ALGEBRA LINEAR

Prof. Dr. Patricio R. Impinnisi

Aula 3

Espaços Vetoriais

Espaços Vetoriais

Tudo o que fizemos até agora foi somar vetores e multiplicar eles por escalares (números) ou seja: Combinações Lineares.
Por que vamos estudar os espaços vetoriais?

Espaços em termos gerais são agrupações de elementos que satisfazem certas regras.

Por exemplo, no caso dos **espaços vetoriais** é um conjunto de vetores que satisfazem as regras de soma de vetores e multiplicação por escalares (permanecendo os elementos nesse espaço!)

Regras:
$u+v$ dá um vetor no mesmo espaço
$c \cdot u$ dá um vetor no mesmo espaço
Combinando temos as CL: $c \cdot u + d \cdot v$ é um vetor no mesmo espaço
De fato são 8 regras, mas derivam destas duas (página 74 exercício 6 do livro de Gilbert Strang) e são apresentadas a seguir:

Espaços Vetoriais

Regras:

1. x+y = y+x.
2. x+(y+z) = (x+y)+z
3. Há um único "vetor nulo" de modo que x + 0 = x para todo x
4. Para todo x, há um único vetor –x de modo que x + (–x) = 0
5. 1 x = x
6. $(c_1 c_2)\,x = c_1\,(c_2\,x)$
7. c (x+y) = c x + c y
8. $(c_1+c_2)\,x = c_1\,x + c_2\,x$

Mostre que o conjunto de todos os números reais positivos, com x + y e cx redefinidos para serem iguais a xy e x^c usuais, é um espaço vetorial. Qual é o "vetor nulo"?

Exemplos de espaços vetoriais:

1. R^1, R^2, R^3,...,R^n,..., R^∞ (R por reais, suas componentes são números reais)
2. Matrizes 3x2
3. Funções f(x)

Não são espaços vetoriais:

1. 1er quadrante em R^2 (subconjunto)
2. 1er e 3er quadrantes em R^2

Espaços Vetoriais

Subespaços:

São espaços vetoriais dentro de outros espaços vetoriais...satisfazem as regras de adição de vetores e multiplicação por escalares permanecendo dentro do subespaço...

Exemplos:

Qual é o menor subespaço $\mathbf{R^0}$ que contem apenas um vetor ?

Resp: espaço zero dimensional com apenas a origem! (espaços vazios não são permitidos)

Quantos subespaços há dentro de R^2?

O próprio R^2, qualquer R^1 que passe pela origem e o R^0 (espaço de um ponto só)

Quais são os subespaços de R^3 e R^n?

Subespaços de matrizes 3x3: triangulares inferiores e as simétricas (dois exemplos)

Questão: No caso R^3, dois subespaços qualquer, um plano P e uma linha L ao fazer $P(R^2) \cup L(R^1)$ e $P(R^2) \cap L(R^1)$ formam um subespaço?

Vamos ver agora os **espaços vetoriais importantes** para a álgebra linear (eles são 4) ....

Espaços Vetoriais

Espaços das colunas

As CL dos vetores colunas das matrizes formas espaços (verificar que satisfazem as regras)

Este espaço é chamado **espaço das colunas** da matriz A e é representado por **C(A)**

Exemplo de uma matriz 4x3

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

O C(A) desta matriz A é um subespaço de qual espaço? R^4

O C(A) desta matriz A são todas as CL das colunas de A

O C(A) é um subespaço de R^4 ou é tudo o R^4?

Afirmação: **o C(A) de uma matriz mxn é um subespaço de R^m** (por quê?)

Espaços Vetoriais

No caso de

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}$$

Sabemos que por ter m>n temos mais equações do que incógnitas **e em geral não terá solução**.

O sistema Ax = b é solúvel somente se o vetor b é uma CL de C(A) e portanto pertence ao C(A)

Em outras palavras estamos dizendo (interpretação por colunas) que:

$$u \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} + v \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + w \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{bmatrix}$$

Quais são alguns possíveis lados direitos (col(b)) para que esta equação tenha solução?

Quais são todos os possíveis lados direitos (col(b)) para que esta equação tenha solução?

São os “b´s” que pertencem ao C(A)

Cada matriz evidentemente tem seu C(A) particular.

Espaços Vetoriais

Exemplo: analisemos o caso da matriz identidade 5x5

As cinco colunas dessa matriz podem, ser combinadas para produzir qualquer vetor em R^5!
Isso será válido para qualquer matriz 5x5 que não seja singular!!! (por que ☺ ?)
Assim qualquer matriz 5x5 que não seja singular terá o espaço R^5 inteiro como espaço coluna !
Para essa matriz (não singular) podemos resolver o sistema por eliminação de Gauss e teremos 5 pivôs e todo "vetor b" estará contido em C(A)

Espaço nulo de A

Esta é uma abordagem complementar à anterior para resolver o problema de Ax=b
Na abordagem anterior, através do C(A), estávamos preocupados com os possíveis vetores b...
Agora estamos interessados nas possíveis soluções (vetores u,v,w)
Por exemplo, para b=0 sempre existe a solução x=0 (evidente e pouco interessante)
Mas também podem existir infinitas outras soluções (sempre acontecerá se n>m !)
O interessante aqui é que as soluções x (de Ax=0) formam um espaço vetorial chamado espaço nulo de A e é representado por N(A). É um subespaço de R^n (do número de incógnitas).

Espaços Vetoriais

O N(A) forma um subespaço pois:

Se Ax=0 e Ax´=0 então A(x+x´)=0
E se Ax=0 então A(cx)=0

Todo falha se o lado direito não for 0!!! Ou seja, só as soluções (vetores x) de Ax=0 são um subespaço (por quê?)

Assim apenas as soluções “x” da equação homogênea Ax=0 formam um subespaço

Como exemplo vejamos qual é o espaço nulo da matriz A abaixo, para isso resolvemos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 4 & 0 & 2 \\ 5 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Da primeira linha temos que u=0
A terceira linha exige que w=0
Logo as outras exigem que v=0

Desta forma o N(A), neste caso, possui um único vetor, o vetor nulo (0,0,0) o que implica que esta matriz possui **colunas independentes**

Espaços Vetoriais

Mas tudo muda se uma coluna for uma CL das anteriores...

Por exemplo, vamos adicionar uma quarta coluna a A (soma de (1) (2) e (3)) e criar a matriz B assim...

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 5 \\ 4 & 0 & 2 & 6 \\ 5 & 1 & 2 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

O C(A) é igual ao C(B) (por quê?)

Porque a nova coluna está no plano formado pelos três vetores coluna da matriz A (é a soma desses vetores)

Mas agora o espaço nulo de B que é N(B) contem também o vetor (1,1,1,-1)

E automaticamente qualquer múltiplo dele c(1,1,1,-1), ou seja qualquer vetor (c,c,c,-c)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 5 \\ 4 & 0 & 2 & 6 \\ 5 & 1 & 2 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c \\ c \\ c \\ -c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Assim o N(B) é a reta com todos os pontos (c,c,c,-c) que **como todo subespaço contem a origem**.

Resumindo:

Espaços Vetoriais

Resumo:

Queremos e devemos: para qualquer sistema Ax=b, ser capazes de encontrar C(A) e N(A) além de todos os lados direitos “b” possíveis e todas as soluções x da equação homogênea Ax=0.

Os vetores b estão no espaço coluna
Os vetores x de Ax=0 estão no espaço nulo

Devemos calcular as dimensões desses subespaços e um conjunto “adequado” de vetores para gerar esse subespaço

Exercícios

Livro Álgebra Linear e suas aplicações. Gilbert Strang. 4 edição

Página 73

Conjunto de problemas 2.1

Resolver: 1; 4; 5; 6a; 10; 14; 15a e 15b; 17; 21; 22; 23; 26; 29; 30;

Espaços Vetoriais

Solução de Ax=0 e Ax=b e a matriz reduzida R

Sabemos que para uma matriz ser invertível seu espaço nulo deve conter apenas x=0 (senão, para b=0 teríamos um $x \neq 0$....e portanto de Ax=0 chegaríamos a que $A^{-1}0=x$, impossível)
Também sabemos que se a matriz é invertível seu espaço coluna é o espaço inteiro (solução para todo b!)
O interessante é quando temos espaços nulos com mais do que o vetor nulo (ou seja, temos colunas dependentes), o espaço coluna não contêm todos os vetores b possíveis (evidente).

