Conjunto de problemas 2.3

Os Problemas 1 a 10 abordam independência e dependência linear.

1. Escolha três colunas independentes de U. Em seguida, faça outras duas escolhas. Repita para A. Você encontrou bases para quais espaços?

$$U = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 6 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & 6 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \end{bmatrix}.$$

13 de abr de 2020 16:47

2. Prove que, se $a = 0$, $d = 0$ ou $f = 0$ (3 casos), as colunas de U são dependentes:

$$U = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & d & e \\ 0 & 0 & f \end{bmatrix}.$$

3. Determine a dependência ou independência de:

(a) vetores $(1, 3, 2)$, $(2, 1, 3)$ e $(3, 2, 1)$.

(b) vetores $(1, -3, 2)$, $(2, 1, -3)$ e $(-3, 2, 1)$.

4. Demonstre que v_1, v_2, v_3 são independentes, mas v_1, v_2, v_3, v_4 são dependentes:

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad v_4 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Resolva $c_1v_1 + ... + c_4v_4 = 0$ ou $Ac = 0$. Os valores de v aparecem nas colunas de A.

5. Se w_1, w_2, w_3 são vetores independentes, mostre que as subtrações $v_1 = w_2 - w_3$, $v_2 = w_1 - w_3$ e $v_3 = w_1 - w_2$ são *dependentes*. Encontre uma combinação de vetores v que resulte em zero.

6. Se a, d, f no Problema 2 são todos não nulos, mostre que a única solução de $Ux = 0$ é $x = 0$. Então, U possui colunas independentes.

7. Encontre o maior número possível de vetores independentes entre:

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad v_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad v_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad v_5 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad v_6 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Esse número é a _______ do espaço gerado pelos vetores v.

8. Suponha que v_1, v_2, v_3, v_4 são vetores de $\mathbf{R}^3$.

(a) Esses quatro vetores são dependentes porque _______.

(b) Os dois vetores v_1 e v_2 serão dependentes se _______.

(c) Os vetores v_1 e $(0, 0, 0)$ são dependentes porque _______.

9. Encontre dois vetores independentes no plano $x + 2y - 3z - t = 0$ em $\mathbf{R}^4$. Em seguida, encontre três vetores independentes. Por que não quatro? Esse plano é o espaço nulo de que matriz?

10. Se w_1, w_2, w_3 são vetores independentes, mostre que as somas $v_1 = w_2 + w_3$, $v_2 = w_1 + w_3$ e $v_3 = w_1 + w_2$ são *independentes* (apresente $c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3 = 0$ em termos dos vetores w; encontre e resolva as equações para os vetores c).

Os problemas 11 a 18 são sobre o espaço *gerado* por um conjunto de vetores. Considere todas as combinações lineares dos vetores.

11. O vetor b está no subespaço gerado pel 13 de abr de 2020 16:47 o há uma solução para _______. O vetor c está no espaço-linha de A quando há uma solução para _______. *Verdadeiro ou falso:* se o vetor nulo está no espaço-linha, as linhas são dependentes.

12. $v + w$ e $v - w$ são combinações de v e w. Apresente v e w como combinações de $v + w$ e $v - w$. Os dois pares de vetores _______ o mesmo espaço. Quando eles são a base do mesmo espaço?

13. Determine se os seguintes vetores são ou não linearmente independentes resolvendo $c_1v_1 + c_2v_2 + c_3v_3 + c_4v_4 = 0$:

$$v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Determine também se eles geram $\mathbf{R}^4$ tentando resolver $c_1v_1 + \ldots + c_4v_4 = (0, 0, 0, 1)$.

14. Suponha que os vetores, cuja independência será verificada, estejam posicionados nas linhas em vez de nas colunas de A. Como o processo de eliminação de A a U determinará a independência?

15. Encontre as dimensões (a) do espaço-coluna de A, (b) do espaço-coluna de U, (c) do espaço-linha de A, (d) do espaço-linha de U. Quais dois espaços entre esses são iguais?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

16. Descreva o subespaço de $\mathbf{R}^3$ (é uma reta, um plano ou $\mathbf{R}^3$?) gerado:

(a) pelos dois vetores $(1, 1, -1)$ e $(-1, -1, 1)$.

(b) pelos três vetores $(0, 1, 1)$, $(1, 1, 0)$ e $(0, 0, 0)$.

(c) pelas colunas de uma matriz escalonada 3 por 5 com 2 pivôs.

(d) por todos os vetores com componentes positivos.

