Conjunto de problemas 2.1

1. Construa um subconjunto do plano xy $\mathbf{R}^2$ que seja:

(a) limitado por adição e subtração vetorial, mas não por multiplicação escalar.

(b) limitado por multiplicação escalar, mas não por adição vetorial.

Dica: começando com u e v, adicione e subtraia em (a). Tente cu e cv em (b).

2. Quais dos seguintes subconjuntos de $\mathbf{R}^3$ são, na verdade, subespaços?

(a) O plano de vetores (b_1, b_2, b_3) com primeira componente $b_1 = 0$.

(b) O plano de vetores b, com $b_1 = 1$.

(c) Os vetores b com $b_2 b_3 = 0$ (essa é a união de dois subespaços, o plano $b_2 = 0$ e o plano $b_3 = 0$).

(d) Todas as combinações dos dois vetores dados (1, 1, 0) e (2, 0, 1).

(e) O plano de vetores (b_1, b_2, b_3) que satisfaça $b_3 - b_2 + 3b_1 = 0$.

3. Qual é o menor subespaço de matrizes 3 por 3 que contém todas as matrizes simétricas *e* todas as matrizes triangulares inferiores? Qual é o maior subespaço contido nesses dois subespaços?

4. Quais das alternativas abaixo são subespaços de $\mathbf{R}^\infty$?

(a) Todas as sequências do tipo (1, 0, 1, 0, ...) que incluam infinitos zeros.

(b) Todas as sequências $(x_1, x_2, ...)$ com $x_j = 0$ de um ponto qualquer em diante.

(c) Todas as sequências decrescentes $x_{j+1} \leq x_j$ para todo j.

(d) Todas as sequências convergentes: o x_j apresenta um limite conforme $j \to \infty$.

(e) Todas as progressões aritméticas: $x_{j+1} - x_j$ é igual para todo j.

(f) Todas as progressões geométricas $(x_1, kx_1, k^2x_1, ...)$ para todo k e x_1.

5. Descreva o espaço-coluna e o espaço nulo das matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

6. A adição e a multiplicação de escalares são necessárias para satisfazer essas oito regras:

1. $x + y = y + x$.
2. $x + (y + z) = (x + y) + z$.
3. Há um único "vetor nulo" de modo que $x + 0 = x$ para todo x.
4. Para todo x, há um único vetor $-x$ de modo que $x + (-x) = 0$.
5. $1x = x$.
6. $(c_1c_2)x = c_1(c_2x)$.
7. $c(x + y) = cx + cy$.
8. $(c_1 + c_2)x = c_1x + c_2x$.

(a) Suponha que uma soma em $\mathbf{R}^2$ acrescente um número 1 adicional a cada componente, de modo que (3, 1) + (5, 0) seja igual a (9, 2) em vez de (8, 1). Com a multiplicação escalar inalterada, qual regra é violada?

(b) Mostre que o conjunto de todos os números reais positivos, com $x + y$ e cx redefinidos para serem iguais a xy e x^c usuais, é um espaço vetorial. Qual é o "vetor nulo"?

(c) Suponha que $(x_1, x_2) + (y_1, y_2)$ seja definido para ser $(x_1 + y_2, x_2 + y_1)$. Com o $cx = (cx_1, cx_2)$ usual, quais das oito condições não são satisfeitas?

7. Assuma que $\mathbf{P}$ seja o plano no espaço 3 com equação $x + 2y + z = 6$. Qual é a equação do plano $\mathbf{P}_0$ através da origem paralelo a $\mathbf{P}$? $\mathbf{P}$ e $\mathbf{P}_0$ são subespaços de $\mathbf{R}^3$?

8. Quais das seguintes descrições estão corretas? As soluções x de

$$Ax = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

formam

(a) um plano.

(b) uma reta.

(c) um ponto.

(d) um subespaço.

(e) o espaço nulo de A.

(f) o espaço-coluna de A.

9. (a) Descreva um subespaço de **M** que contém $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ mas não $B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

(b) Se um subespaço de **M** contém A e B, ele deve conter I?

(c) Descreva um subespaço de **M** que contenha matrizes diagonais não nulas.

10. Mostre que o conjunto de matrizes 2 por 2 não singulares não é um espaço vetorial. Mostre também que o conjunto de matrizes 2 por 2 *singulares* não é um espaço vetorial.

11. Descreva o menor subespaço do espaço de matrizes 2 por 2 **M** que contenha:

(a) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ e $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(c) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

(d) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

12. $\mathbf{P}_0$ é o plano que passa por (0, 0, 0), paralelo ao plano **P** do Problema 17. Qual é a equação de $\mathbf{P}_0$? Encontre dois vetores de $\mathbf{P}_0$ e verifique que sua soma está em $\mathbf{P}_0$.