Qualquer vetor do espaço nulo x_N pode ser somado a uma solução particular x_P e esta soma x_N+x_P segue sendo a solução da equação linear! (pois de fato somamos 0 a uma solução)
É por isso que todas as soluções do sistema de equações lineares têm a forma: $x = x_P+x_N$

Solução completa: $Ax_P=b$ **e** $Ax_N=0$ **geram** $A(x_P+x_N)=b$

Mas se o C(A) não incluir todos os "b" do espaço R^m (ou seja, se o espaço nulo tem mais do que um vetor) precisamos identificar quais "b" são possíveis, vejamos exemplos:

Espaços Vetoriais

Solução de Ax=0 e de Ax=b e a matriz reduzida R

Vamos supor o sistema $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$ Que podemos dizer deste sistema?

Geralmente não tem solução.... Quando tem solução? Só se $b_2 = 2b_1$

Qual é o espaço coluna dessa matriz?

Reta que passa por zero e por (1,2); (2,4); etc. ou seja os "b´s" tem que estar nessa reta e para isso para qualquer número c temos que b tem que ser (c, 2c) ou seja ter componentes múltiplos de (1,2)

Quando $b_2 = 2\, b_1$ teremos infinitas soluções (uma equação com duas incógnitas), por exemplo:

Uma solução particular x_P das equações u+v = 2 e 2u+2v = 4 é $x_P = (1,1)$

Qual é o N(A)? N(A) contem além de (0,0) o vetor (1,-1) e seus múltiplos (c,-c)

Vamos ver isso graficamente:

Espaços Vetoriais

Solução de Ax=0 e Ax=b e a matriz reduzida R

Reta de todas as soluções $x = x_P + x_N$

Vejam que x não é um espaço!

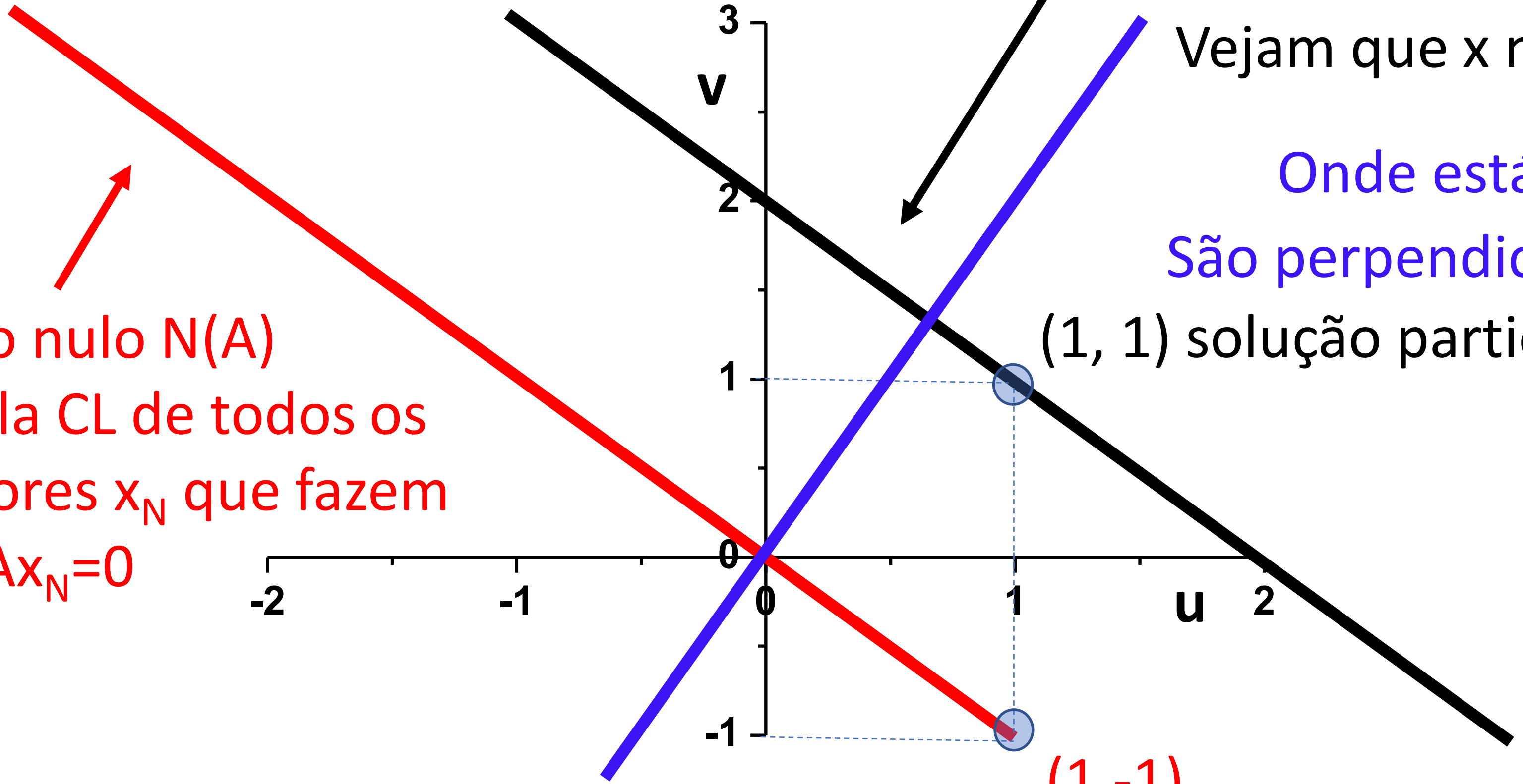
Onde está aqui o C(A)?

São perpendiculares entre si!!!

(1, 1) solução particular x_P

Espaço nulo N(A)

Formado pela CL de todos os possíveis vetores x_N que fazem $Ax_N=0$



(1,-1)

O vetor (1,-1) resolve u+v = 0 e 2u+2v = 0

Espaços Vetoriais

Solução de Ax=0 e Ax=b e a matriz reduzida R

Vamos supor agora uma matriz retangular, isso traz novas possibilidades, como veremos a seguir.

Vamos supor a matriz A 3x4 : $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 9 & 7 \\ -1 & -3 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ Aplicamos o método de eliminação para eliminar $a_{2,1}$ e $a_{3,1}$ e encontramos um problema....

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & \mathbf{0} & 3 & 3 \\ 0 & \mathbf{0} & 6 & 6 \end{bmatrix}$$

Permutar não resolve! **Se a matriz fosse quadrada seria singular!**

Não sendo quadrada, vamos prosseguir com a terceira coluna...

E chegamos à uma matriz triangular superior U...

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Os pivôs (por definição à esquerda e embaixo deles são todos zeros) de U (1 e 3) não estão na diagonal principal! E como sempre, debaixo deles sempre tem zeros!

Espaços Vetoriais

Solução de Ax=0 e Ax=b e a matriz reduzida R

Num caso geral teríamos sempre que A pode ser levada a uma U da forma:

$$U = \begin{bmatrix} \blacksquare & * & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & \blacksquare & * & * & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & \blacksquare & * & * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \blacksquare \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Onde os pivôs são os primeiros elementos não nulos de cada linha

Abaixo de cada pivô só há zeros (obtidos por eliminação)

No caso da matriz retangular vale tudo o que aprendemos sobre L (A=LU, ou seja $L = E^{-1}$)

A matriz L aparece ao desfazer as eliminações que aplicamos para chegar a U, portanto tem o mesmo número de linhas que A e U (por que?). Qual é a matriz L correspondente à matriz U do exemplo anterior?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 9 & 7 \\ -1 & -3 & 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad U = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad L = \begin{bmatrix} ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \end{bmatrix} \qquad L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Espaços Vetoriais

Solução de Ax=0 e Ax=b e a matriz reduzida R

Agora vamos obter a chamada **matriz R** a partir de U, tínhamos:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 9 & 7 \\ -1 & -3 & 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad U = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Agora vamos **gerar zeros acima de pivôs unitários**, ou seja, antes vamos tornar os pivôs iguais a 1 dividindo a linha pelo valor do pivô (isso não altera a equação correto?)

$$U' = \begin{bmatrix} 1 & 3 & \mathbf{3} & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad R = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

O MATLAB utiliza o comando R = rref(A) para fazer isto. Evidentemente que rref(R)=R
A partir de R encontramos rapidamente o espaço nulo de A ou seja Rx=0 (as soluções de Rx=0 são as mesmas de Ax=0 e Ux=0... por quê?).

