

FÍSICA I

Prof. Dr. Patricio R. Impinnisi

Aula 2: Vetores

Vetores e suas componentes

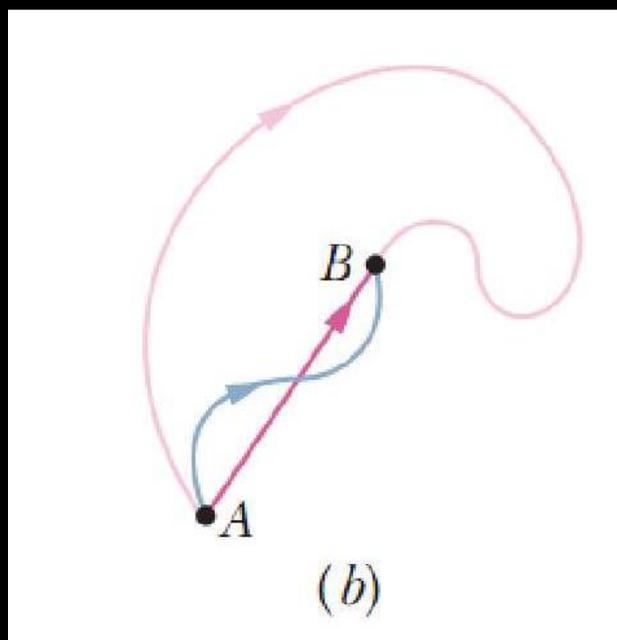
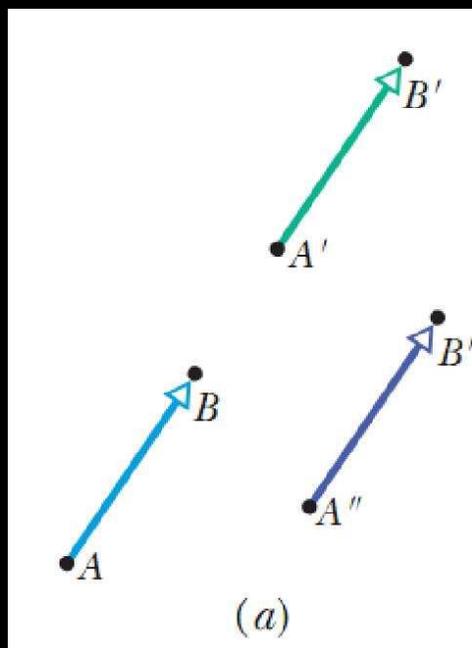
INTRODUÇÃO

- A física lida com grandezas que sempre têm um valor e as vezes têm uma orientação
- Um **vetor** é um objeto matemático que tem um valor e uma orientação
- Uma **grandeza vetorial** é uma grandeza física que pode ser representada por um vetor
 - Exemplos: posição, velocidade, aceleração
 - As operações com vetores obedecem a **regras diferentes** das regras da álgebra
- Uma **grandeza escalar** é uma grandeza que pode ser representada por um número
 - Exemplos: tempo, temperatura, energia, massa
 - As operações com escalares obedecem as regras da álgebra

EXEMPLOS

- Um exemplo simples é o **vetor deslocamento**

Se uma partícula se desloca do ponto A para o ponto B, podemos representar essa mudança de posição por uma reta orientada que liga o ponto A ao ponto B



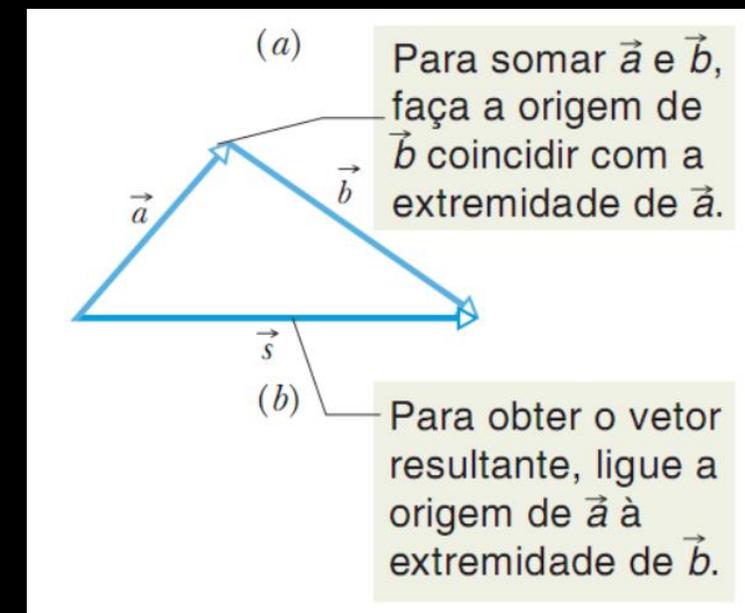
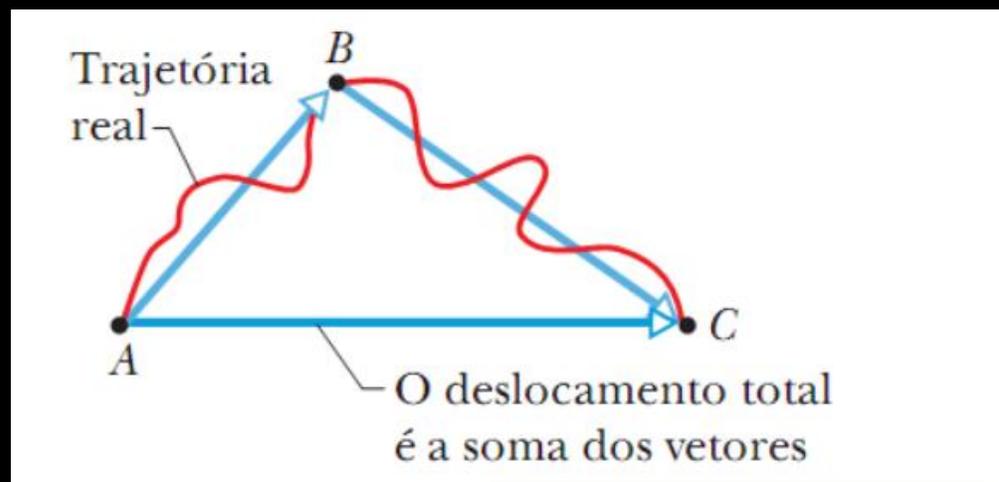
- Em (a), os três deslocamentos são iguais
- Em (b), as duas trajetórias (diferentes) correspondem ao mesmo vetor deslocamento