13. As funções $f(x) = x^2$ e $g(x) = 5x$ são "vetores" no espaço vetorial **F** de todas as funções reais. A combinação $3f(x) - 4g(x)$ é a função $h(x) =$ _______. Qual regra será quebrada se a multiplicação de $f(x)$ por c resultar na função $f(cx)$?

14. Os quatro tipos de subespaços de $\mathbf{R}^3$ são planos, retas, o próprio $\mathbf{R}^3$ e **Z**, que contém apenas (0, 0, 0).

(a) Descreva os três tipos de subespaço

(b) Descreva os cinco tipos de subespa

15. (a) A interseção de dois planos que passam por (0, 0, 0) é provavelmente uma _______, mas ela pode ser um _______. Ela não pode ser o vetor nulo **Z**!

(b) A interseção de um plano que passa por (0, 0, 0) com uma linha que passa por (0, 0, 0) é provavelmente um _______, mas pode ser uma _______.

(c) Se **S** e **T** são subespaços de $\mathbf{R}^5$, sua interseção $\mathbf{S} \cap \mathbf{T}$ (vetores em ambos os subespaços) é um subespaço de $\mathbf{R}^5$. *Verifique os requisitos de $x + y$ e cx.*

16. Se a soma dos "vetores" $f(x)$ e $g(x)$ em **F** é definida para ser $f(g(x))$, então o "vetor nulo" será $g(x) = x$. Mantenha a multiplicação escalar comum $cf(x)$ e encontre as duas regras que são violadas.

17. Considere **P** o plano de $\mathbf{R}^3$ com a equação $x + y - 2z = 4$. A origem (0, 0, 0) não está em **P**! Encontre dois vetores de **P** e verifique que sua soma não está em **P**.

18. A matriz $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$ é um "vetor" no espaço **M** de todas as matrizes 2 por 2. Apresente o vetor nulo desse espaço, o vetor $\frac{1}{2}A$ e o vetor $-A$. Que matrizes estão no menor subespaço que contém A?

19. Verdadeiro ou falso para **M** = todas as matrizes 3 por 3 (verifique a soma utilizando um exemplo)?

(a) As matrizes antissimétricas de **M** (com $A^T = -A$) formam um subespaço.

(b) As matrizes assimétricas de **M** (com $A^T \neq -A$) formam um subespaço.

(c) As matrizes que possuem (1, 1, 1) em seu espaço nulo formam um subespaço.

20. Suponha que **P** seja um plano que passe por (0, 0, 0) e **L**, uma reta que passe por (0, 0, 0). O menor espaço vetorial que contém tanto **P** quanto **L** é _______ ou _______.

Os Problemas 21 a 31 são sobre os espaços-colunas $C(A)$ e a equação $Ax = b$.

21. A soma da linha 1 de A à linha 2 gera B. A soma da coluna 1 à coluna 2 gera C. Uma combinação das colunas de _______ é também uma combinação das colunas de A. Quais são as duas matrizes que possuem o mesmo _______ coluna?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}.$$

22. (Recomendado) Se somarmos uma coluna adicional b a uma matriz A, o espaço-coluna se tornará maior, a menos que _______. Dê um exemplo em que o espaço-coluna se torna maior e um em que isso não ocorra. Por que $Ax = b$ é solúvel exatamente quando o espaço--coluna *não* se torna maior pela inclusão de b?

23. Se A é qualquer matriz invertível 8 por 8, então seu espaço-coluna é _______. Por quê?

24. Para quais lados direitos (encontre uma condição de b_1, b_2, b_3) esses sistemas são solúveis?

$$\text{(a)} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 8 & 4 \\ -1 & -4 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}. \qquad \text{(b)} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 9 \\ -1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}.$$

25. As colunas de AB são combinações das colunas de A. Isso significa que: *o espaço-coluna de AB está contido no* (e possivelmente é igual ao) *espaço-coluna de A*. Dê um exemplo em que os espaços-colunas de A e AB não são ig

26. Descreva os espaços-colunas (retas ou planos) dessas matrizes específicas:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

27. Verdadeiro ou falso? Se for falso, dê um contraexemplo.

(a) Os vetores b que não estão no espaço-coluna $\mathbf{C}(A)$ formam um subespaço.

(b) Se $\mathbf{C}(A)$ contém apenas o vetor nulo, então A é a matriz nula.

(c) O espaço-coluna de $2A$ é igual ao espaço-coluna de A.

(d) O espaço-coluna de $A - I$ é igual ao espaço-coluna de A.

28. Para quais vetores (b_1, b_2, b_3) esses sistemas possuem uma solução?

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}.$$

29. Por que $\mathbf{R}^2$ não é um subespaço de $\mathbf{R}^3$?

30. Construa uma matriz 3 por 3 cujo espaço-coluna contenha (1, 1, 0) e (1, 0, 1), mas não (1, 1, 1). Construa uma matriz 3 por 3 cujo espaço-coluna seja apenas uma reta.

31. Se o sistema 9 por 12, $Ax = b$ é solúvel para todo b, então $\mathbf{C}(A) =$ _______.