ALGEBRA LINEAR

Prof. Dr. Patricio R. Impinnisi

Aula 2

Eliminação de Gauss

Multiplicação de matrizes

Matrizes inversas

Eliminação de Gauss

É o método utilizado pelos softwares para resolver as equações

- ❖ Eliminação (se bem sucedida)
- ❖ Retro substituição
- ❖ Operações com matrizes
- ❖ Multiplicação de matrizes

Exemplo

- $x + 2y + z = 2$
- $3x + 8y + z = 12$
- $4y + z = 2$

A $\mathbf{x}$ = b

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 8 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

A

Eliminação de Gauss

Inicialmente vamos eliminar x .... logo y...

- $x + 2y + z = 2$
- $3x + 8y + z = 12$
- $4y + z = 2$

$1^{\underline{er}}$ pivô $2^{\underline{do}}$ pivô $3^{\underline{er}}$ pivô

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & 1 \\ 3 & 8 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{(2)-3x(1)} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & 1 \\ 0 & \boxed{2} & -2 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{(3)-2x(2)} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & 1 \\ 0 & \boxed{2} & -2 \\ 0 & 0 & \boxed{5} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & 1 \\ 0 & \boxed{2} & -2 \\ 0 & 0 & \boxed{5} \end{bmatrix} \equiv \mathrm{U}$$

- Evidentemente os pivôs não podem ser zero!!!
- E se tivermos zeros nessa posição?
- Trocamos as linhas!
- E se a as outras linhas tem zeros nessa posição?
- Nesses casos teremos uma falha irreparável
- Neste caso a matriz será singular.

Eliminação de Gauss

Retornamos a nosso caso não singular e vamos transformar b!

- $x + 2y + z = 2$
- $3x + 8y + z = 12$
- $4y + z = 2$

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & 1 & \boxed{2} \\ 3 & 8 & 1 & 12 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{(2)-3x(1)} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & 1 & 2 \\ 0 & \boxed{2} & -2 & 6 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{(3)-2x(2)} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & 1 & 2 \\ 0 & \boxed{2} & -2 & 6 \\ 0 & 0 & \boxed{5} & -10 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & 1 \\ 0 & \boxed{2} & -2 \\ 0 & 0 & \boxed{5} \end{bmatrix} \equiv \mathrm{U} \qquad \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \\ -10 \end{bmatrix} \equiv \mathrm{c}$$

$\mathrm{A} \Rightarrow \mathrm{U}$

$\mathrm{b} \Rightarrow \mathrm{c}$

Vamos agora resolver as equações executando a retro substituição!

Eliminação de Gauss

Retornamos a nosso caso não singular e vamos transformar b!

- $x + 2y + z = 2$
- $3x + 8y + z = 12$
- $4y + z = 2$

$$\begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 8 & 1 & 12 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{(2)\text{-}3\text{x}(1)} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & 1 & 2 \\ 0 & \boxed{2} & -2 & 6 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{(3)\text{-}2\text{x}(2)} \begin{bmatrix} \boxed{1} & 2 & 1 & 2 \\ 0 & \boxed{2} & -2 & 6 \\ 0 & 0 & \boxed{5} & -10 \end{bmatrix}$$

Retro substituição!

- $x + 2y + z = 2$
- $2y - 2z = 6$
- $5z = -10$

$$\mathrm{U}\ \mathbf{x} = \mathrm{c}$$

$y = 1$

$x = 2$

$z = -2$

Agora vamos executar este procedimento com matrizes...

Eliminação de Gauss

Executando a Eliminação de Gauss com matrizes...

Vamos lembrar como se opera com matrizes...

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3a_{11} + 4a_{12} + 5a_{13} \\ 3a_{21} + 4a_{22} + 5a_{23} \\ 3a_{31} + 4a_{32} + 5a_{33} \end{bmatrix}$$

$$3\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix} + 4\begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{bmatrix} + 5\begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3a_{11} + 4a_{12} + 5a_{13} \\ 3a_{21} + 4a_{22} + 5a_{23} \\ 3a_{31} + 4a_{32} + 5a_{33} \end{bmatrix}$$

Matriz x Vetor Coluna = Vetor Coluna

CL de Colunas!!!

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3a_{11} + 4a_{21} + 5a_{31} & \dots & \dots \end{bmatrix}$$

1x3 3x3 = 1x3

Vetor linha x Matriz = Vetor linha

CL de linhas!!!

Eliminação de Gauss

Executando a Eliminação de Gauss com matrizes...