Espaços Vetoriais

Solução de Ax=0 e Ax=b e a matriz reduzida R

A matriz R permite identificar quais são as variáveis pivô e quais as chamadas variáveis livres:

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Esta matriz corresponde ao conjunto de variáveis u, v, w, y e Rx=0 significa que:

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & 3 & \boxed{0} & -1 \\ \boxed{0} & 0 & \boxed{1} & 1 \\ \boxed{0} & 0 & \boxed{0} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boxed{u} \\ v \\ \boxed{w} \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

As variáveis pivô (u e w) são as das colunas pivô e as variáveis livres (v e y) são as das colunas sem pivôs

Para encontrar a solução de Rx=0 atribuímos valores às variáveis livres (v e y) pois as variáveis pivô (u e w) são univocamente determinadas por esses valores das variáveis livres:

Rx = 0

$u + 3v - y = 0$

$w + y = 0$

$u = -3v + y$

$w = -y$

Espaços Vetoriais

Solução de Ax=0 e Ax=b e a matriz reduzida R

Desta forma (atribuindo valores às variáveis livres v e y) o espaço nulo (soluções x de Rx=0 e de Ax=0 também) contem todas as **CL de duas soluções especiais**:

$$x = \begin{bmatrix} u \\ \boldsymbol{v} \\ w \\ \boldsymbol{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3v + y \\ \boldsymbol{v} \\ -y \\ \boldsymbol{y} \end{bmatrix} = v\begin{bmatrix} -3 \\ \mathbf{1} \\ 0 \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{0} \\ -1 \\ \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

A primeira solução especial é com **v=1** e **y=0**
A segunda solução especial é com **v=0** e **y=1**

Todas as soluções (ou seja, o espaço nulo) são CL´s destas duas soluções.

Resumo:

O melhor modo de encontrar as soluções de Ax=0 é através de Rx=0

Dando valores “0” e “1” ás variáveis livres e resolvendo Rx=0 se obtêm as soluções especiais (tantas quanto variáveis livres temos, cada variável livre produz sua solução especial).

E se não houver variáveis livres? Qual é o espaço nulo?

No exemplo acima, no espaço R^4 de todos os possíveis x a solução de Ax=0, ou seja, o espaço nulo de A (N(A)) é um subespaço R^2 formado pelos vetores (-3, 1, 0, 0) e (1, 0 -1, 1).

Espaços Vetoriais

Solução de Ax=0 e Ax=b e a matriz reduzida R

Retomando, assim temos que para Rx=0

$$\begin{bmatrix} 1 & \boxed{3} & 0 & \boxed{-1} \\ 0 & \boxed{0} & 1 & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ y \end{bmatrix} = 0$$

O N(R) é (pois é a CL das soluções especiais):

$$N(R) = \begin{bmatrix} \boxed{-3} & \boxed{1} \\ 1 & 0 \\ \boxed{0} & \boxed{-1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Dica:
A partir de R a matriz N(R) se formou com os números das soluções especiais (v e y, ou seja 1, 0 e 0, 1) e os números 3, 0, -1 e 1 (com sinal invertido) das colunas **não pivôs**

Espaços Vetoriais

<u>Solução de Ax=0 e Ax=b e a matriz reduzida R</u>

Se temos um sistema onde n>m (mais colunas que linhas) deverá haver, no mínimo, n-m variáveis livres (por que?)

Quando haverá mais variáveis livres?

Haverá mais se as linhas forem dependentes (na matriz R se reduzem a zero)

Às variáveis livres podemos atribuir qualquer valor (escolhemos "0" e "1" por ser mais fácil)

Se temos variáveis livres teremos mais soluções no espaço nulo, além da trivial x=0...

Logo, haverá infinitas soluções (pois: se para um x≠0 temos que Ax=0, então para qualquer "c" as outras soluções A(cx) também serão zero).

De fato, o espaço nulo de A que é N(A) (que é o mesmo que o N(R) pois só fizemos CL´s) terá a dimensão igual ao número de variáveis livres.

As variáveis livres determinam a dimensão do espaço nulo (que pertence ao espaço R^n) e elas se relacionam com as variáveis pivô do espaço coluna (que pertence a R^m) pois a soma das livres mais as pivô dão o total de variáveis...

Vamos agora a resolver o caso não homogêneo Ax=b, ou Ux=c ou agora Rx=d

Retornemos a nossa matriz U...

Espaços Vetoriais

Solução de Ax=0 e Ax=b e a matriz reduzida R

Agora, como estamos no caso **b≠0**, as operações nas linhas tem que ser estendidas à coluna b

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 9 & 7 \\ -1 & -3 & 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad U = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 - 2b_1 \\ b_3 - 2b_2 + 5b_1 \end{bmatrix}$$

O vetor do lado direito que aparece após a triangulação da matriz A do lado esquerdo é simplesmente $L^{-1}b$ por quê?

Porque foi EA que levou a U portanto, do lado direito teremos o mesmo, ou seja, Eb leva a c e sabemos que $L \equiv E^{-1}$ portanto $L^{-1} = E$ ficando $L^{-1}b$ (que é igual a $c = L^{-1}b$).

Então acima chegamos a Ux=c, mas não sabemos se tem solução!

Olhando as equações vemos facilmente que $b_3 - 2b_2 + 5b_1$ é inconsistente (a menos que seja =0)...

Retomemos nosso exercício acima....

Espaços Vetoriais

Solução de Ax=0 e Ax=b e a matriz reduzida R

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 9 & 7 \\ -1 & -3 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 - 2b_1 \\ b_3 - 2b_2 + 5b_1 \end{bmatrix}$$

Interessante que: mesmo havendo mais incógnitas do que equações pode não haver nenhuma solução... mas, sabemos como procurar estas soluções (se é que elas existem)...

Sabemos que para que exista solução, b tem que estar no espaço coluna de A C(A) (**e não de R ou de U, pois são diferentes !!!!**).

Lembrando que o espaço nulo de A, U e R são os mesmos, mas não os espaços coluna!

Portanto as colunas de A são os vetores que determinam o C(A) e é onde b tem que estar para que exista solução.

Mas a segunda coluna de A é o triplo da primeira e a quarta coluna é a terceira menos a primeira....**exatamente essas colunas "dependentes" são aquelas sem pivôs** quando transformamos A em U.

Então qual é o espaço coluna C(A)?

Espaços Vetoriais

Solução de Ax=0 e Ax=b e a matriz reduzida R

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 9 & 7 \\ -1 & -3 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 - 2b_1 \\ b_3 - 2b_2 + 5b_1 \end{bmatrix}$$

O espaço coluna de A C(A) pode ser escrito de duas formas diferentes:

1. Como CL dos vetores coluna 1 e 3 (nosso método tradicional e bem entendido)
2. Como o plano de todos os vetores b que satisfazem $b_3 - 2b_2 + 5b_1$= 0 (esta condição determina um plano)

Vejam que todas as colunas satisfazem essa condição 2 e portanto estão nesse plano (checar) Geometricamente significa que o vetor (5, -2, 1) é um vetor perpendicular a cada uma das colunas de A (produto escalar de dois vetores!) e portanto não poderia ser uma CL destas colunas!

Vamos resolver nosso sistema para um b que permita solução, escolhemos para isso qualquer vetor b que satisfaz a condição $b_3 - 2b_2 + 5b_1$= 0 por exemplo (1,5,5)...

Espaços Vetoriais

Solução de Ax=0 e Ax=b e a matriz reduzida R

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 9 & 7 \\ -1 & -3 & 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 5 \end{bmatrix}$$

A triangulação gera U do lado esquerdo e c do lado direito, ou seja obtemos Ux = c ...

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

A última equação é 0=0 como esperado (pela nossa escolha do vetor b = 1,5,5)

A retrossubstituição gera as equações:

3w+3y = 3	de onde	w = 1-y
u+3v+3w+2y = 1	de onde	u = -2-3v+y

Agora o passo seguinte. Vamos determinar o espaço nulo. Assim, o passo seguinte é dar valores 0 e 1 ás variáveis livres e obter as soluções especiais x de Ax=0 que formam os vetores coluna cuja CL dá todas as soluções de Ax=0 e portanto geram o espaço nulo de A, N(A) (a solução completa será $x = x_P + x_N$)

$$x = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3v + y \\ v \\ -y \\ y \end{bmatrix} = v \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Quais eram os vetores das soluções especiais?