SOMA DE VETORES

● Soma vetorial ou resultante

- é o resultado da adição de vetores
- representa o deslocamento total produzido por dois ou mais vetores deslocamento

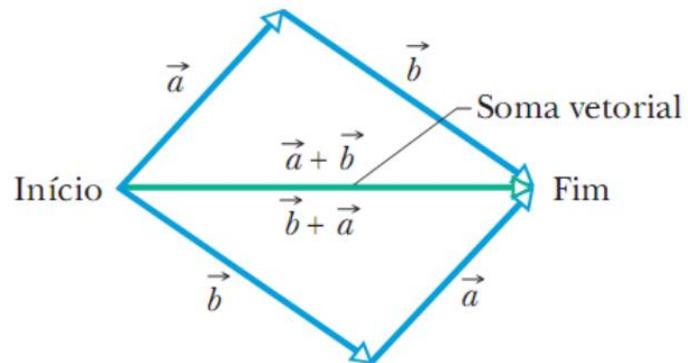
$$\vec{s} = \vec{a} + \vec{b}$$



SOMA DE VETORES

- A soma de vetores é **comutativa**
 - Podemos somar vetores em qualquer ordem

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a} \quad (\text{lei comutativa})$$

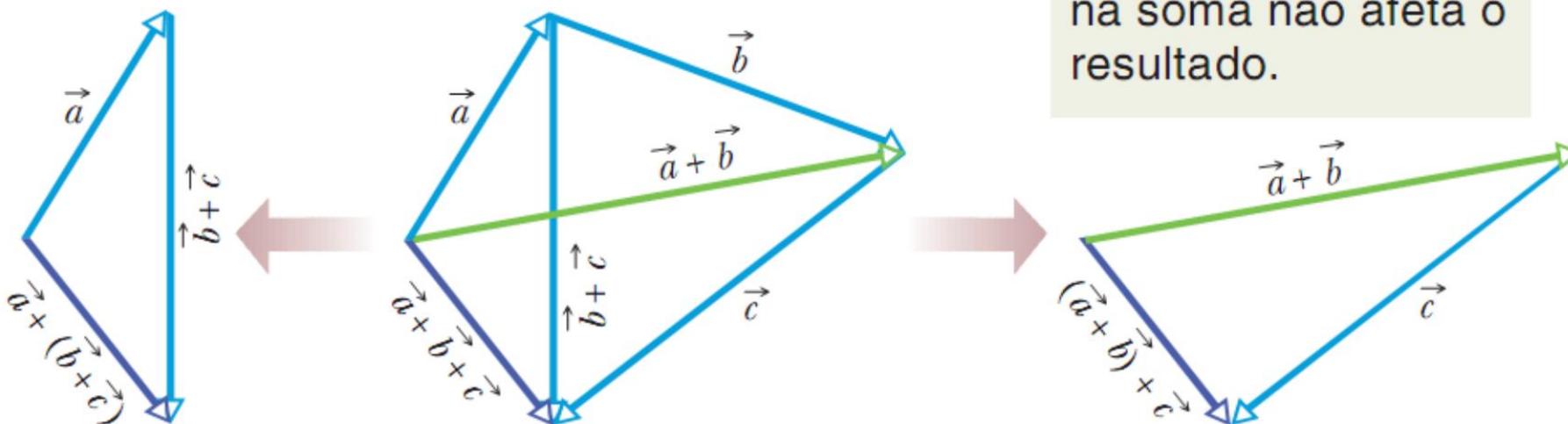


A ordem dos vetores na soma não afeta o resultado.