No nosso caso tínhamos...

- $x + 2y + z = 2$
- $3x + 8y + z = 12$
- $4y + z = 2$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 8 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Qual matriz vai executar o primeiro passo da nossa eliminação?

Ou seja:

$$\begin{bmatrix} ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 8 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

A primeira linha não muda então a CL das linhas é:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 8 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ ? & ? & ? \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 8 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Eliminação de Gauss

Executando a Eliminação de Gauss com matrizes...

E a linha do meio é...

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ ? & ? & ? \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 8 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Como seria a linha do meio para que nada mude?

Essa matriz particular é a matriz identidade!!! Desempenha o papel da multiplicação por 1...

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 8 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 8 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Vamos subtrair 3 da linha 1 e somar à linha 2...

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{E_{21}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 8 & 1 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & \boxed{-2} \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

De onde veio o elemento marcado?

E agora? ....Precisamos eliminar o elemento a_{32}

Eliminação de Gauss

Executando a Eliminação de Gauss com matrizes...

Vamos subtrair 2x a linha 2 da linha 3....será a matriz E_{32}...que é:

$$\begin{bmatrix} ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

A linha 1 fica sem modificação, o mesmo que a dois então...

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ ? & ? & ? \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

A terceira será a linha 3 menos 2x a linha 2 ....

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$$

Agora vamos juntar todo o procedimento numa única operação....

Eliminação de Gauss

Executando a Eliminação de Gauss com matrizes...

Colocando tudo junto (na mesma sequencia)...

$$E_{32}\,(E_{21}A) = U$$

Uma questão muito importante ...

...o parêntesis pode ser removido mas sem alterar a ordem de multiplicação das matrizes!!! (o produto de matrizes é associativo mas não comutativo)

$$(E_{32}\,E_{21})\,A = U$$

Antes de continuar vamos ver um tipo de matriz especial que permite comutar as linhas...a matriz permutação!

Eliminação de Gauss

Executando a Eliminação de Gauss com matrizes...

Matriz permutação...vejam um exemplo no caso 2 x 2

$$\begin{bmatrix} ? & ? \\ ? & ? \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & d \\ a & b \end{bmatrix}$$

$$\underset{P}{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c & d \\ a & b \end{bmatrix}$$

Como permutar as colunas?

$$\begin{bmatrix} ? & ? \\ ? & ? \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b & a \\ d & c \end{bmatrix}$$

Assim não é possível!!!!!

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b & a \\ d & c \end{bmatrix}$$

Moral da historia: para operar com linhas multiplicamos a partir da esquerda, se for para combinar colunas multiplicamos pela direita

Lembrar sempre que, em geral A·B ≠ B·A

Eliminação de Gauss

Executando a Eliminação de Gauss com matrizes...

Quantas matrizes de permutação de linhas existem no caso de A ser 3 x 3

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} A \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} A \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} A \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} A$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} A$$

Existem 6 matrizes P para uma matriz 3x3!

O que acontece se multiplicamos entre elas duas destas matrizes?

E se invertemos?

Ficamos sempre dentro do grupo destas 6 matrizes

E quais são as inversas...

Aqui, curiosamente, temos que $P^{-1}=P^T$ e portanto $P^TP=I$

Quantas P existem num sistema 4x4? 24 P!... n!

Retornemos a nosso problema de juntar todo numa única operação $(E_{32}\,E_{21})\,A = U$

Eliminação de Gauss

Executando a Eliminação de Gauss com matrizes...

A forma mais simples de fazer isso é transformar U em A e não A em U!!!

Ou seja, a operação inversa!!

Por isso vamos começar estudando a matriz inversa, o que é a matriz inversa e como se acha?

Vamos achar a matriz que desfaz a eliminação do termo a_{21} (-3 col1 + col2)...esta matriz é a matriz inversa! E ela deve satisfazer a condição:

$$\begin{bmatrix} ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{E_{21}^{-1}}\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{E_{21}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{I}$$

Para poder resolver o problema das matrizes inversas precisamos primeiro estudar como se multiplicam matrizes...

Exercícios

Livro Álgebra Linear e suas aplicações. Gilbert Strang. 4 edição

Conjunto de problemas 1.3 (página 15)

Resolver: 1; 2; 4; 7; 8; 10; 13; 14; 16; 18; 27; 30

Multiplicação de matrizes

Há quatro formas de multiplicar matrizes...