17. Escolha $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)$ em $\mathbf{R}^4$. Ele possui 24 rearranjos como (x_2, x_1, x_3, x_4) e (x_4, x_3, x_1, x_2). Esses 24 vetores, incluindo o próprio x, geram um subespaço $\mathbf{S}$. Encontre vetores específicos x, de modo que a dimensão de $\mathbf{S}$ seja: (a) 0, (b) 1, (c) 3, (d) 4.

18. Para determinar se b é um subespaço gerado por $w_1, ..., w_n$, assuma que os vetores w sejam a coluna de A e tente resolver $Ax = b$. Qual é o resultado para:

(a) $w_1 = (1, 1, 0)$, $w_2 = (2, 2, 1)$, $w_3 = (0, 0, 2)$, $b = (3, 4, 5)$?

(b) $w_1 = (1, 2, 0)$, $w_2 = (2, 5, 0)$, $w_3 = (0, 0, 2)$, $w_4 = (0, 0, 0)$ e qualquer b?

Os Problemas 19 a 37 abordam os requisitos para uma base.

19. Encontre uma base para o plano $x - 2y + 3z = 0$ em $\mathbf{R}^3$. Em seguida, encontre uma base para a interseção desse plano com o plano xy. Por fim, encontre uma base para todos os vetores perpendiculares ao plano.

20. Se $v_1, ..., v_n$ são linearmente independentes, o espaço que eles geram tem dimensão _______. Esses vetores são uma _______ desse espaço. Se os vetores são as colunas de uma matriz m por n, então m é _______ do que n.

21. Suponha que $\mathbf{S}$ é um subespaço 5-dimension so?

(a) Toda base de $\mathbf{S}$ pode ser estendida a uma base de $\mathbf{R}^6$ adicionando-se um vetor.

(b) Toda base de $\mathbf{R}^6$ pode ser reduzida a uma base de $\mathbf{S}$ removendo-se um vetor.

22. As colunas de A são n vetores de $\mathbf{R}^m$. Se elas são linearmente independentes, qual é o posto de A? Se elas geram $\mathbf{R}^m$, qual é esse posto? E se elas forem uma base de $\mathbf{R}^m$?

23. U surge a partir de A, subtraindo-se a linha 1 da linha 3:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad U = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Encontre bases para os dois espaços-colunas. Encontre bases para os dois espaços-linhas. Encontre bases para os dois espaços nulos.

24. Encontre três bases diferentes para o espaço-coluna de U do problema anterior. Em seguida, encontre duas bases diferentes para o espaço-linha de U.

25. Encontre uma base para cada um desses subespaços de $\mathbf{R}^4$:

(a) Todos os vetores cujos componentes sejam iguais.

(b) Todos os vetores cujos componentes somem zero.

(c) Todos os vetores que sejam perpendiculares a $(1, 1, 0, 0)$ e $(1, 0, 1, 1)$.

(d) O espaço-coluna (em $\mathbf{R}^2$) e o espaço nulo (em $\mathbf{R}^5$) de $U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

26. Suponha que as colunas de uma matriz A 5 por 5 sejam uma base de $\mathbf{R}^5$.

(a) A equação $Ax = 0$ possui apenas a solução $x = 0$, pois _______.

(b) Se b está em $\mathbf{R}^5$, então $Ax = b$ é solúvel, pois _______.

Conclusão: A é invertível. Seu posto é 5.

27. Suponha que $v_1, v_2, \ldots, v_6$ sejam seis vetores em $\mathbf{R}^4$.

(a) Esses vetores (geram) (não geram) (podem não gerar) $\mathbf{R}^4$.

(b) Esses vetores (são) (não são) (podem ser) linearmente independentes.

(c) Quatro vetores quaisquer entre eles (são) (não são) (podem ser) uma base de $\mathbf{R}^4$.

(d) Se esses vetores são as colunas de A, então $Ax = b$ (possui) (não possui) (pode não possuir) uma solução.

28. Encontre um contraexemplo para a seguinte afirmação: se v_1, v_2, v_3, v_4 é uma base do espaço vetorial $\mathbf{R}^4$, e, se $\mathbf{W}$ é um subespaço, então um subconjunto dos vetores v é uma base de $\mathbf{W}$.

29. Se A é uma matriz 64 por 17 de posto 11, quantos vetores independentes satisfazem $Ax = 0$? Quantos vetores independentes satisfazem $A^{\mathrm{T}}y = 0$?

30. Sabendo que $\mathbf{V}$ possui dimensão k. Prove que:

(a) quaisquer k vetores independentes em $\mathbf{V}$ formam uma base;

(b) quaisquer k vetores que geram $\mathbf{V}$ formam uma base.