SOMA DE VETORES

- A soma de vetores é **associativa**
 - Podemos agrupar os vetores em qualquer ordem para soma-los

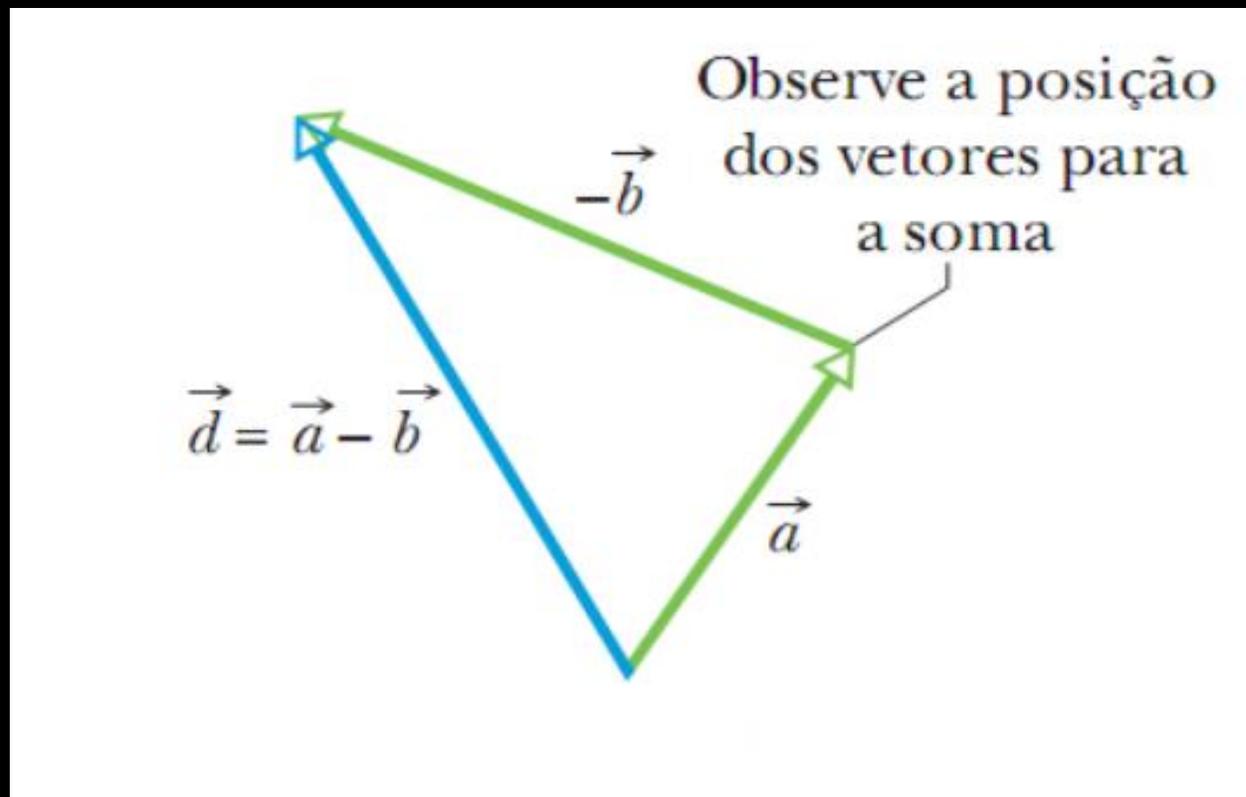
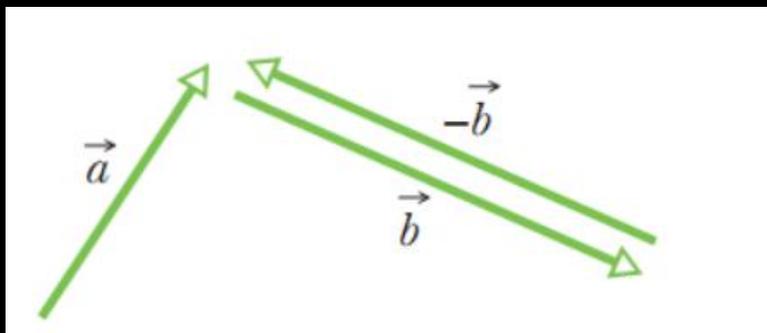
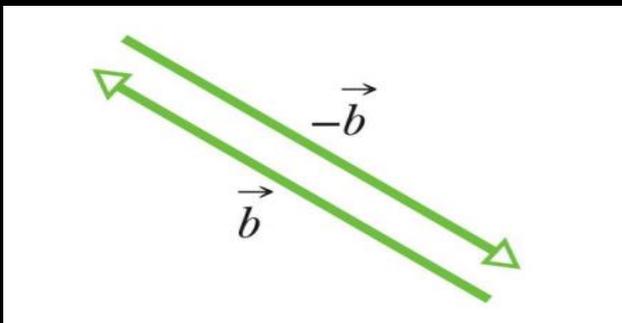
$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) \quad (\text{lei associativa})$$