1 forma (normal):

Vamos supor as matrizes A, B e C de forma que :

$$\begin{array}{c} \\ \text{Linha 3} \\ \\ \end{array} \underbrace{\begin{bmatrix} & \cdots & \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ & \cdots & \end{bmatrix}}_{A} \underbrace{\begin{array}{c} \text{Col 4} \\ \begin{bmatrix} & \cdots & \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ & \cdots & \end{bmatrix} \end{array}}_{B} = \underbrace{\begin{array}{c} C_{34} \\ \begin{bmatrix} & \cdots & \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ & \cdots & \end{bmatrix} \end{array}}_{C}$$

Lembremos como se obtém um elemento especifico de C, por exemplo o C_{34}

É a linha 3 de A vezes a coluna 4 de B ...e se faz assim:

C_{34} = (linha 3 de A) ·(coluna 4 de B)= $a_{31}b_{14} + a_{32}b_{24} + \ldots = \sum_{k=1}^{n} a_{3k} b_{k4}$

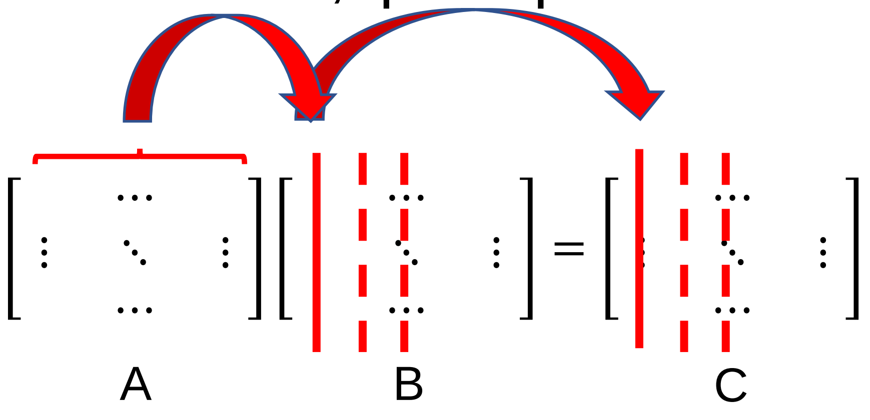
Para poder multiplicar matrizes a regra é $A_{mxn}\ B_{nxp} = C_{mxp}$

Vamos ver agora a segunda forma de multiplicar matrizes...

Multiplicação de matrizes

2 forma (por colunas):

Quando multiplicamos a matriz A, pela primeira coluna de B obtemos a primeira coluna de C....



A (col1 de B) = (col1 de C)

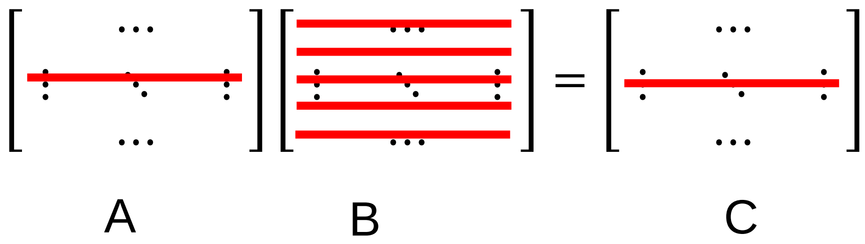
Desta forma, as colunas da matriz C são combinações das colunas da matriz A (pois A x coluna B é uma combinação das colunas de A!!!). Lembrando, a combinação é dada pelo vetor coluna (neste caso abaixo o vetor coluna x,y,z)...

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} \qquad x\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} + z\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Multiplicação de matrizes

<u>3 forma</u> (por linhas):

Quando multiplicamos uma linha da matriz A, pela matriz B obtemos uma linha da matriz C que é uma combinação de todas as linhas da matriz B



As linhas de C são combinações das linhas de B, lembrando....

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3a_{11}+4a_{21}+5a_{31} & \ldots & \ldots \end{bmatrix}$$

Desta forma, as linhas de C são CL das linhas de B, e as colunas de C são CL das colunas de A

Qual é a quarta forma?

Já vimos matriz x matriz, coluna x matriz e linha x matriz ...falta....

Multiplicação de matrizes

4 forma (coluna x linha):

O que acontece se multiplicamos uma coluna de A por uma linha de B?