Espaços Vetoriais

Solução de Ax=0 e Ax=b e a matriz reduzida R

Com esses vetores da solução especial e uma solução particular da equação Ax=b (aquela que tem as variáveis livres iguais a zero ou qualquer outra) geramos a solução completa x do sistema Ax=0

$$x = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + v \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Geometricamente, as soluções preenchem uma superfície bidimensional (dentro do R^n que neste caso é R^4), mas não é um subespaço pois não inclui x=0. Ela é paralela ao espaço nulo N(A), mas deslocada pela adição da solução particular x_P

Resumo:

1. Transformamos Ax=b em Ux=c
2. Para as variáveis livres = 0 encontramos uma solução particular x_P de Ax = b e de Ux = c
3. Encontramos as soluções especiais da equação Ax=0 (as mesmas de Ux=0 ou Rx=0)

Assim obtivemos a solução completa do sistema

Espaços Vetoriais

Solução de Ax=0 e Ax=b e a matriz reduzida R

A utilização da matriz reduzida R facilita ainda mais esta procura pela solução completa do sistema.

Qual é a matriz R obtida a partir de U?

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Para obter R devemos ter zeros acima dos pivôs.

Para isso a nova linha (1) é a linha (1) menos a linha (2).

Logo devemos ter valores 1 na posição dos pivôs, para isso dividimos as linhas pelos valores dos pivôs.

Assim obtermos o sistema Rx=d (incluindo a transformação de c para d) da matriz reduzida R:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Deste sistema sai imediatamente (considerando a solução particular com as variáveis livres v=0 e y=0) que u=-2 e w=1

Ou seja os primeiros elementos não nulos do vetor d são os valores de u e w, as variáveis pivôs.

Espaços Vetoriais

Solução de Ax=0 e Ax=b e a matriz reduzida R

Conclusões:

A eliminação de Gauss revela quais são as variáveis livres e quais as variáveis pivô.

Se houver r variáveis pivô haverá n-r variáveis livres

r é denominado Posto (Rank) da matriz

Portanto as últimas m-r linhas de U e R serão nulas o que leva a que os últimos m-r elementos de c e d sejam nulos também!!!

Se escolhemos a solução particular x_P como sendo aquela que tem as variáveis livres iguais a zero, teremos que os primeiros r elementos do vetor d (do sistema $Rx_P=d$) serão os valores das variáveis pivô

Finalmente as soluções de espaço nulo x_N (que somadas ao x_P dão a solução completa do sistema) são as combinações de n-r soluções especiais tomando uma variável livre por vez diferente de zero (fazemos ela igual a 1).

As variáveis pivô nesta solução especial podem ser encontradas na coluna correspondente de R com o sinal trocado (como vimos no exemplo da matriz 2x2)

Vejamos mais um exemplo....

Espaços Vetoriais

Solução de Ax=0 e Ax=b e a matriz reduzida R

Exemplo de uma matriz A 3x4 do sistema Ax=b

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 5x_4 &= b_1 \\ 2x_1 + 4x_2 + 8x_3 + 12x_4 &= b_2 \\ 3x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 13x_4 &= b_3 \end{aligned}$$

1 passo: transformar Ax=b para Ux=c

2 passo: encontre qual é a condição sobre b_1, b_2, b_3 para que exista uma solução

3 passo: determine qual é o espaço coluna de A, C(A)

4 passo: Determine qual é o espaço nulo de A, N(A)

5 passo: encontre uma solução particular de Ax=b (b permitido)

6 passo: reduza Ux=c para Rx=d, nesta forma determinamos tudo de uma vez (soluções especiais e particulares) ou fazemos Rx=0 e resolvemos as especiais...

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 & b_1 \\ 2 & 4 & 8 & 12 & b_2 \\ 3 & 6 & 7 & 13 & b_3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 & b_1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & b_2 - 2b_1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & b_3 - 3b_1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 & b_1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & b_2 - 2b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_3 + b_2 - 5b_1 \end{bmatrix}$$

A última equação dá a condição para que exista a solução $b_3 + b_2 - 5b_1 = 0$ (0=0)

Espaços Vetoriais

Solução de Ax=0 e Ax=b e a matriz reduzida R

A partir destas equações, qual é o espaço coluna C(A)?

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 & b_1 \\ 2 & 4 & 8 & 12 & b_2 \\ 3 & 6 & 7 & 13 & b_3 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 & b_1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & b_2 - 2b_1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 & b_3 - 3b_1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 & b_1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & b_2 - 2b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_3 + b_2 - 5b_1 \end{bmatrix}$$

A última equação dá a condição para que exista a solução $b_3 + b_2 - 5b_1$ = 0 (0=0)

O C(A) é o plano formado pelos vetores coluna de A que contem os pivôs (identificados em U) e é um plano em R^3. Os vetores coluna são (1,2,3) e (3,8,7).
A outra descrição é a do plano formado pelos vetores que satisfazem $b_3 + b_2 - 5b_1 = 0$

Quais são as soluções especiais x no espaço nulo N(A)?

São as soluções com x_2=1 x_4=0 e x_2=0 x_4=1

$$N(A) = \begin{bmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

São as soluções especiais de Ax=0, ou por retrossubstituição em Ux=0 ou por troca de sinais em Rx=0

Espaços Vetoriais

Solução de Ax=0 e Ax=b e a matriz reduzida R

Vamos escolher um vetor b que pertença a C(A), por exemplo (0, 6, -6), qual é o vetor c de Ux=c ?

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & 2 & 3 & 5 & b_1 \\ 0 & 0 & \mathbf{2} & 2 & b_2 - 2b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_3 + b_2 - 5b_1 \end{bmatrix} \quad c = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Vamos agora obter a matriz R e o vetor d de Rx=d

Primeiro **dividimos a linha pivô pelo pivô** para obter o número 1 nessa posição

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & 2 & 3 & 5 & b_1 \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 1 & \dfrac{b_2 - 2b_1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_3 + b_2 - 5b_1 \end{bmatrix}$$

Logo precisamos eliminar o elemento a_{13}

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & 2 & 0 & 2 & b_1 - 3\dfrac{b_2 - 2b_1}{2} \\ 0 & 0 & \mathbf{1} & 1 & \dfrac{b_2 - 2b_1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b_3 + b_2 - 5b_1 \end{bmatrix} \qquad d = \begin{bmatrix} -9 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Espaços Vetoriais

<u>Solução de Ax=0 e Ax=b e a matriz reduzida R</u>

Esta matriz R e este vetor d da equação Rx=d permitem obter diretamente a solução particular (variáveis livres nulas)

$$R = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \boxed{2} & 0 & \boxed{2} \\ 0 & \boxed{0} & \mathbf{1} & \boxed{1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad d = \begin{bmatrix} \boxed{-9} \\ \boxed{3} \\ 0 \end{bmatrix}$$

O vetor x_P é composto pelas variáveis livres = 0 e pelas variáveis pivôs que são os dois primeiros elementos do vetor d (os não nulos):

$$x_P = \begin{bmatrix} \boxed{-9} \\ 0 \\ \boxed{3} \\ 0 \end{bmatrix}$$

Já os vetores do N(A) (das soluções especiais) são formados pelos valores 0 e 1 das variáveis livres (v e y) e os valores das variáveis pivô (u e w) em N(A) são os elementos das colunas **<u>NÃO PIVÔ</u>** na matriz R com sinal invertido

$$N(A) = \begin{bmatrix} \boxed{-2} & \boxed{-2} \\ 1 & 0 \\ \boxed{0} & \boxed{-1} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Exercícios

Livro Álgebra Linear e suas aplicações. Gilbert Strang. 4 edição

Página 85

Conjunto de problemas 2.2

Resolver: 1; 2; 3; 4; 13; 14; 15; 26; 34; 36; 50; 53;

Espaços Vetoriais

Independência linear, base e dimensão

Vimos que o posto r de uma matriz é o número de variáveis pivô...que é o numero de equações (linhas) independentes.

Se a CL de um conjunto de vetores $av_1 + bv_2 + cv_3 + \dots + fv_n$ só for igual a zero quando todos os coeficientes a, b, c, ... forem zero, então eles são linearmente independentes.

Exemplo de colunas LD (linearmente dependentes): $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 9 & 5 \\ -1 & -3 & 3 & 0 \end{bmatrix}$

Exemplo de colunas LI (linearmente independentes): $A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

Por ter três pivôs, a matriz A tem todas as colunas e linhas LI, a única forma de ter Ax=0 é quando x =0 (vetor nulo). Portanto o espaço nulo contem somente o vetor nulo.

Conclusão: as colunas de A são LI se N(A)={vetor nulo}. O mesmo se aplica ás linhas de A.

As linhas não nulas de qualquer matriz U são LI (as outras dão zero).

