentes que geram um espaço, e é, geometricamente, um conjunto de eixos de coordenadas. Um espaço vetorial é definido sem esses eixos.

A ideia de **base ortonormal** é um dos pilares da álgebra linear. A seguir vamos ver:

1. O módulo $||x||$ de um vetor;
2. O teste $x^Ty = 0$ para vetores que são perpendiculares; e
3. Como criar vetores perpendiculares a partir de vetores linearmente independentes.

Mais do que conter apenas vetores, os subespaços apresentam características como a perpendicularidade.
Como já vimos, os espaços fundamentais são perpendiculares entre si (aos pares). Dois em R^m e dois em R^n

Vamos inicialmente determinar o **módulo de um vetor $||x||$**

Espaços Vetoriais Ortogonais

A extensão do caso bidimensional e tridimensional para o n-dimensional em que x = (x_1, ..., x_n) leva à raiz quadrada positiva de $\mathbf{x}^T\mathbf{x}$

Módulo elevado ao quadrado $$\|x\|^2 = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = \mathbf{x}^{\mathrm{T}}\mathbf{x}$$

Quando dois vetores são ortogonais?

No plano gerado por x e y, dois vetores são ortogonais, se eles formam um triângulo retângulo, ou seja, se é valido o teorema de Pitágoras

$$\|x\|^2 + \|y\|^2 = \|x + y\|^2$$

$$(x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2) + (y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2) = (x_1 + y_1)^2 + (x_2 + y_2)^2 + \cdots + (x_n + y_n)^2$$

Do lado direito temos um termo $2x_iy_i$ extra para cada “i”, por isso, para serem ortogonais exigimos que estes termos sejam zero...justamente esse é o produto escalar de x_iy_i

Espaços Vetoriais Ortogonais

O produto escalar é a soma definida por $\mathbf{x}^T\mathbf{y} = \sum x_i y_i = \mathbf{y}^T\mathbf{x}$ ....em que temos o vetor linha $\mathbf{x}^T$ vezes o vetor coluna **y** ...ou seja:

Produto escalar

$$x^T y = [x_1 \dots x_n] \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = x_1 y_1 + \dots + x_n\, y_n \equiv \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \equiv (\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

O produto escalar $x^T y$ será zero se, e somente se, x e y forem vetores ortogonais. Em outros casos teremos que o angulo será menor que 90° se $x^T y > 0$ e se $x^T y < 0$, o ângulo será maior que 90°.

Fato útil: “Se os vetores $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k$ não nulos são simultaneamente ortogonais entre si (todo vetor é perpendicular ao outro), então esses vetores possuem independência linear”

Para demonstrar isso basta aplicar o produto escalar por v_1^T a ambos os lados da expressão $c_1 v_1 + \dots + c_k v_k = 0$ (definição de LI) e utilizar o fato de serem ortogonais (e não nulos) para ficar evidente que c_1 tem que ser zero pois $c_1 v_1^T v_1 = 0$ (e $v_1 \neq 0$)...logo se repte o procedimento para todos os c_i...

Espaços Vetoriais Ortogonais

Ok, mas ...e no caso de subespaços....quando dois subespaços são ortogonais entre si?

Quando todo vetor em um subespaço é ortogonal a todo vetor no outro subespaço

Os subespaços são representados por retas ou planos que passam pela origem ....e em casos extremos, somente pela origem ou pelo espaço todo.

O subespaço {0} é ortogonal a todos os subespaços (o produto escalar da sempre zero).
Uma reta pode ser ortogonal a outra reta ou a um plano, mas....
... **um plano não pode ser ortogonal a outro plano** (todos os vetores desses planos não serão ortogonais entre si)

Definição: Dois subespaços **V** e **W** do mesmo espaço $\mathbf{R}^n$ serão ortogonais entre si, se cada vetor v em **V** for ortogonal a cada vetor w em **W**:

$$v^T w = 0 \text{ para todo } v \text{ e } w$$

Vejamos um exemplo...