SOMA DE VETORES

- O sinal negativo inverte a orientação do vetor: $\vec{b} + (-\vec{b}) = 0$
 - Podemos usar essa propriedade para definir a subtração de vetores

$$\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$$



SOMA DE VETORES

- Essas regras se aplicam a **todos os vetores**, independentemente de representarem deslocamento, velocidade ou qualquer outra coisa
- Apenas vetores que representam a mesma grandeza podem ser somados

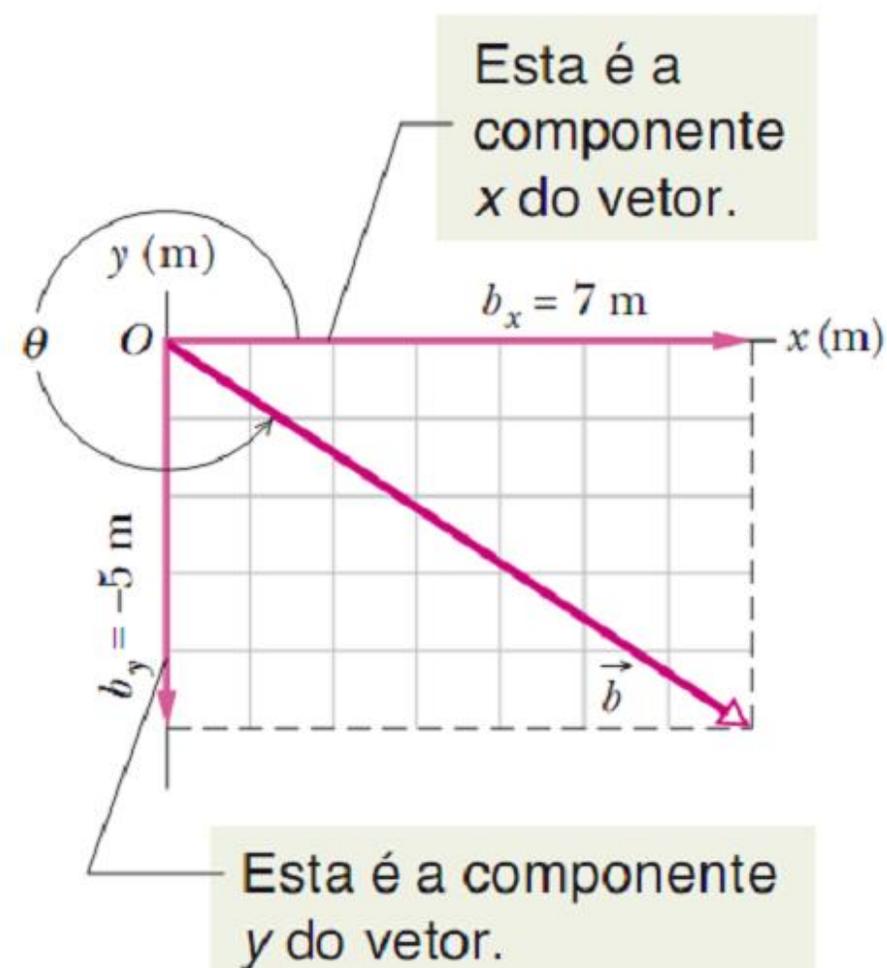


Teste 1

Os módulos dos deslocamentos \vec{a} e \vec{b} são 3 m e 4 m, respectivamente, e $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$. Considerando as várias orientações possíveis de \vec{a} e \vec{b} , (a) qual é o maior e (b) qual é o menor valor possível do módulo de \vec{c} ?

SOMA DE VETORES

- No lugar de utilizar o método gráfico podemos somar vetores por **componentes**
 - Componente é a projeção do vetor em um eixo
- O processo de obter as componentes de um vetor é chamado de **decomposição do vetor**
 - As componentes de um vetor podem ser positivas ou negativas
 - As componentes de um vetor não mudam quando deslocamos o vetor sem mudar sua orientação



SOMA DE VETORES

As componentes em duas dimensões são dadas por

$$a_x = a \cos \theta \quad a_y = a \sin \theta$$

em que θ é o ângulo que o vetor faz com o semieixo x positivo, e “a” é o comprimento do vetor

O comprimento (módulo) e o ângulo também podem ser calculados a partir das componentes

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \quad \tan \theta = \frac{a_y}{a_x}$$

As componentes definem univocamente um vetor

E em três dimensões?