É diferente da **1 forma** onde tomamos uma linha vezes uma coluna!!!

$$\underset{\substack{\text{A}\\ \text{mx1}}}{\begin{bmatrix} & \cdots & \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ & \cdots & \end{bmatrix}}\underset{\substack{\text{B}\\ \text{1xp}}}{\begin{bmatrix} & \cdots & \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ & \cdots & \end{bmatrix}} = \underset{\substack{\text{C}\\ \text{mxp}}}{\begin{bmatrix} & \cdots & \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ & \cdots & \end{bmatrix}}$$

Vejamos um exemplo

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ? & ? \\ ? & ? \\ ? & ? \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 12 \\ 3 & 18 \\ 4 & 24 \end{bmatrix}$$

Todos os vetores linha estão numa mesma linha reta

Todos os vetores coluna estão numa mesma linha reta

Neste exemplo as colunas de C são múltiplos da coluna A

As linhas de C são múltiplos das linhas de B

Por isso a **4 forma** é que AB = soma das (colunas de A)x(linhas de B)

O espaço das linhas (que são todas as combinações da linha 1,6) é uma linha para esta matriz e o espaço das colunas (todas as combinações da coluna 2,3,4) é uma linha também, e o motivo é terem sido (mx1)·(1xp)

Vejamos um exemplo mais complexo que o caso acima de 1 coluna vezes 1 linha...

Multiplicação de matrizes

<u>4 forma</u> (coluna x linha):

Vejamos o caso de uma matriz 3x2 vezes uma matriz 2x2

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 6 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 6 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \\ 6 \\ 7 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 12 \\ 3 & 18 \\ 4 & 24 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 6 & 6 \\ 7 & 27 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 17 \\ 9 & 24 \\ 11 & 51 \end{bmatrix}$$

Uma última coisa sobre produtos de matrizes...

O produto em bloco!

Imaginemos uma matriz A (10 x 10) multiplicada por outra matriz B (10x10) que resulta numa matriz C (10x10) e dividimos as matrizes em blocos A_i e B_j

$$\begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ? & ? \\ ? & ? \end{bmatrix}$$

Na primeira posição teríamos $A_1B_1+A_2B_3$ e assim sucessivamente...

Exercícios

Livro Álgebra Linear e suas aplicações. Gilbert Strang. 4 edição

Conjunto de problemas 1.4 (página 26)

Resolver: 2; 4; 5; 6; 14; 15; 16; 18; 22; 23; 25; 28; 30; 32; 34; 35; 46; 47; 50; 51; 56;

Matrizes inversas

Voltando às matrizes inversas, vamos começar com matrizes quadradas

Pela definição: se b = A x então A^{-1} b = x

Substituindo encontramos algo evidente: b = A x = A A^{-1} b = b $A^{-1}A = I = A A^{-1}$

Imaginemos uma matriz A Existe A^{-1}?

Vamos ver o caso singular (quando NÃO EXISTE a matriz inversa)

Vejamos um exemplo: $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$

Por que esta matriz A não é invertível?

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ? \\ ? \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

A^{-1} 0 = x ....$\rightarrow$x=0 mas x$\neq$0

Imaginemos o caso em que A x = 0:

Se A fosse invertível teríamos que

Assim, se existe um vetor x para o qual A x = 0 então A não tem inversa!

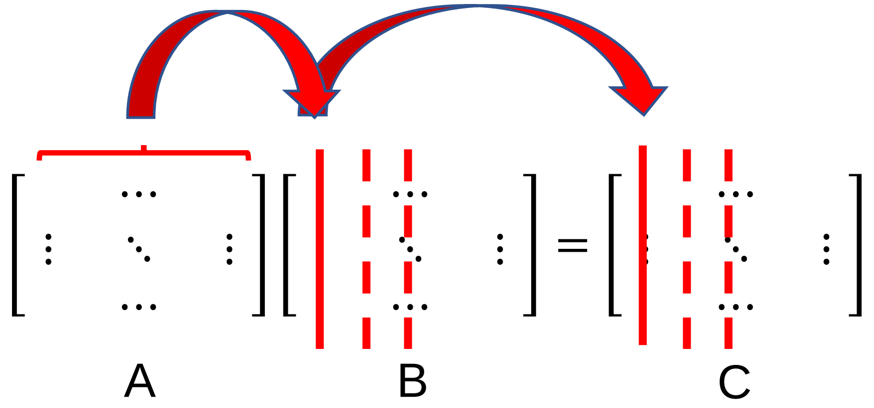
Matrizes inversas

Vejamos agora uma matriz que possui inversa

$$\underset{A}{\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 7\end{bmatrix}}\underset{A^{-1}}{\begin{bmatrix}a & c\\ b & d\end{bmatrix}} = \underset{I}{\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}}$$

Qual é a matriz inversa A^{-1} ?