Espaços Vetoriais Ortogonais

Exemplo: Seja o subespaço **V** o plano gerado por v_1= (1, 0, 0, 0) e v_2= (1, 1, 0, 0). Se o subespaço **W** é a reta gerada por w = (0, 0, 4, 5), então w é ortogonal a v_1 e v_2... e portanto a reta **W** será ortogonal a todo o plano **V** (gerado por estes vetores v_1 e v_2)

Neste exemplo, com subespaços de dimensão 2 (plano) e 1 (reta) em R^4, há ainda espaço para um terceiro subespaço.
A reta **L** gerada por z = (0, 0, 5, –4) é perpendicular a **V** e **W** (verifique). Assim, se somamos as dimensões deste subespaços ortogonais teremos 2 + 1 + 1 = 4...

...não há mais subespaços ortogonais em R^4...a não ser por mais um...particular....
Qual subespaço é perpendicular a todos **V**, **W** e **L**?

Os subespaços ortogonais importantes na álgebra surgem em pares e são os subespaços fundamentais! O primeiro par é formado por **espaço nulo e espaço-linha**, ambos são subespaços em $\mathbf{R}^n$ .... as linhas possuem n componentes, assim como o vetor x em Ax = 0.
Para resolver Ax = 0 (equação homogênea), é preciso encontrar os "x" tais que **as linhas de A sejam ortogonais a esses vetores x** no espaço nulo (por quê?)

Espaços Vetoriais Ortogonais

Teorema fundamental da ortogonalidade

O espaço-linha é ortogonal ao espaço nulo (em $\mathbf{R}^n$). O espaço-coluna é ortogonal ao espaço nulo à esquerda (em $\mathbf{R}^m$)

Exemplo: Consideremos uma matriz **A** que tem posto 1, de forma que seu espaço-linha e seu espaço-coluna sejam as retas:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}$$

As linhas são múltiplos de (1, 3)
O espaço nulo contém x = (–3, 1), que é ortogonal a todas as linhas (produto escalar zero)...

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \qquad \begin{bmatrix} 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix} = 0 \qquad \begin{bmatrix} 3 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

Desta forma vemos que o espaço nulo (a reta gerada por -3,1) e o espaço-linha são retas perpendiculares em R^2

Espaços Vetoriais Ortogonais

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}$$

Os outros dois subespaços estão em R^3

O espaço-coluna é a reta gerada por (1, 2, 3).

O espaço nulo à esquerda (ou seja o espaço nulo da A^T) deve ser o plano perpendicular definido por $y_1 + 2y_2 + 3y_3 = 0$ pois esta equação deste plano **é exatamente $y^TA = A^Ty = 0$**

Os dois primeiros subespaços (as duas retas) têm dimensões 1 + 1 = 2 no espaço R^2

O segundo par (reta e plano) tem dimensões 1 + 2 = 3 no espaço R^3

O espaço-linha e o espaço nulo tem dimensões que, se somadas, dão $r + (n – r) = n$

O outro par dá $r + (m – r) = m$

Certamente é verdade que o espaço nulo é perpendicular ao espaço-linha, mas isto não é tudo. O espaço nulo de A, **N(A) contém todos os vetores ortogonais ao espaço-linha** pois o espaço nulo se formou a partir de todas as soluções de $Ax = 0$!

Definição:

Dado um subespaço **V** de $\mathbf{R}^n$, chama-se **complemento ortogonal** de **V** o espaço de todos os vetores ortogonais a **V**, sendo representado por $\mathbf{V}^\perp$

Espaços Vetoriais Ortogonais

Assim, o espaço nulo é o complemento ortogonal do espaço linha, ou seja:

$$\mathbf{N(A) = (C(A^T))^{\perp}}$$

Ou invertendo, podemos afirmar que todo vetor ortogonal ao espaço nulo está necessariamente no espaço linha, ou seja:

$$\mathbf{C(A^T) = (N(A))^{\perp}}$$

O mesmo pode ser aplicado aos outros dois subespaços (nulo à esquerda e coluna)
Desta forma chegamos à **segunda parte do teorema fundamental da álgebra linear**:

Teorema fundamental da álgebra linear, parte II
O espaço nulo é o complemento ortogonal do espaço-linha em R^n
O espaço nulo à esquerda é o complemento ortogonal do espaço-coluna em R^m.