As colunas com Pivôs são certamente LI (tem componentes em direções que os outros não tem)

Espaços Vetoriais

Independência linear, base e dimensão

Mais algumas conclusões:

Um conjunto de n vetores em R^m é linearmente dependente se n>m (é a mesma coisa que dizer que um sistema mxn tem uma solução Ax=0 com $x \neq 0$ se n>m)

Exemplo: as três colunas em R^2 da matriz A NÃO PODEM SER LI pois n>m

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

Para encontrar a CL que produz zero resolvemos Ax=0 por eliminação (encontramos U)...

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

As colunas pivôs são a (1) e a (2) portanto a coluna (3) é a coluna da variável livre que para um vetor coluna x (u,v,w) é a variável w.

Fazendo w=1 (variável livre) encontramos que Ux=0 para u=1, v=-1, w=1 e portanto temos que são dependentes.

Vamos ver agora a importância de conhecer o Posto (Rank) de uma matriz e sua relação com as soluções das equações que formaram essa matriz.

Espaços Vetoriais

Independência linear, base e dimensão

Imagine uma matriz A mxn, podemos ter : r<m; r<n; r=m; r=n; r=m=n; r<n e r<m

Analisemos primeiro o caso de uma matriz A de Posto **r = n**

Qual é o espaço nulo desta matriz? Qual é sua solução completa? Quantos pivôs e livres ?

O espaço nulo é o vetor nulo N(A)= vetor nulo (r=n tem um pivô em cada coluna!)

Solução completa de Ax=b é $x=x_P$!!! (pois o espaço nulo é zero...... e $x=x_P+x_N$)

É a única solução (se é que ela existe) portanto temos: **0 ou 1 solução** (depende do b)

Exemplo: $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ 6 & 1 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$

Qual é o posto? (quantos pivôs teremos ao aplicar a eliminação?)

r=2 ...pivôs nas duas primeiras e elimino todas as outras linhas!

Qual é a matriz R ?

$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Temos somente duas linhas LI, as outras são CL das duas primeiras

Nenhuma CL das colunas dá o vetor 0 (só a CL com coeficientes 0)

Quando há solução de Ax=b? (quatro equações e duas variáveis)

Só quando b é CL dessas colunas senão não teremos solução!

Espaços Vetoriais

Independência linear, base e dimensão

Analisemos o caso de uma matriz A(mxn) de Posto **r = m**

Quantos pivôs e variáveis livres ? m pivôs! e n-r variáveis livres Toda linha tem um pivô

Para qual b existe solução? Para todo b (ao fazer a eliminação não obtemos nenhuma linha "zero" portanto não há exigências sobre b!!! **Sempre existe solução**)

Como temos n-r (n-m) variáveis livres....infinitas soluções (diferentes valores para as variáveis livres) vejamos isso através da matriz R...

Exemplo: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 6 & 5 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ Qual é a R? $R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & - & - \\ 0 & 1 & - & - \end{bmatrix}$

Este caso foi r = m < n, temos soluções e podem ser 1 ou infinitas para qualquer b

Vejamos agora o caso foi **r = m = n** Exemplo: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ R é: $R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Como ao mesmo tempo temos **r = m** e **r = n** teremos só uma solução (condições anteriores)

Espaços Vetoriais

Independência linear, base e dimensão

Resumo:

r = m = n

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \equiv \mathbb{I}$$

Uma solução para Ax=b

r = n < m

$$R = \begin{bmatrix} \mathbb{I} \\ 0 \end{bmatrix}$$

0 ou 1 solução para Ax=b

r = m < n

$$R = \begin{bmatrix} \mathbb{I} & \mathbb{F} \end{bmatrix}$$

Infinitas soluções de Ax=b

Neste caso não necessariamente as colunas de $\mathbb{I}$ estarão primeiro, podem estar misturadas com as colunas das variáveis livres da matriz $\mathbb{F}$

r < m , r < n

$$R = \begin{bmatrix} \mathbb{I} & \mathbb{F} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

0 ou infinitas de Ax=b

O Posto (Rank) r informa todo sobre o número de soluções!!!

Vamos ver agora a **base e dimensão de um espaço**.

Espaços Vetoriais

Independência linear, base e dimensão

Independência vetorial e matrizes

Os vetores x_1, x_2, x_3,...,x_n são independentes se a **única forma** de obter:

$$c_1x_1+c_1x_2+c_1x_3+...+c_1x_n = 0$$

é quando **todos** os c_1, c_2, c_3,...,c_n = 0

Exemplos em R^2 de dependência e independência....o caso do vetor zero.

Com o vetor zero presente não há independência vetorial possível, ele é sempre dependente!

Caso de três vetores em R^2 (exemplo com vetores coluna de matrizes m<n)

Colocando vetores nas colunas de matrizes, eles serão independentes se o espaço nulo contem só o vetor nulo!

Neste caso o Posto r=n para vetores independentes (0 variáveis livres) e r<n para vetores dependentes (existem variáveis livres)

Espaços Vetoriais

Independência linear, base e dimensão

Dimensão de um espaço vetorial:

É o número de vetores independentes que geram o espaço, essa é sua dimensão (são seus graus de liberdade)

A base é o conjunto de vetores independentes máximo possível.

Exemplos em R^2 e R^3

Base de um espaço vetorial:

Os vetores que formam a base de qualquer espaço T (ou N(A) ou C(A) etc.) são LI

Eles geram o espaço T (todo vetor desse espaço T é uma CL destes vetores base)

Há infinitas bases em qualquer espaço vetorial T (exemplos em R^3)

Bases sempre formam matrizes quadradas nxn ....que são invertíveis!!! (são infinitas) e todas tem a mesma dimensão n!!! (o mesmo número de vetores LI)

O Posto r de uma matriz A é sempre a dimensão do C(A), Dim C(A)=r

No caso do espaço nulo N(A) temos que Dim N(A)= Nº variáveis livres = n-r

Exercícios

Livro Álgebra Linear e suas aplicações. Gilbert Strang. 4 edição

Página 98

Conjunto de problemas 2.3

Resolver: 2; 3; 4; 14; 15; 16; 20; 22; 23; 24; 31;

Espaços Vetoriais

<u>Os quatro subespaços fundamentais</u>

Existem 4 subespaços vetoriais fundamentais na álgebra...

O espaço coluna C(A)

Sua dimensão é o posto r e está no espaço R^m (pois m são suas componentes)

O espaço nulo N(A)

Sua dimensão é n-r (variáveis livres) e está no espaço R^n (pois n são suas componentes)

O espaço linha de A que é $C(A^T)$

Ele é o espaço coluna de A^T ou seja $C(A^T)$

Sua dimensão é r e está no espaço R^n

O espaço nulo à esquerda de A que é $N(A^T)$

Ou seja o espaço nulo de A^T ....$N(A^T)$

Sua dimensão é m-r (m colunas – r pivôs!!) e está no espaço R^m

Esse espaço (por definição) contem todos os vetores y tais que $A^T y = 0$ (isso é o espaço nulo de A^T) ou transpondo o produto temos: $y^T A = 0$ ...o vetor aparece à esquerda

Exemplo: $A = U = R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ Qual é o espaço coluna, o espaço linha, o espaço nulo e o espaço nulo à esquerda desta matriz?

Espaços Vetoriais

<u>Os quatro subespaços fundamentais</u>

$$A = U = R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

O espaço coluna C(A) é $C(A) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ sua dimensão é o posto r, que é 1, portanto é uma reta que está em R^2 (R^m)

O espaço linha de A que é C(A^T) é... a reta que passa por $(1,0,0)^T$, esta reta está em R^3 (R^n) e a dimensão do espaço linha é R^1 também (n-r)

O espaço nulo N(A) é...temos um único pivô...portanto as colunas de variáveis livres são (2) e (3)

Logo dando valores 0 e 1 às variáveis v e w teremos as soluções especiais que determinam a matriz nula N(A)
Ele é um plano em R^3 (três variáveis) (R^n)

$$N(A) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

O espaço nulo à esquerda de A é o espaço nulo da matriz transposta A^T
N(A^T) portanto , como temos uma única variável livre na A^T ...
N(A^T) é uma reta em R^2 (duas variáveis) (R^m)

$$N(A^T) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Espaços Vetoriais

Os quatro subespaços fundamentais

Vamos relacionar os 4 subespaços fundamentais de A com os quatro subespaços fundamentais de U. Vejamos nossas conhecidas matrizes a seguir

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 9 & 7 \\ -1 & -3 & 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad U = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

No caso de uma matriz U "escalonada" o espaço linha é evidente (que contem todas as linhas LI). As linhas diferentes de zero são uma base desse espaço (aqui é um plano em R^4). Desta forma a regra é essa: "as linhas não nulas são uma base e o espaço linha que tem dimensão r".
Como a eliminação de Gauss não modifica o espaço linha, temos que o espaço linha de A é o mesmo que o espaço linha de U ou de R e todos tem a mesma dimensão r. (eles podem ter linhas diferentes mas são CL umas das outras e portanto estão no mesmo espaço!)
Por que isso não se aplica ao espaço coluna ao passar de A para U?
Porque ao combinar as linhas mudamos as coordenadas dos vetores coluna de forma diferente logo mudam de direção, saem dos planos em que estavam e assim mudam o espaço!!!!