Lembrando o produto de uma matriz vezes uma coluna!



Temos que resolver um sistema de 2 equações para as duas colunas da matriz I

Para resolver vamos aplicar o método de **Gauss-Jordan** que nos permite resolver duas equações de uma só vez para encontrar a inversa de uma matriz A qualquer.

$$\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 3\\ 2 & 7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}c\\ d\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc}1 & 3 & 1 & 0\\ 2 & 7 & 0 & 1\end{array}\right] \xrightarrow{(2)-2(1)} \left[\begin{array}{cc|cc}1 & 3 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -2 & 1\end{array}\right] \xrightarrow{(1)-3(2)} \left[\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & 7 & -3\\ 0 & 1 & -2 & 1\end{array}\right]$$

A I

I A^{-1}

Matrizes inversas

Vamos conferir se de fato essa matriz é A^{-1}

$$\begin{bmatrix} 7 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ? & ? \\ ? & ? \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Como foi feito? Por que funcionou?

Ao aplicar o método da eliminação ao produto AI (neste caso foram dois passos com duas E´s) para obter [I ?] o produto das E´s vezes A (multiplicação por bloco) deu I à direita (portanto E=A^{-1}) e o outro produto das E´s vezes I da E que vimos é A^{-1})

Assim: $\underset{\uparrow \atop E\acute{}s}{E}\,[A\ I] = [I\ ?]$ Logo.... EA= I $\rightarrow$ E= A^{-1} $\quad E\,[A\ I] = [I\ A^{-1}]$

Mais um exemplo, neste caso de um sistema 3x3

$$\underset{A}{\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -6 & 0 \\ -2 & 7 & 2 \end{bmatrix}} \underset{x}{\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}} = \underset{b}{\begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 9 \end{bmatrix}}$$

A equação Ax=b será no final resolvida através de A^{-1} de forma que $A^{-1}b = x$

Matrizes inversas

Vejamos repassar tudo de novo para 3x3 começando pelo método da eliminação

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -6 & 0 \\ -2 & 7 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[(3)+(1)]{(2)-2(1)} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & -2 \\ 0 & 8 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{(3)+(2)} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

O vetor coluna b se transforma em c...que é: c= $\begin{bmatrix} 5 \\ -12 \\ 2 \end{bmatrix}$

Após a transformação, agora temos o mesmo sistema inicial reescrito da forma U x = c

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{U} \underbrace{\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}}_{x} = \underbrace{\begin{bmatrix} 5 \\ -12 \\ 2 \end{bmatrix}}_{c}$$

Matrizes inversas

Agora podemos resolver por retrossubstituição (começando pela última linha)

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -12 \\ 2 \end{bmatrix}$$

w=2

-8v-2w=-12 (v=1)

2u+v+w=5 (u=1)

Este método tem como foco transformar A em U (matriz diagonal superior)

Agora vamos executar este procedimento com matrizes...

Qual matriz vai executar o primeiro passo da nossa eliminação?

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -6 & 0 \\ -2 & 7 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{(2)\,-\,2(1)} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & -2 \\ -2 & 7 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -6 & 0 \\ -2 & 7 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & -2 \\ -2 & 7 & 2 \end{bmatrix}$$

Matrizes inversas

O primeiro passo (eliminar a_{21}) é realizado pela matriz (CL de linhas!)....

A primeira linha de E_{21} é a CL das linhas de 1x(1)+0(2)+0(3) (não alteramos ela)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ ? & ? & ? \\ ? & ? & ? \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ \boxed{4} & -6 & 0 \\ -2 & 7 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ \boxed{0} & -8 & -2 \\ -2 & 7 & 2 \end{bmatrix}$$

A segundas linha de E_{21} é a CL das linhas de -2x(1)+1(2)+0(3)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ ? & ? & ? \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -6 & 0 \\ -2 & 7 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & -2 \\ -2 & 7 & 2 \end{bmatrix}$$

A terceira linha de E_{21} é simplesmente 0x(1)+0(2)+1(3) (não alteramos ela)

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{E_{21}}\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -6 & 0 \\ -2 & 7 & 2 \end{bmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & -2 \\ -2 & 7 & 2 \end{bmatrix}}_{U'}$$

Matrizes inversas

A seguinte passo foi eliminar o termo a_{31}

A CL para a terceira linha foi 1x(1)+0(2)+1(3) portanto a E_{31} é:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ ? & ? & ? \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & -2 \\ \boxed{-2} & 7 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & -2 \\ \boxed{0} & 8 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & -2 \\ -2 & 7 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & -2 \\ 0 & 8 & 3 \end{bmatrix}$$

E_{31} A´ U´´

Por último falta eliminar o termo a_{32} para o qual a E_{32} é....