Em outras palavras, sabendo-se que o número de vetores está correto, qualquer uma das duas propriedades de uma base implica a outra.

31. Para quais números c e d essas matrizes possuem posto 2?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & c & [illegible] & [illegible] \\ 0 & 0 & 0 & d & 2 \end{bmatrix} \quad [illegible] \begin{bmatrix} [illegible] & [illegible] \\ d & c \end{bmatrix}$$

32. Verdadeiro ou falso?

(a) Se as colunas de A são linearmente independentes, então $Ax = b$ possui exatamente uma solução para todo b.

(b) Uma matriz 5 por 7 nunca possui colunas linearmente independentes.

33. Encontre uma base para cada um desses subespaços de matrizes 3 por 3:

(a) Todas as matrizes diagonais.

(b) Todas as matrizes simétricas ($A^{\mathrm{T}} = A$).

(c) Todas as matrizes antissimétricas ($A^{\mathrm{T}} = -A$).

34. Ao localizar os pivôs, encontre uma base para o espaço-coluna de:

$$U = \begin{bmatrix} 0 & 5 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Expresse cada coluna que não esteja na base como uma combinação das colunas-bases. Encontre também uma matriz A com essa forma escalonada U, mas com um espaço-coluna diferente.

35. Prove que, se $\mathbf{V}$ e $\mathbf{W}$ são subespaços tridimensionais de $\mathbf{R}^5$, então devem possuir um vetor não nulo em comum. *Dica*: comece com as bases dos dois subespaços encontrando seis vetores ao todo.

36. Verdadeiro ou falso? Justifique suas respostas.

(a) Se as colunas de uma matriz são dependentes, as linhas também o são.

(b) O espaço-coluna de uma matriz 2 por 2 é o mesmo que seu espaço-linha.

(c) O espaço-coluna de uma matriz 2 por 2 possui a mesma dimensão que seu espaço-linha.

(d) As colunas de uma matriz são uma base para o espaço-coluna.

37. Encontre as dimensões destes espaços vetoriais:

(a) O espaço de todos os vetores em $\mathbf{R}^4$ cujas componentes somem zero.

(b) O espaço nulo da matriz identidade 4 por 4.

(c) O espaço de todas as matrizes 4 por 4.

Os próximos Problemas são sobre espaços em que os "vetores" são funções.

38. O espaço dos cossenos $\mathbf{F}_3$ contém todas as combinações $y(x) = A\cos x + B\cos 2x + C\cos 3x$. Encontre uma base para o subespaço que possua $y(0) = 0$.

39. Apresente a matriz identidade 3 por 3 como uma combinação das outras cinco matrizes de permutação! Em seguida, mostre que essas cinco matrizes são linearmente independentes (assuma que uma combinação resulta em zero e verifique os elementos para provar que cada termo é nulo). As cinco permutações são uma base do subespaço das matrizes 3 por 3 com somas de linhas e colunas iguais.

40. *Revisão*: quais dos seguintes itens são bases de $\mathbf{R}^3$?

(a) $(1, 2, 0)$ e $(0, 1, -1)$.

(b) $(1, 1, -1), (2, 3, 4), (4, 1, -1), (0, 1, -1)$.

(c) $(1, 2, 2), (-1, 2, 1), (0, 8, 0)$.

(d) $(1, 2, 2), (-1, 2, 1), (0, 8, 6)$.

41. Encontre uma base para o espaço dos polinômios $p(x)$ de grau ≤ 3. Encontre uma base para o subespaço com $p(1) = 0$.

42. (a) Encontre todas as funções que satisfaçam $\frac{dy}{dx} = 0$.

(b) Escolha uma função particular que satisfaça $\frac{dy}{dx} = 3$.

(c) Encontre todas as funções que satisfaçam $\frac{dy}{dx} = 3$.

43. Suponha que $y_1(x), y_2(x), y_3(x)$ sejam três funções diferentes de x. O espaço vetorial que elas geram possui dimensão 1, 2 ou 3. Dê um exemplo de y_1, y_2, y_3 para mostrar cada possibilidade.

44. *Revisão*: suponha que A seja 5 por 4 com posto 4. Mostre que $Ax = b$ não possui solução quando a matriz 5 por 5 $[A \;\; b]$ é invertível. Mostre que $Ax = b$ é solúvel quando $[A \;\; b]$ é singular.

45. Encontre uma base para o espaço de funções que satisfaça:

(a) $\dfrac{dy}{dx} - 2y = 0$.

(b) $\dfrac{dy}{dx} - \dfrac{y}{x} = 0$.