SOMA DE VETORES

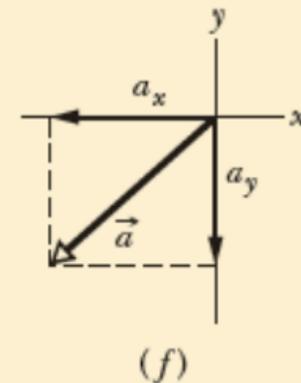
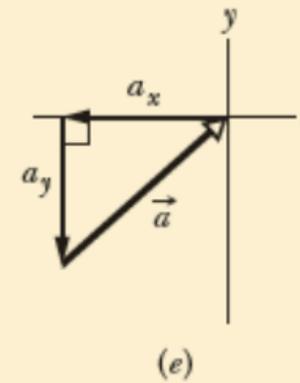
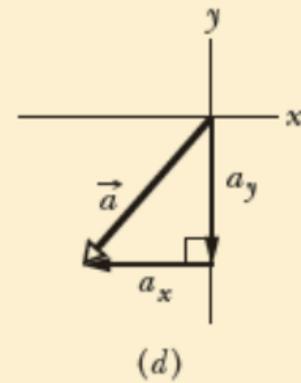
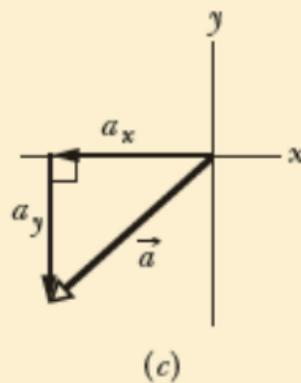
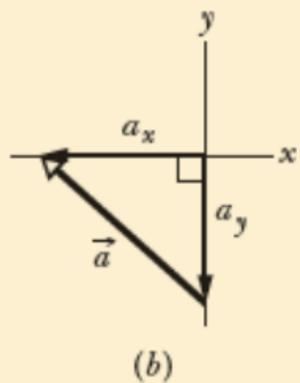
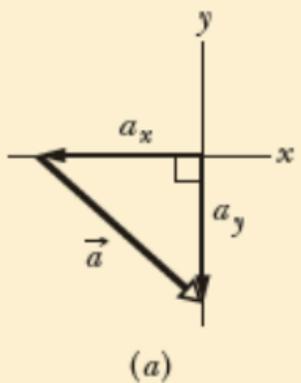
No caso tridimensional são necessários **três parâmetros** para especificar um vetor

$$(a, \theta, \varphi) \quad \text{ou} \quad (a_x, a_y, a_z)$$



Teste 2

Quais dos métodos indicados na figura são corretos para determinar o vetor \vec{a} a partir das componentes x e y ?



SOMA DE VETORES

- Os ângulos podem ser medidos em graus ou radianos
- Uma circunferência completa tem 360° ou 2π radianos
- Teste: quantos radianos são 40 graus?

$$40^\circ \frac{2\pi \text{ rad}}{360^\circ} = 0,70 \text{ rad}$$

- Quantos graus são 1 radiano

$$1 \text{ rad} \frac{360^\circ}{2\pi \text{ rad}} = 57,2958 \text{ rad}$$

SOMA DE VETORES

O vetor unitário

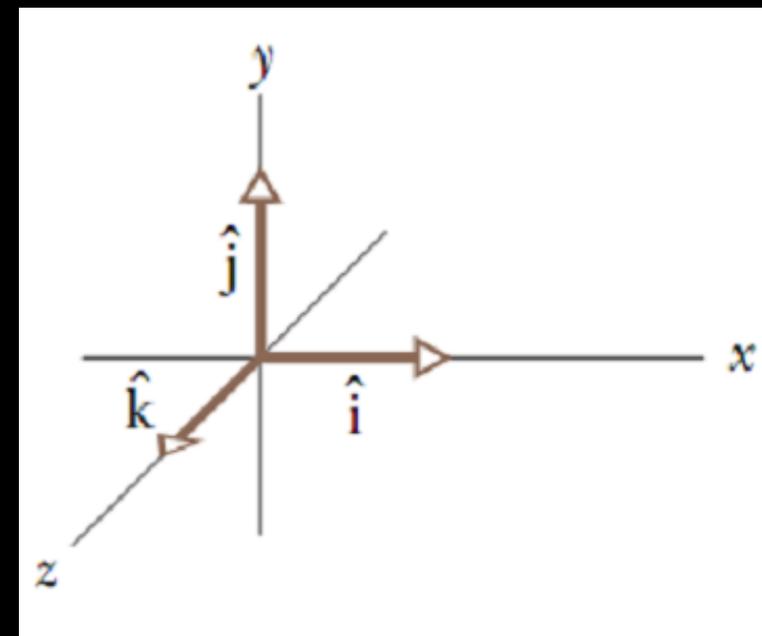
- ✓ Tem uma orientação
- ✓ Tem módulo 1
- ✓ Não tem dimensão nem unidade

$$\vec{a} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j}$$

$$\vec{b} = b_x \hat{i} + b_y \hat{j}$$

Se utiliza um sistema de coordenadas dextrogiro
vetor unitário

- ✓ Permanece dextrogiro quando sofre rotação



SOMA DE VETORES

As grandezas $a_x \hat{i}$ e $a_y \hat{j}$ são as **componentes vetoriais** do vetor \vec{a}