Matrizes inversas

A CL para eliminar o termo a_{32} (sem mudar as linhas 1 e 2) é 0x(1)+1(2)+1(3) portanto a E_{32} é:

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ ? & ? & ?\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1 & 1\\ 0 & -8 & -2\\ 0 & \boxed{8} & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 1 & 1\\ 0 & -8 & -2\\ 0 & \boxed{0} & 1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 1 & 1\\ 0 & -8 & -2\\ 0 & 8 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 1 & 1\\ 0 & -8 & -2\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

E_{32} A´´ U´´´

Desta forma as três matrizes que eliminam os termos $a_{2,1}$ $a_{3,1}$ e $a_{3,2}$ são:

$$E_{21}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ -2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \qquad E_{31}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix} \qquad E_{32}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

Matrizes inversas

Agora juntamos todas as operações em uma única operação realizada pela matriz que chamaremos E

Como se obtém E a partir de E_{21} E_{31} e E_{32}?

Simplesmente efetuando o produto delas na ordem correta....lembrando que foi feito assim:

$$U = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{E_{32}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{E_{31}} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{E_{21}} A = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{\textbf{Matriz E}} \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -6 & 0 \\ -2 & 7 & 2 \end{bmatrix}}_{\textbf{Matriz A}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

O vetor coluna b também deve ser transformado....ele se transforma no vetor coluna c:

$$c = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -12 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Assim temos a nova equação U x = c equivalente (mesma solução) a A x = b

Vamos achar a inversa de U pois é mais fácil fazer U^{-1} c = x para resolver!

Matrizes inversas

Temos que fazer as mesmas operações na direção oposta (lembrando que $(ABC)^{-1} = (C^{-1} B^{-1} A^{-1})$ se inverte a ordem igual que com E!)

Por exemplo, se $E_{21}A = U´$ agora queremos que $(E_{21})^{-1} U´ = A$

Isso é simplesmente desfazer a CL que executamos para eliminar a_{21}!

Ou seja desfazer para a_{21} a operação -2x(1)+1(2)+0(3) realizada pela matriz E_{21}

$$\underset{E_{21}}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \underset{A}{\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -6 & 0 \\ -2 & 7 & 2 \end{bmatrix}} = \underset{U´}{\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & -2 \\ -2 & 7 & 2 \end{bmatrix}}$$

Para isso realizamos as mesma operações na direção oposta!, ou seja agora pegamos U´ e fazemos 2x(1)+1(2)+(3) para obter novamente A:

$$\underset{(E_{21})^{-1}}{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \underset{U´}{\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & -2 \\ -2 & 7 & 2 \end{bmatrix}} = \underset{A}{\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -6 & 0 \\ -2 & 7 & 2 \end{bmatrix}}$$

Matrizes inversas

Portanto a $(E_{21})^{-1}$ pode ser obtida diretamente de E_{21} simplesmente invertendo os sinais da operação que altera a linha (os 1 na diagonal não alteram!!!)

$$E_{21}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ -2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \quad (E_{21})^{-1}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ -2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

Nosso problema agora é que no caso de produtos de matrizes (por exemplo no caso da matriz $E = E_{32}\ E_{31}\ E_{21}$) não sabemos como encontrar diretamente $(E)^{-1}$

Vamos encontrar, uma a uma, as matrizes inversas para desfazer o caminho de A até U ou seja de tal forma que $A = (E_{21})^{-1}\ (E_{31})^{-1}\ (E_{32})^{-1}\ U$, e a seguir, identificar a matriz L que multiplicada por U (LU) faz isso de uma única vez, ou seja, $L = (E_{21})^{-1}(E_{31})^{-1}\ (E_{32})^{-1}$

Matrizes inversas

Portanto podemos escrever estas inversas individualmente assim:

$$E_{21}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ -2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \qquad E_{31}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix} \qquad E_{32}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

$$(E_{21})^{-1}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} \qquad (E_{31})^{-1}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{bmatrix} \qquad (E_{32})^{-1}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix}$$

Logo: $$L=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ -1 & -1 & 1\end{bmatrix}$$

Assim LE = I (verificar!) $$\underset{L}{\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0\\ -1 & -1 & 1\end{bmatrix}}\underset{E}{\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ -2 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 1\end{bmatrix}}=\underset{I}{\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}}$$

Matrizes inversas

Vamos verificar que LU = A

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{U} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -6 & 0 \\ -2 & 7 & 2 \end{bmatrix}}_{A}$$

Agora no lugar de todo isso vamos aplicar o **método de Gauss-Jordan** para encontrar L (que é a inversa de E).