Espaços Vetoriais

Os quatro subespaços fundamentais

Vamos relacionar os 4 subespaços fundamentais de A com os quatro subespaços fundamentais de U. Vejamos nossas conhecidas matrizes a seguir

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 9 & 7 \\ -1 & -3 & 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad U = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Os espaços coluna (chamados imagens)

Então os espaços colunas de A e U são diferentes...(pelo que foi dito no slide anterior)
...mas suas dimensões são iguais (igual número de colunas LI).
As colunas pivô de U são uma possível base do espaço C(U)...assim como as mesmas colunas pivô de U mas agora em A (as colunas 1 e 3) são uma possível base do espaço C(A)!
Assim para encontrar uma base dos espaços coluna utilizamos as r colunas pivôs de U e essas mesmas colunas de A (os vetores são diferentes $\Rightarrow$ geram espaços diferentes com = dimensão)
A dimensão do espaço coluna é o posto r da matriz (que também é a dimensão do espaço linha, pois **o número de colunas LI é igual ao número de linha LI sempre**!)

Espaços Vetoriais

Os quatro subespaços fundamentais

Vamos relacionar os 4 subespaços fundamentais de A com os quatro subespaços fundamentais de U. Vejamos nossas conhecidas matrizes a seguir

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 9 & 7 \\ -1 & -3 & 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad U = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Relação entre os espaços nulos (chamados núcleos)

O método de eliminação que permite ir de Ax=0 para Ux=0 e para Rx=0 não altera as soluções das equações (opera da mesma forma em todas as variáveis cuja CL da zero).

Portanto os espaços nulos de A, U e R são iguais! E como temos apenas r equações independentes (por isso escolhemos n-r soluções especiais com 0 e 1 para as variáveis livres para encontrar o espaço nulo) a dimensão do espaço nulo é n-r (denominada nulidade).

A seguir, por retro substituição, encontramos os valores das variáveis pivô e está resolvido o espaço nulo de A e de U (podem ser vetores diferentes, mas estarão no mesmo espaço).

Espaços Vetoriais

Os quatro subespaços fundamentais

Vamos relacionar os 4 subespaços fundamentais de A com os quatro subespaços fundamentais de U. Vejamos nossas conhecidas matrizes a seguir

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 9 & 7 \\ -1 & -3 & 3 & 4 \end{bmatrix} \qquad U = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Os espaços nulos à esquerda ($N(A^T)$)

Para uma matriz mxn seu espaço $N(A^T)$ é um subespaço em R^m (pois agora m são as colunas da A^T) O espaço nulo das linhas de A (ao final é disso que estamos falando) é uma CL das linhas de A que resulta em zero que, ...se escrito através de um vetor coluna y é:

$$y^T A = [y_1 \quad y_2 \quad y_3] \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 9 & 7 \\ -1 & -3 & 3 & 4 \end{bmatrix} = [0 \quad 0 \quad 0]$$

Qual a dimensão de $N(A^T)$?

Espaços Vetoriais

Os quatro subespaços fundamentais

Os espaços nulos à esquerda ($N(A^T)$)

Para uma matriz mxn seu espaço $N(A^T)$ é um subespaço em R^m (colunas da A^T)
O espaço nulo das linhas de A (ao final é disso que estamos falando) é uma CL das linhas de A que resulta em zero, se escrito através de um vetor coluna y é:

$$y^T A = [y_1 \quad y_2 \quad y_3] \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 9 & 7 \\ -1 & -3 & 3 & 4 \end{bmatrix} = [0 \quad 0 \quad 0]$$

Qual a dimensão de $N(A^T)$?

É evidente que sempre o número de colunas é igual ao numero de variáveis pivô mais as livres!

ou seja: r + (n-r) = n

em outras palavras: Posto + Nulidade = n

ou: Dim C(A) + Dim N(A) = n

Se aplicamos esta última igualdade diretamente à matriz A^T (m colunas) teremos: r + Dim $N(A^T)$ = m de onde Dim $N(A^T)$ = m-r

Espaços Vetoriais

<u>Os quatro subespaços fundamentais</u>

Exemplo: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ Neste caso m=n=2 e qual é o posto r? Neste caso r=1

O espaço coluna C(A) é $C(A) = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ Que corresponde á primeira coluna da Matriz U!!!

O espaço linha de A que é C(A^T) é... São todos os múltiplos de $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, uma linha reta em R^2

O espaço nulo N(A) é...temos um único pivô...portanto a coluna da única variável livre é (2)

Logo dando valor 1 à variável livre teremos a solução especial que determina a matriz nula N(A) Ela é uma reta no plano R^2

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad N(U) = N(A) = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

O espaço nulo à esquerda de A: como temos uma única variável livre na A^T ...

Também é uma reta em R^2 (duas variáveis)

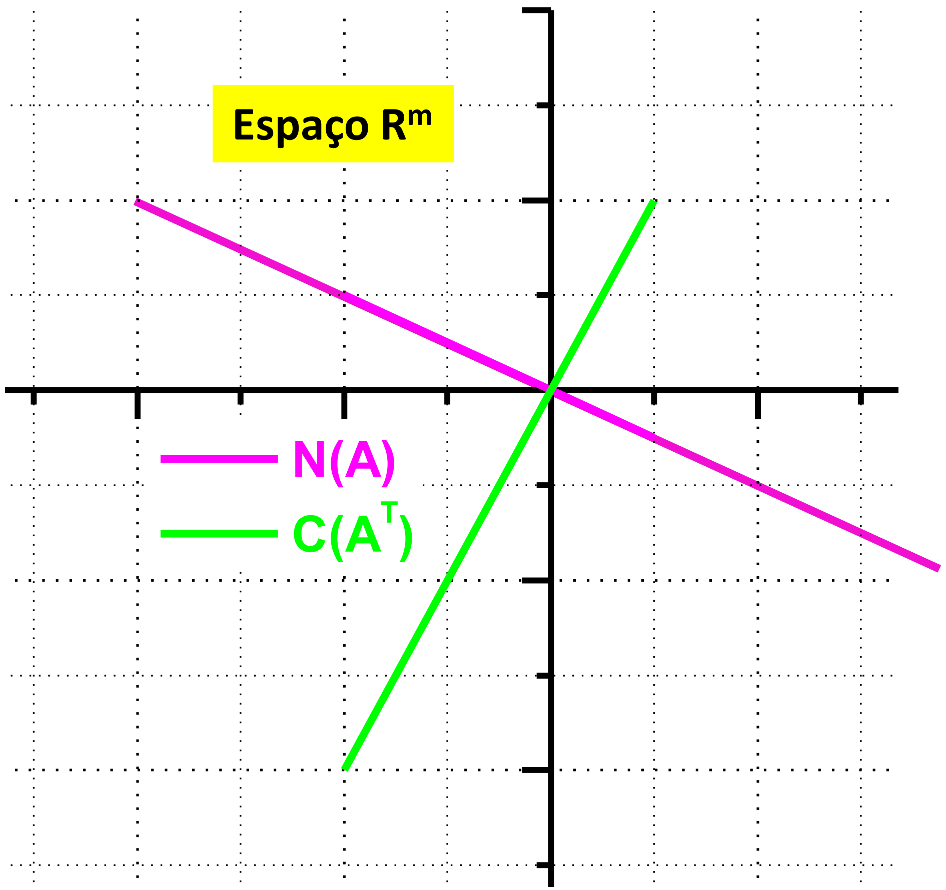
$$N(A^T) = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