Espaços Vetoriais Ortogonais

Teorema fundamental da álgebra linear, parte II

O espaço nulo é o complemento ortogonal do espaço-linha em R^n

O espaço nulo à esquerda é o complemento ortogonal do espaço-coluna em R^m.

Esta parte do teorema é que decide exatamente **quais equações podem ser solucionadas!!!**.

Olhando diretamente para **Ax = b** vemos que esta equação exige que b esteja no espaço-coluna de **A**, ...

....por outro lado, indiretamente, Ax = b exige que **b seja perpendicular ao espaço nulo à esquerda de A**!!! (pois ele tem que estar no espaço coluna!)

Afirmação:

É possível solucionar Ax = b se, e somente se, $y^Tb = 0$ sempre que $y^TA = 0$.

Ou seja, em outras palavras, para que Ax=b tenha solução, b deve ser ortogonal a todos os vetores y (ou seja, $y^Tb = 0$) que são solução do espaço nulo à esquerda ($y^TA = 0$)

Vejamos um exemplo:

Espaços Vetoriais Ortogonais

Exemplo

Imagine o sistema de equações a seguir:

$$x_1 - x_2 = b_1$$
$$x_2 - x_3 = b_2$$
$$x_3 - x_1 = b_3$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Evidentemente, somando o lado esquerdo temos zero, portanto para que Ax=b tenha solução é necessário que $b_1+b_2+b_3=0$

Esta condição ($b_1+b_2+b_3=0$ para ter solução) implica que b deve ser ortogonal ao vetor y=(1,1,1) que sai do espaço nulo à esquerda de A (ou seja, de resolver $A^Ty=0$ ou $y^TA=0$), logo se b é ortogonal ao espaço nulo à esquerda então ele está no espaço coluna de A (pelo teorema) e portanto ele é CL das colunas de A e portanto há solução!
A questão aqui é: **o que é mais fácil**, reconhecer os “b” que são CL das colunas de A ou os “b” cujo produto escalar com qualquer vetor do espaço nulo à esquerda de A dê zero ($y^Tb=0$)

Espaços Vetoriais Ortogonais

As matrizes e os subespaços

Cabe ressaltar que **V** e **W** podem ser **ortogonais** sem que sejam **complementos ortogonais** um do outro.
Por exemplo, a reta **V** gerada por (0, 1, 0) é ortogonal à reta **W** gerada por (0, 0, 1), mas **V** não é $\mathbf{W}^{\perp}$.
Por quê?
Porque faltam elementos....O complemento ortogonal de W **é um plano** de duas dimensões (e não somente uma reta deste plano), e a reta **V** é apenas uma parte de $W^{\perp}$.
Quando as dimensões estão corretas, a soma de ambas deve dar n!!!, e nesse caso os subespaços ortogonais serão necessariamente complementos ortogonais, ou seja:

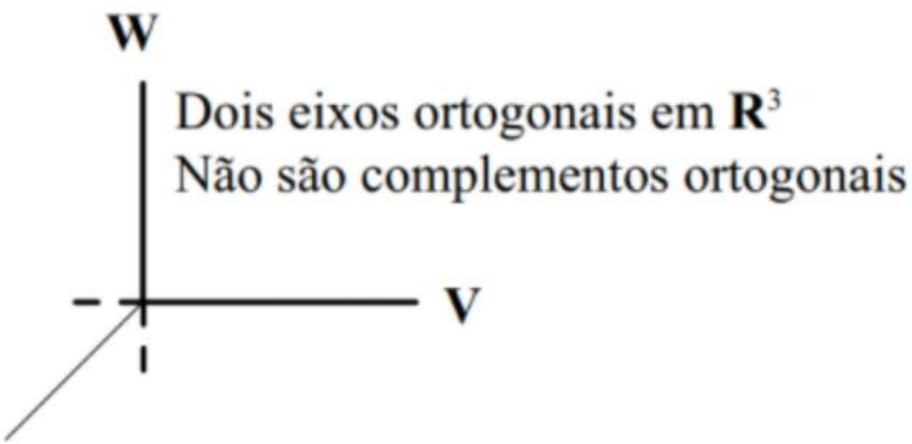
$$\text{se } \mathbf{W}=\mathbf{V}^{\perp} \text{ então } \mathbf{V} = \mathbf{W}^{\perp} \text{ e Dim } \mathbf{V} + \text{Dim } \mathbf{W} = n$$