Exercícios

Livro Álgebra Linear e suas aplicações. Gilbert Strang. 4 edição

Conjunto de problemas 1.5 (página 39)

Resolver: 1; 2; 4; 5; 7; 14; 16; 17; 18; 19; 22; 25; 27; 28; 29; 32;

Matrizes inversas

Agora no lugar de todo isso vamos aplicar o **método de Gauss-Jordan** para encontrar L (que é a inversa de E).

Matrizes inversas

Como sabemos que A A^{-1} = I temos que $\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}}_{E}\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}}_{L} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{I}$

Portanto teríamos que resolver todas estas equações!!! $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ a_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{13} \\ a_{23} \\ a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

O método de Gauss-Jordam as resolve todas as (n x n) equações de uma vez !!!!

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] = \xrightarrow{(2)+2(1)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] = \xrightarrow{(3)+(1)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] =$$

E I

$$\xrightarrow{(3)-(2)} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

I L=E^{-1}

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Por que tanta confusão? por que não fazer diretamente A^{-1}b = x ?

Matrizes inversas

$$\begin{array}{ccc} A & x & b \\ \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -6 & 0 \\ -2 & 7 & 2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = & \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 9 \end{bmatrix} \end{array}$$

Calcular diretamente a inversa de A por Gauss-Jordam

Lembrando que tudo começou com:

$$\begin{array}{cc} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \boxed{4} & -6 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 7 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] & \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ \boxed{-2} & 7 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] & \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{8} & 3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \\ \text{A} \qquad\qquad \text{I} & & \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

U !! **E!!=L^{-1}**

Concluímos a primeira metade do problema, obtivemos nas primeiras 2 colunas a triangular superior U e nas três últimas colunas E que é L^{-1}

Agora temos que levar **U** a **I** de forma que á direita teremos A^{-1} (pois começamos com A I) isto corresponde a multiplicar ambos lados por U^{-1}. Ao criar os zeros acima dos pivôs chegaremos a I....

Continuando....

Matrizes inversas

$$\begin{array}{ccc} A & x & b \\ \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -6 & 0 \\ -2 & 7 & 2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = & \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 9 \end{bmatrix} \end{array}$$

Calcular diretamente a inversa de A por Gauss-Jordam

Lembrando que tudo começou com:

$$\underset{A}{\left[\begin{matrix} 2 & 1 & 1 \\ \boxed{4} & -6 & 0 \\ -2 & 7 & 2 \end{matrix}\right.}\left|\underset{I}{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}}\right] \quad \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ \boxed{-2} & 7 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & \boxed{8} & 3 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\underset{\mathbf{U\ !!}}{\left[\begin{matrix} 2 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & -8 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right.}\left|\underset{\mathbf{E!!=L^{-1}}}{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{matrix}}\right] \quad \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & \boxed{\frac{3}{4}} & \frac{3}{4} & \frac{1}{8} & 0 \\ 0 & -8 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right] \quad \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & \frac{6}{4} & -\frac{5}{8} & -\frac{3}{4} \\ 0 & -8 & \boxed{-2} & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 0 & \frac{6}{4} & -\frac{5}{8} & -\frac{3}{4} \\ 0 & -8 & 0 & -4 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

O problema aqui é que os pivôs não são unitários, para arrumar isso temos que dividir cada linha pelos seus pivôs (dividir qualquer equação por uma constante não altera a equação!!!)