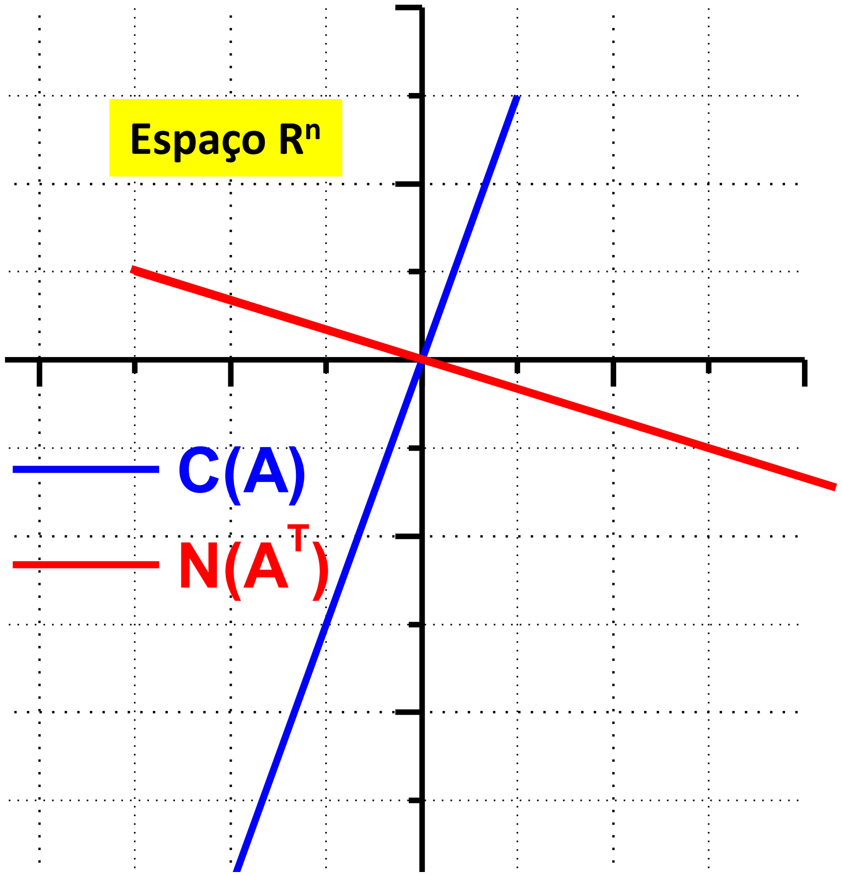
Espaços Vetoriais

Os quatro subespaços fundamentais

Exemplo: $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$ $C(A) = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ Espaço linha $= \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ $N(A) = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ $N(A^T) = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \end{bmatrix}$

Relação geométrica entre estes espaços da matriz A(mxn), são perpendiculares aos pares!!!





Exercícios

Livro Álgebra Linear e suas aplicações. Gilbert Strang. 4 edição

Página 111

Conjunto de problemas 2.4

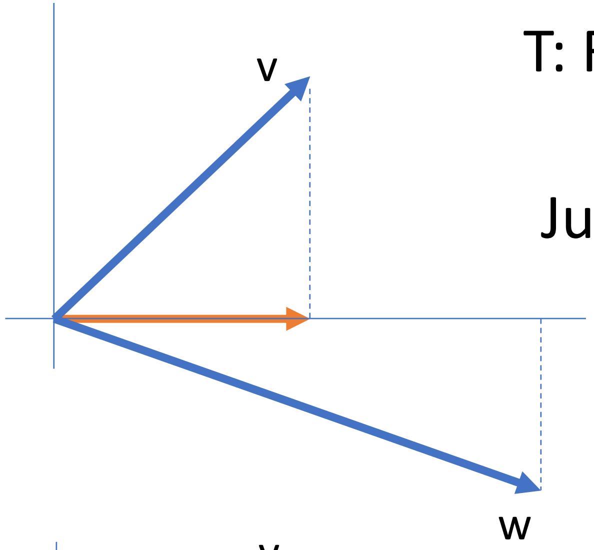
Resolver: 2; 7; 11; 18; 24; 25; 28

Espaços Vetoriais

Transformações Lineares - TL

Podem ser feitas com coordenadas (implica matrizes) ou sem coordenadas. Vamos começar com exemplos para explicar as TL, inicialmente sem considerar coordenadas.

Vamos ver as <u>projeções</u> (caso sem coordenadas), por exemplo de vetores de R^2 sobre o eixo das abcissas (que é um subespaço em R^2)



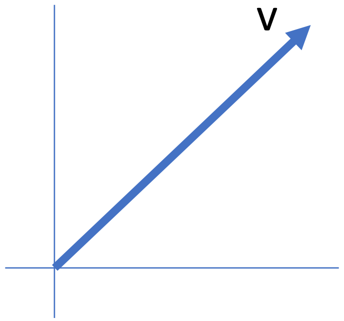
$T: R^2 \to R^2$ É uma TL?.... Regras para ser uma TL:

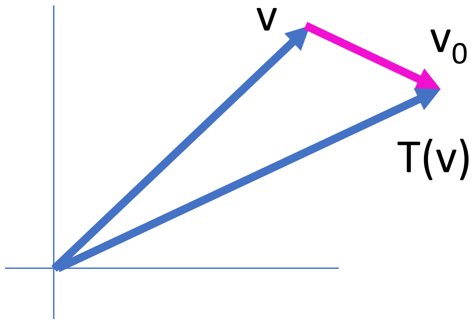
$T(v+w) = T(v)+T(w)$

$T(cv) = cT(v)$

Juntando as duas condições temos para as TL: $T(cv+dw) = cT(v)+dT(w)$

<u>Vejamos outro exemplo</u>: o deslocamento de todo o plano pelo vetor v_0





Transforma todos os vetores do plano inicial em outros vetores...é uma TL?

<u>Não</u>!!! Se duplicamos v mas não duplicamos v_0 não teremos 2 T(v)!!!

Evidentemente para que seja TL temos T(0)=0 o que não se cumpre neste caso!

Espaços Vetoriais

Transformações Lineares - TL

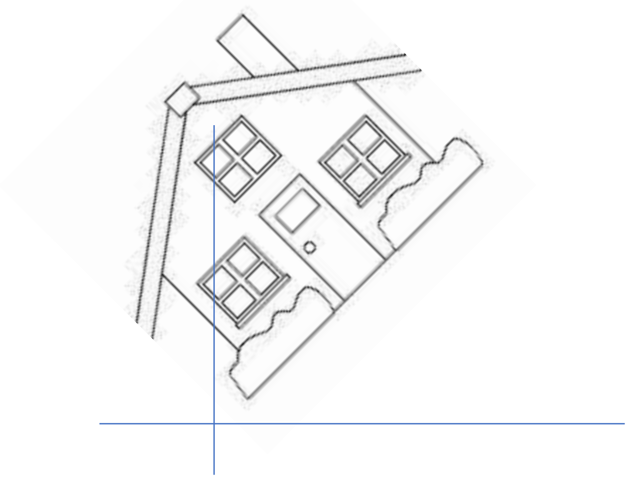
Outro exemplo: $T(v)= \|v\|$ $T:R^3 \rightarrow R^1$ É linear? **Não!** $T(cv+cw) \neq cT(v) + cT(w)$, $c<0$

Outro exemplo: T: Rotação 45º $T:R^2 \rightarrow R^2$ .....é linear? **Sim!**

Outro exemplo!!!: suponha uma matriz A que opera no vetor v...T(v) = Av....é linear? **Sim**

$$A(v+w) = A(v)+A(w)$$
$$A(cv) = c(Av)$$

Outro exemplo: suponha uma casa sobre a qual opera T: Rotação 45º qual o resultado?



E se operamos na casa com a matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

O que aconteceria com cada vetor que forma a casa?