$$\vec{a} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j}$$

$$\vec{b} = b_x \hat{i} + b_y \hat{j}$$

As grandezas a_x e a_y são as **componentes escalares** do vetor \vec{a}

Os vetores podem ser somados ou subtraídos usando componentes

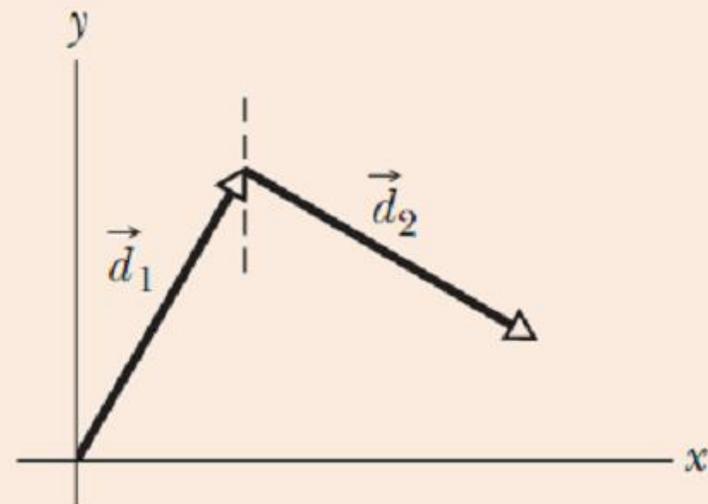
$$\vec{r} = \vec{a} + \vec{b} \quad \begin{array}{l} r_x = a_x + b_x \\ r_y = a_y + b_y \\ r_z = a_z + b_z \end{array} \quad \vec{s} = \vec{a} - \vec{b} \quad \begin{array}{l} s_x = a_x - b_x \\ s_y = a_y - b_y \\ s_z = a_z - b_z \end{array}$$

SOMA DE VETORES



Teste 3

(a) Quais são os sinais das componentes x de \vec{d}_1 e \vec{d}_2 na figura? (b) Quais são os sinais das componentes y de \vec{d}_1 e \vec{d}_2 ? (c) Quais são os sinais das componentes x e y de $\vec{d}_1 + \vec{d}_2$?



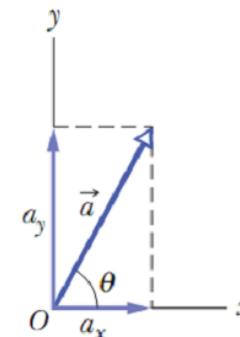
SOMA DE VETORES

- Os vetores não dependem do sistema de coordenadas usado para representá-los
- Se fazemos girar o sistema de coordenadas, o vetor não muda

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = \sqrt{a_x'^2 + a_y'^2}$$

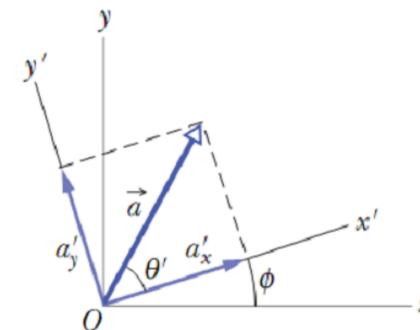
$$\theta = \theta' + \phi$$

- Todos os sistemas de coordenadas desse tipo são igualmente válidos



(a)

Se os eixos giram, as componentes mudam, mas o vetor permanece o mesmo.



(b)

PRODUTO DE VETORES

O produto escalar de dois vetores

O resultado é um escalar

✓ cujo módulo é o produto dos módulos dos vetores vezes o cosseno do ângulo entre eles $\vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos\phi$

✓ O produto escalar é comutativo ($\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$) e pode ser calculado usando as componentes