Continuando

Matrizes inversas

$$\begin{array}{ccc} \text{A} & \text{x} & \text{b} \\ \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -6 & 0 \\ -2 & 7 & 2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = & \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 9 \end{bmatrix} \end{array}$$

Calcular diretamente a inversa de A por Gauss-Jordam

Lembrando que tudo começou com:

$$\underset{A}{\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ \boxed{4} & -6 & 0 \\ -2 & 7 & 2 \end{bmatrix}} \left| \underset{I}{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}} \right] \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & -2 \\ \boxed{-2} & 7 & 2 \end{bmatrix} \left| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \right] \quad \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -8 & -2 \\ 0 & \boxed{8} & 3 \end{bmatrix} \left| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{matrix} \right]$$

$$\underset{\textbf{U !!}}{\begin{bmatrix} 2 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & -8 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}} \left| \underset{\textbf{E!!=L}^{-1}}{\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{matrix}} \right] \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & \boxed{\frac{3}{4}} \\ 0 & -8 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left| \begin{matrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{8} & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{matrix} \right] \quad \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -8 & \boxed{-2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left| \begin{matrix} \frac{6}{4} & -\frac{5}{8} & -\frac{3}{4} \\ -2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{matrix} \right]$$

$$\begin{bmatrix} \boxed{2} & 0 & 0 \\ 0 & \boxed{-8} & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \end{bmatrix} \left| \begin{matrix} \frac{6}{4} & -\frac{5}{8} & -\frac{3}{4} \\ -4 & 3 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{matrix} \right]$$

Agora dividimos as linhas pelos pivôs

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \left| \begin{matrix} \frac{6}{8} & -\frac{5}{16} & -\frac{3}{8} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{3}{8} & -\frac{1}{4} \\ -1 & 1 & 1 \end{matrix} \right]$$

A→I portanto I→A^{-1}

Matrizes inversas

Vamos verificar se de fato funcionou e $A^{-1}b$ é a solução x ?

Vamos resolver nossa equação assim: no lugar de $Ax = b \rightarrow A^{-1}b = x$!

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 4 & -6 & 0 \\ -2 & 7 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 9 \end{bmatrix}$$

A x b

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{6}{8} & -\frac{5}{16} & -\frac{3}{8} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{3}{8} & -\frac{1}{4} \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{6}{8} & -\frac{5}{16} & -\frac{3}{8} \\ -\frac{1}{2} & -\frac{3}{8} & -\frac{1}{4} \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}$$

u = 1

v = 1

w = 2

Não resolvemos assim porque ficamos igual que no início (ou pior pelos coeficientes fracionários) com 3 equações com 3 incógnitas!!! (imaginem um sistema nxn)

Matrizes inversas

Por ser importante vamos lembrar a propriedade mais importante da matriz inversa....

Se você multiplicar por A e, em seguida, multiplicar por A^{-1} voltara ao inicio!

$$b = A\,x \qquad A^{-1}\,b = x$$

Por isso $A^{-1}A = I$

Nem todas as matrizes possuem inversas.

Se Ax for nulo ($Ax=0$) para um x diferente de zero, A^{-1} teria que retornar x a partir de um zero ($A^{-1}\,0 = x$) o que é impossível!

Nosso problema é calcular A^{-1} e utilizar ela (quando existe) e compreender quais matrizes não possuem inversas.

Matrizes inversas

A matriz inversa existe se, e somente se, a eliminação produzir n pivôs

O método de eliminação resolve $Ax=b$ sem encontrar explicitamente A^{-1}.

$b = A x$ $\qquad A^{-1} b = x$ $\qquad$ Por isso $A^{-1}A = I$

A matriz A não pode ter duas matrizes inversas diferentes.

Suponha que $BA=I$ e que $AC=I$. Então $B=C$ pois se fazemos:

$B(AC)=(BA)C$ implica $BI=IC$ que é $B=C$

Isso também mostra que a inversa à esquerda (IB) é igual à inversa à direita (BI)...o que não é geralmente valido para o produto de matrizes (em geral não podem ser comutadas).

Desta forma se queremos resolver $Ax=b$ podemos fazer isso utilizando a equação $x=A^{-1}b$

Por isso a importância das matrizes inversas

Matrizes especiais

Matriz inversa: A = LU

Matriz permutação: em nxn temos n!P todas invertíveis e $P^{-1}=P^T$ e $P^TP=I$

Matriz transposta: $(A^T)_{ij} = A_{ji}$ Matrizes mxn passam a ser nxm

Matriz simétrica: $R^T = R$

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 1 \\ 5 & 1 & -3 \end{bmatrix}$$

Evidentemente: R^TR é sempre simétrica!!!! (verifiquem por quê!)

Tomando $(R^TR)^T$ = direção inversa!= $R^TR^{TT} = R^TR$ por isso é simétrica!

Exercícios

Livro Álgebra Linear e suas aplicações. Gilbert Strang. 4 edição

Conjunto de problemas 1.6 (pagina 52)

Resolver: 1; 2; 3; 8; 9; 16; 17a; 17b; 21; 22; 23; 29; 32; 35; 36; 38; 42; 49; 50