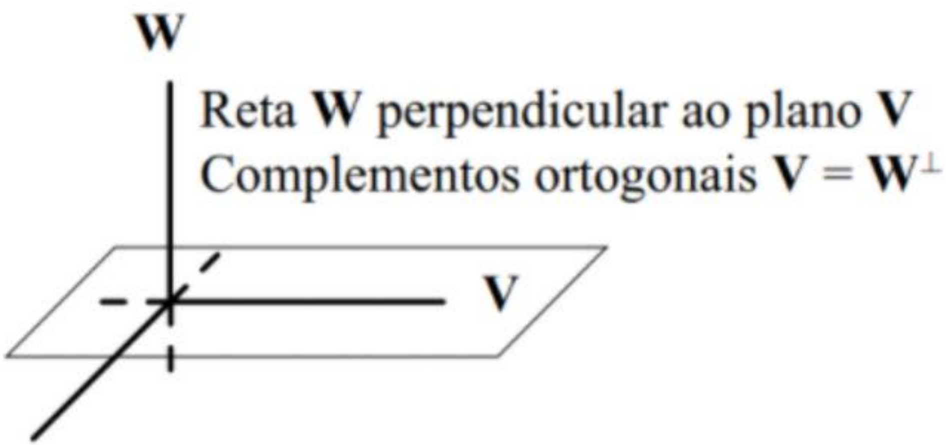
Quando as dimensões estão corretas (ou seja, quando sua soma dá n ou m), todo o espaço $\mathbf{R}^n$ ou $\mathbf{R}^m$ fica decomposto em duas partes perpendiculares que se complementam...

Espaços Vetoriais Ortogonais

As matrizes e os subespaços

Podemos desenhar o que foi exposto da seguinte forma para o caso do $\mathbf{R}^3$:





A divisão de $\mathbf{R}^n$ (ou $\mathbf{R}^m$) em duas partes ortogonais dividirá cada vetor x (neste caso de R^3) em v + w ortogonais entre si.

O vetor v é a projeção de x no subespaço **V**. O vetor w é a projeção de x sobre **W**.

A figura a seguir resume o teorema fundamental da álgebra linear. Ela ilustra o que acontece quando realizamos a multiplicação Ax...