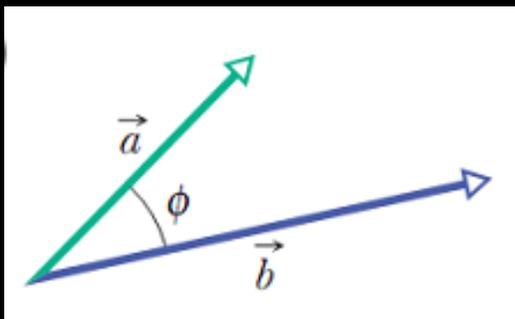
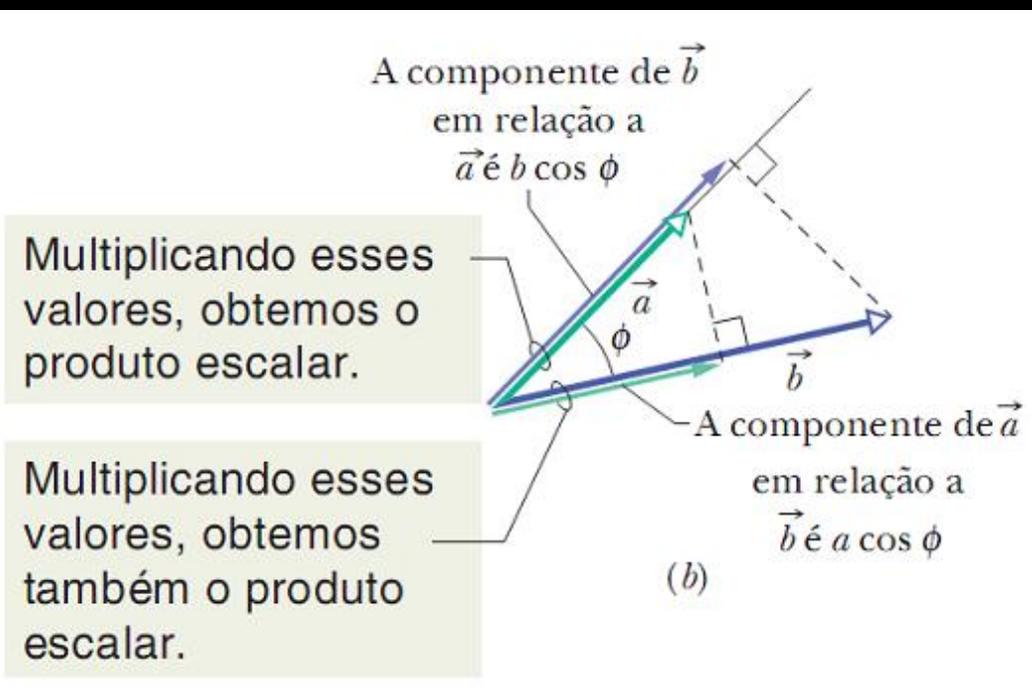
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}) \cdot (b_x \hat{i} + b_y \hat{j} + b_z \hat{k}) = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$$

PRODUTO DE VETORES

Interpretação geométrica do produto escalar de dois vetores

É o produto do módulo de um dos vetores (**qualquer um dos dois**) pela projeção do outro vetor na direção do primeiro

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos \phi$$

A componente de \vec{b} em relação a \vec{a} é $b \cos \phi$

Multiplicando esses valores, obtemos o produto escalar.

Multiplicando esses valores, obtemos também o produto escalar.

A componente de \vec{a} em relação a \vec{b} é $a \cos \phi$

(b)

PRODUTO DE VETORES



Teste 4

Os vetores \vec{C} e \vec{D} têm módulos de 3 unidades e 4 unidades, respectivamente. Qual é o ângulo entre esses vetores se $\vec{C} \cdot \vec{D}$ é igual a (a) zero, (b) 12 unidades e (c) -12 unidades?

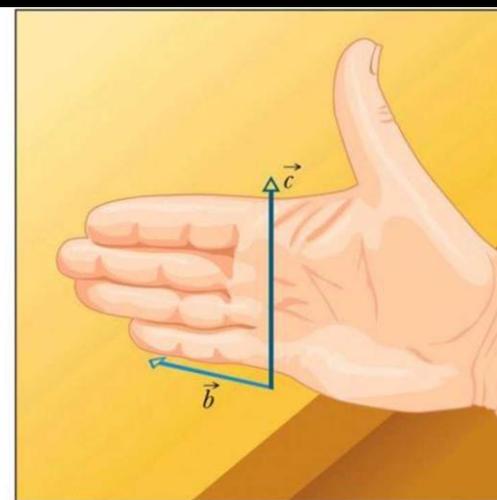
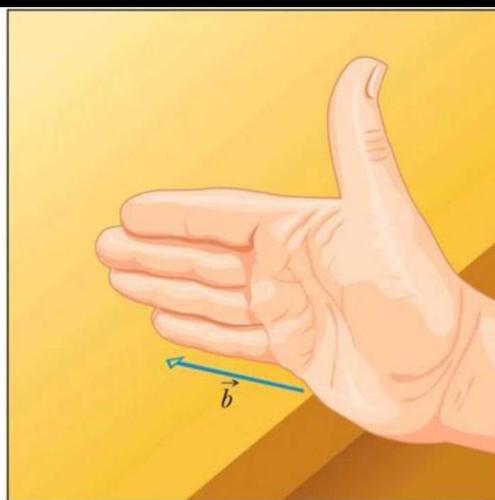
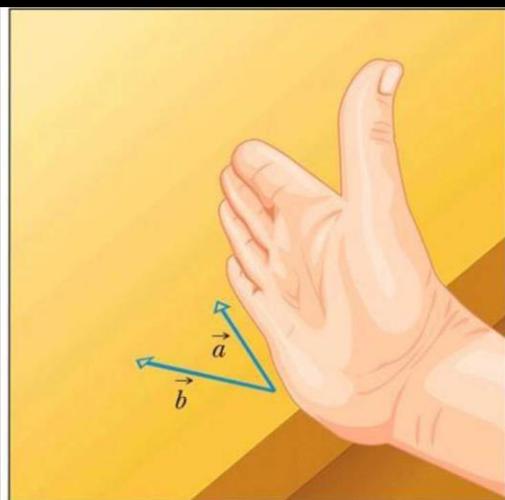
PRODUTO DE VETORES