Espaços Vetoriais

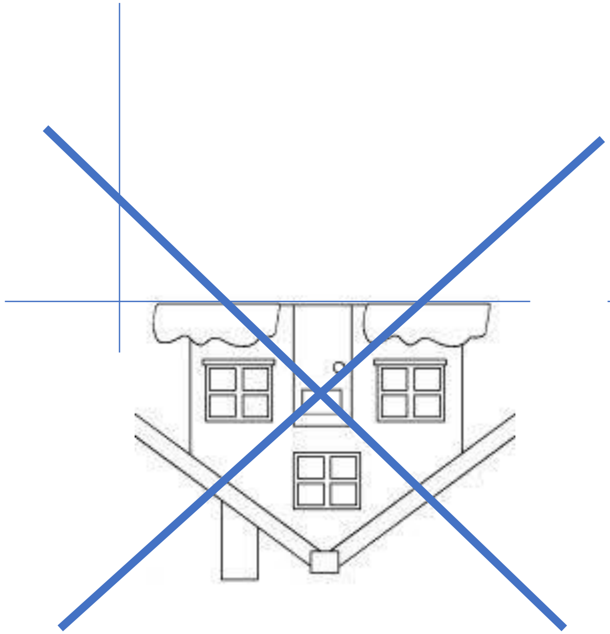
Transformações Lineares - TL

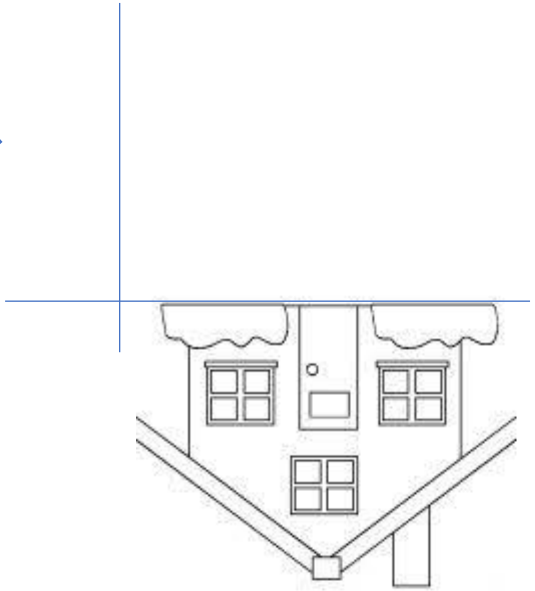
Operamos na casa com a matriz: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

O que faz esta matriz num vetor com componentes (x,y)?

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = ? \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}$$

Então a casa vai ficar:





Espaços Vetoriais

Transformações Lineares - TL

Por trás de toda TL há uma matriz!!! Esse é nosso ponto!

Encontrar a matriz que se esconde por trás de toda TL!!!

Como fazer?

Vamos supor que temos uma TL que atua sobre vetores em R^3 e resulta em vetores em R^2 ou seja, $T:R^3 \rightarrow R^2$, ...qual seria um exemplo dessa transformação?

Por exemplo, $T(v)=Av$ com uma matriz 2x3, multiplica um vetor em R^3 e resulta em vetores em R^2

Agora, vamos supor que sabemos que há uma TL operando, mas não sabemos qual é essa TL especifica....como podemos descobrir qual é essa TL? ou seja, qual é a matriz detrás dela?

Que informações são necessárias para que a TL esteja univocamente definida?

Se recebemos a informação de que x_1 se transformou em x_1' é suficiente?

Não, há infinitas TL´s que podem fazer isso

Se temos agora outra informação, para x_2 que se transforma em x_2' agora é suficiente? ou vamos ter que ter infinitas informações?

Espaços Vetoriais

Transformações Lineares - TL

Se conhecemos Ax para dois vetores LI conhecemos Ax (ou seja, a transformação linear) para cada vetor do espaço definido pelos dois vetores LI

Por quê?

Pela propriedade já conhecida de que A(cx)=cAx e A(x+y)=Ax+Ay portanto podemos construir a transformação de qualquer vetor desse espaço definido por essas bases!!!

Portanto se conhecemos como a TL atua sobre a base de um espaço R^n saberemos como a TL transforma qualquer vetor desse espaço, portanto temos todo o que precisamos para descobrir a matriz da TL!

Ok, vamos construir a matriz A que executa a TL denominada T definida pelo que sabemos sobre como opera nas bases do espaço. Vamos supor que a T faz $T:R^n \rightarrow R^m$

Aqui temos duas bases, a base dos vetores R^n de entrada e a base dos vetores R^m de saída

Vamos fazer o seguinte: vamos tomar qualquer vetor v e expressar ele como uma CL da sua base: $v = c_1v_1 + c_2v_2 + ...+ c_nv_n$

Sobre ele vai operar nossa matriz desconhecida A e transformar este vetor no vetor $w = d_1w_1 + d_2w_2 + ...+ d_mw_m$...

Espaços Vetoriais

Transformações Lineares - TL

Qual é a matriz A que faz isso?

Vamos colocar um exemplo concreto, vamos supor que sabemos que:

$x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ se transforma em $Ax_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ $\quad$ $x_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ se transforma em $Ax_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 8 \end{bmatrix}$

A pergunta é **qual matriz A faz isso**?

Evidentemente (por ser uma CL de colunas) $\quad A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 6 \\ 4 & 8 \end{bmatrix}$

Vejamos o caso dos espaços P_n dos polinômios de grau n: $p = a_0 + a_1\, t + a_2 t^2 + \ldots + a_n\, t^n$

Especificamente vejamos a operação de diferenciação de polinômios A ≡ d/dt...é linear?

Qual a dimensão do espaço coluna de A para um polinômio de grau n? $\quad$ n (do P_{n-1} que resulta da diferenciação)

Qual é o espaço nulo dessa A? $\quad$ O espaço unidimensional das constantes!

Qual é o posto? $\quad$ n - a dimensão do polinômio original (pois perde 1 grau na diferenciação)

O primeiro passo para encontrar A é encontrar a a base do espaço do domínio!

Espaços Vetoriais

Transformações Lineares - TL

Na diferenciação de polinômios a base natural dos polinômios é 1, t, t^2,..., t^n (n+1 vetores)

As derivadas destes n+1 vetores são 0, 1, 2t,...,nt^{n-1}...por isso a base de terá n vetores

Vejamos o caso dos polinômios de grau 3......neste caso teremos 4 vetores base no espaço dos polinômios (domínio) 1, t, t^2 e t^3

As derivadas destes 4 vetores são 0, 1, 2t e $3t^2$ onde 1, t, t^2 são a base do espaço imagem

A matriz A (diferenciação) faz o seguinte entre estes dois espaços (suas bases incluídas):

$Ap_1=0$ $Ap_2=p_1$ $Ap_3=2p_2$ e $Ap_4=3p_3$

A operação "diferenciar" (derivar) atua como uma matriz!, mas qual é a matriz?

Para isso precisamos da base Escolhemos: $p_1(1,0,0,0)$; $p_2(0,1,0,0)$; $p_3(0,0,1,0)$; $p_4(0,0,0,1)$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & t & t^2 & t^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2t & 3t^2 \end{bmatrix}$$

Espaços Vetoriais

Transformações Lineares - TL

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ap_1 deu a primeira coluna (0000)

$Ap_2=p_1$ dá a segunda coluna

$Ap_3=2p_2$

$Ap_4=3p_3$

Esta matriz A deriva qualquer polinômio de grau 3

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Exemplo: $2+t-t^2-t^3$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$1-2t-3t^2$

A regra, para construir a matriz A, coluna por coluna, é:

Coluna j da matriz A é a $T(x_j) = a_{1j}\,y_1+a_{2j}y_2+\ldots+a_{mj}y_m$

Ou seja, aplicamos a TL ao j-ésimo vetor base x_j (do espaço de partida) e o escrevemos como um CL da base da imagem

Espaços Vetoriais

Transformações Lineares - TL

O mesmo pode ser feito no caso da integração

No caso de um polinômio de grau 3 ele vai se transformar num de grau 4, ou seja transformando **V**=$\mathbf{P}_3$ em **W**=$\mathbf{P}_4$...agora precisamos de uma base para **W**!

A escolha natural de vetores-base é:

$y_1=1 \quad y_2=t \quad y_3=t^2 \quad y_4=t^3 \quad y_5=t^4$

A matriz A será m x n, ou seja 5 x 4, que decorre da aplicação integral a cada vetor-base de **V**

$\int_0^t 1\, dt = t$ ou $Ax_1 = y_2$ .... $\int_0^t t^3\, dt = \frac{1}{4} t^4$ ou $Ax_4 = \frac{1}{4} y_5$

$$\textbf{Matriz integração } \boldsymbol{A_{int}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 \end{bmatrix}$$

Espaços Vetoriais

Transformações Lineares - TL

Integração e diferenciação são operações inversas (pelo menos na seguinte ordem: primeiro integramos e depois diferenciamos para ter a mesma função original) portanto neste caso precisamos de uma matriz diferenciação do 4 para o 3 grau, ou seja 4 x 5:

$$\boldsymbol{A_{dif}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Logo:

$$\boldsymbol{A_{dif}A_{int}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A diferenciação é a inversa pela esquerda da integração. Na ordem inversa isso não é verdadeiro (a primeira coluna seria de zeros)...

Exercícios

Livro Álgebra Linear e suas aplicações. Gilbert Strang. 4 edição

Página 133

Conjunto de problemas 2.6

Resolver: 1; 2; 5 (a, b, c); 9; 12; 13; 17; 26; 28; 38