Espaços Vetoriais Ortogonais

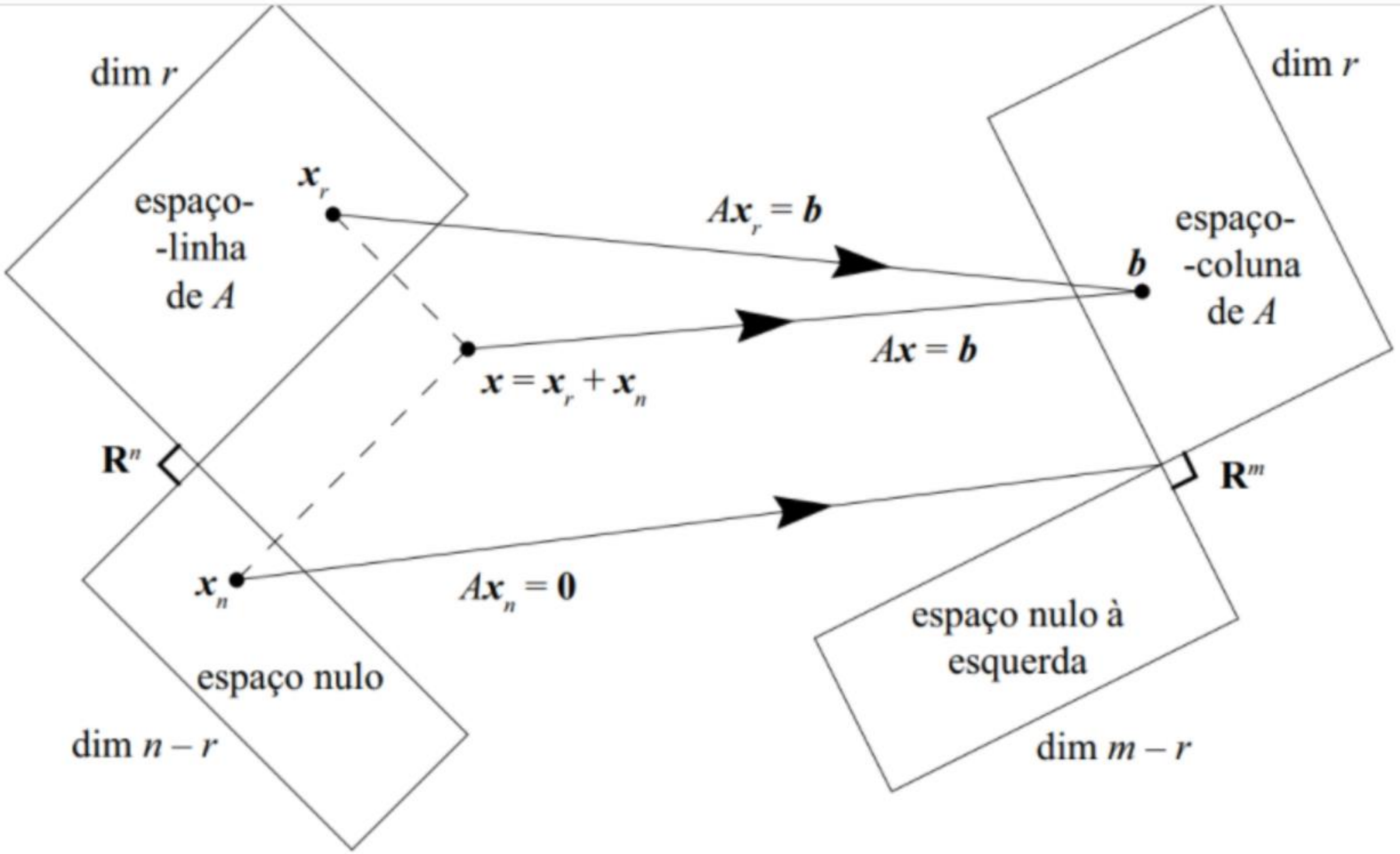
As matrizes e os subespaços

O espaço nulo (conjunto dos x_n que são solução de $Ax_n=0$) é levado (por esta operação Ax_n) ao vetor nulo (cada vetor deste espaço se transforma em zero).

Os "Ax" definem o espaço-coluna (de fato só a parte de x que está no espaço-linha, como veremos a seguir).

Nada é levado para o espaço nulo à esquerda.

Vejamos agora o que acontece entre o espaço-linha e o espaço-coluna (para isso vamos observar um vetor x qualquer)...



Espaços Vetoriais Ortogonais

As matrizes e os subespaços

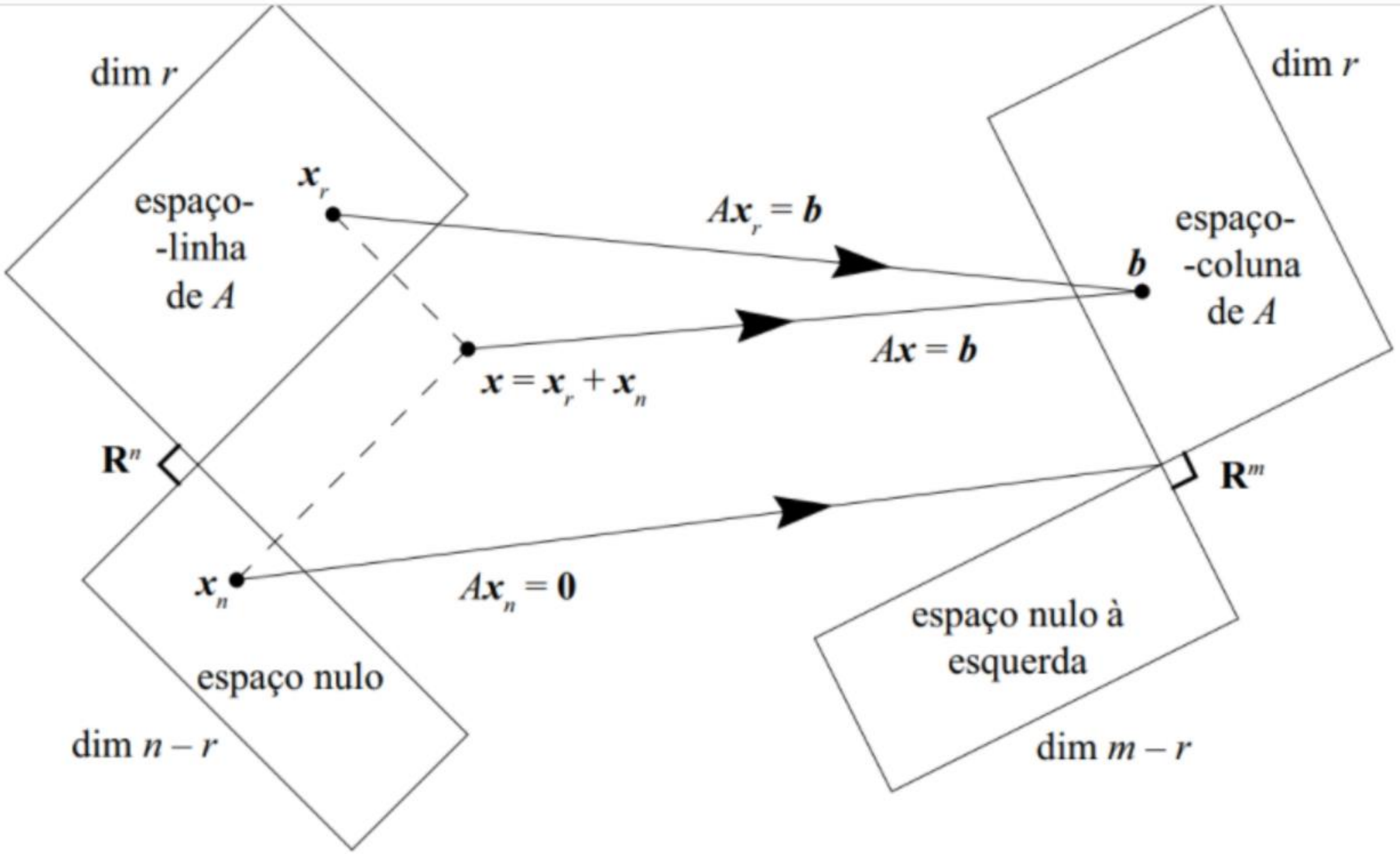
Este vetor x qualquer possui uma “componente de espaço-linha” (solução particular) e uma “componente do espaço nulo”, pois ele pode ser escrito como, $x = x_r + x_n$ (solução homogênea mais uma particular)

Quando multiplicado por A, temos $Ax = Ax_r + Ax_n$:

A componente do espaço nulo resulta em zero: $Ax_n = 0$

A componente do espaço-linha resulta no espaço-coluna: $Ax_r = Ax$

Portanto o espaço-linha de A se transforma no espaço-coluna de A

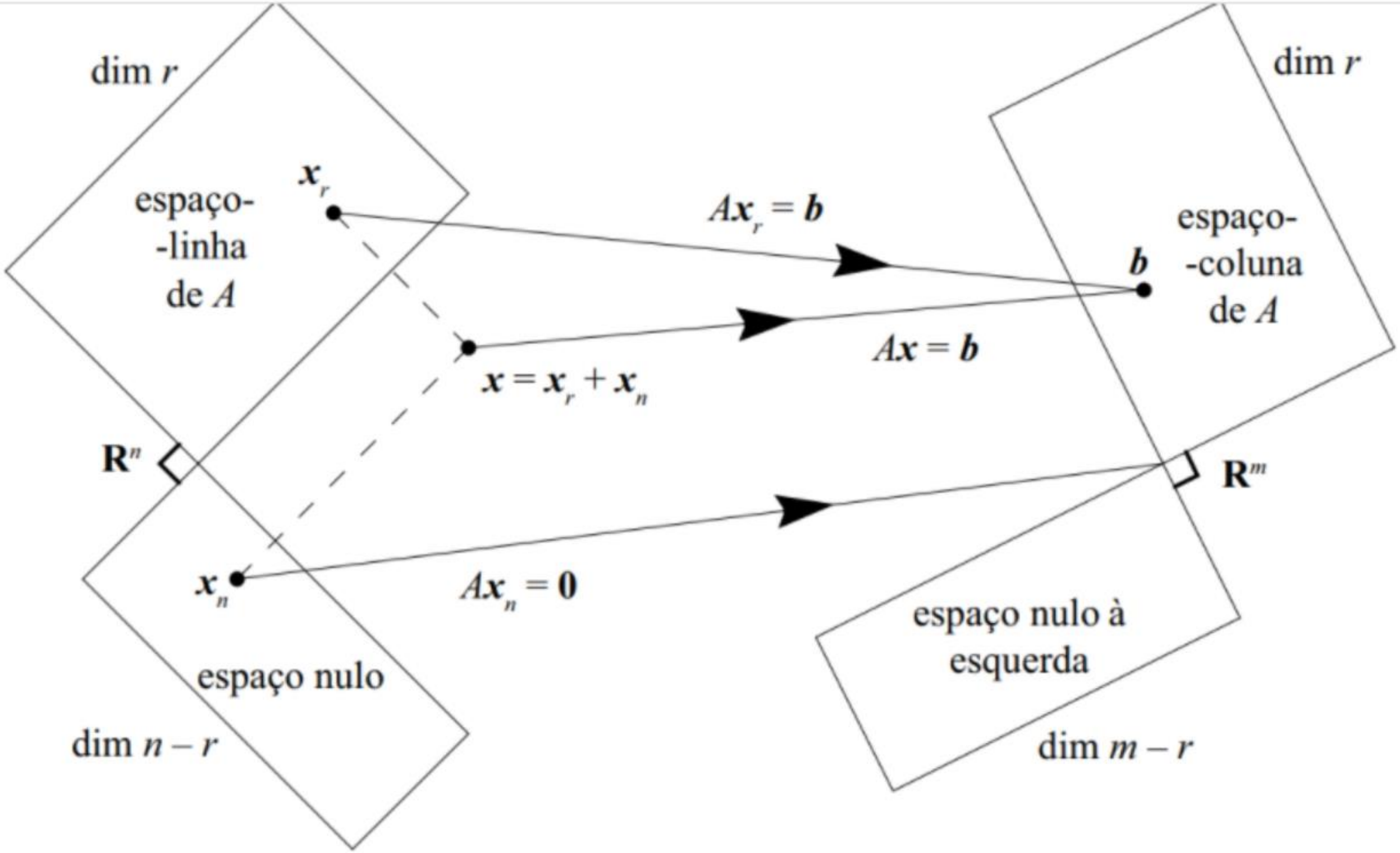


Espaços Vetoriais Ortogonais

As matrizes e os subespaços

É evidente que tudo termina no espaço-coluna... a matriz não pode fazer mais nada.

Com esta operação Ax, fizemos com que o espaço-linha e o espaço-coluna tivessem a mesma dimensão r



Exercícios

Livro Álgebra Linear e suas aplicações. Gilbert Strang. 4 edição

Página 148

Conjunto de problemas 3.1

Resolver: 1; 2; 4; 7; 8; 10; 14; 20; 21; 25; 32; 33 a); 34; 36; 39; 40; 46; 50