O produto vetorial de dois vetores

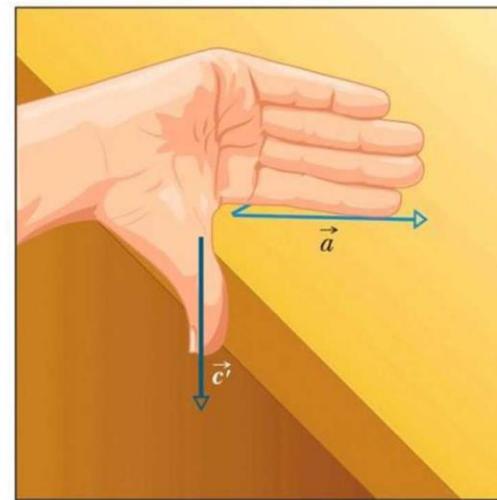
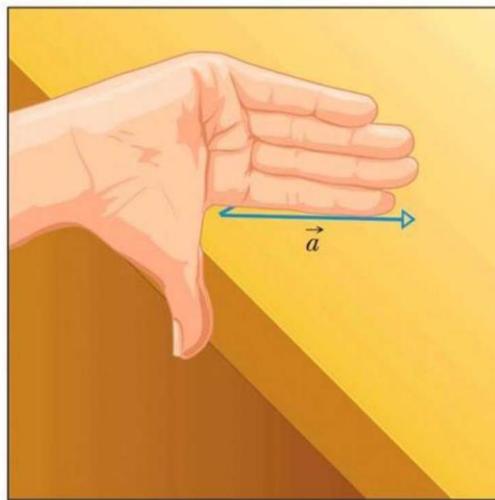
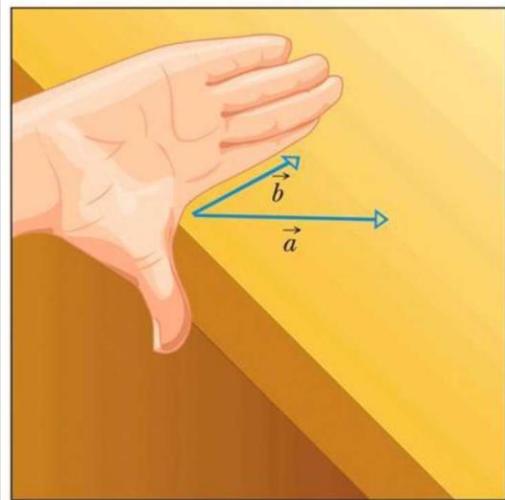
O resultado é um vetor

- ✓ cujo módulo é o produto dos módulos dos vetores vezes o seno do ângulo entre eles $\vec{a} \times \vec{b} = ab \operatorname{sen}\phi$ e sua direção é perpendicular à direção dos dois vetores (portanto ao plano formado por eles)
- ✓ A direção é determinada pela **regra da mão direita**

PRODUTO DE VETORES



(a)



PRODUTO DE VETORES

- ✓ O produto vetorial **não é comutativo** ($\vec{a} \cdot \vec{b} \neq \vec{b} \cdot \vec{a}$) de fato é ($\vec{a} \cdot \vec{b} = -\vec{b} \cdot \vec{a}$) e pode ser calculado usando as componentes

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}) \times (b_x \hat{i} + b_y \hat{j} + b_z \hat{k}),$$

$$a_x \hat{i} \times b_x \hat{i} = a_x b_x (\hat{i} \times \hat{i}) = 0,$$

$$a_x \hat{i} \times b_y \hat{j} = a_x b_y (\hat{i} \times \hat{j}) = a_x b_y \hat{k}.$$

- Assim

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_y b_z - b_y a_z) \hat{i} + (a_z b_x - b_z a_x) \hat{j} + (a_x b_y - b_x a_y) \hat{k}$$

PRODUTO DE VETORES



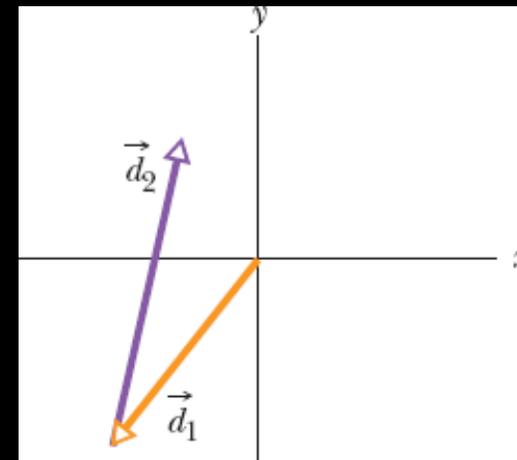
Teste 5

Os vetores \vec{C} e \vec{D} têm módulos de 3 unidades e 4 unidades, respectivamente. Qual é o ângulo entre os dois vetores se o módulo do produto vetorial $\vec{C} \times \vec{D}$ é igual a (a) zero e (b) 12 unidades?

PERGUNTAS

P1. A soma dos módulos de dois vetores pode ser igual ao módulo da soma dos mesmos vetores? Justifique sua resposta.

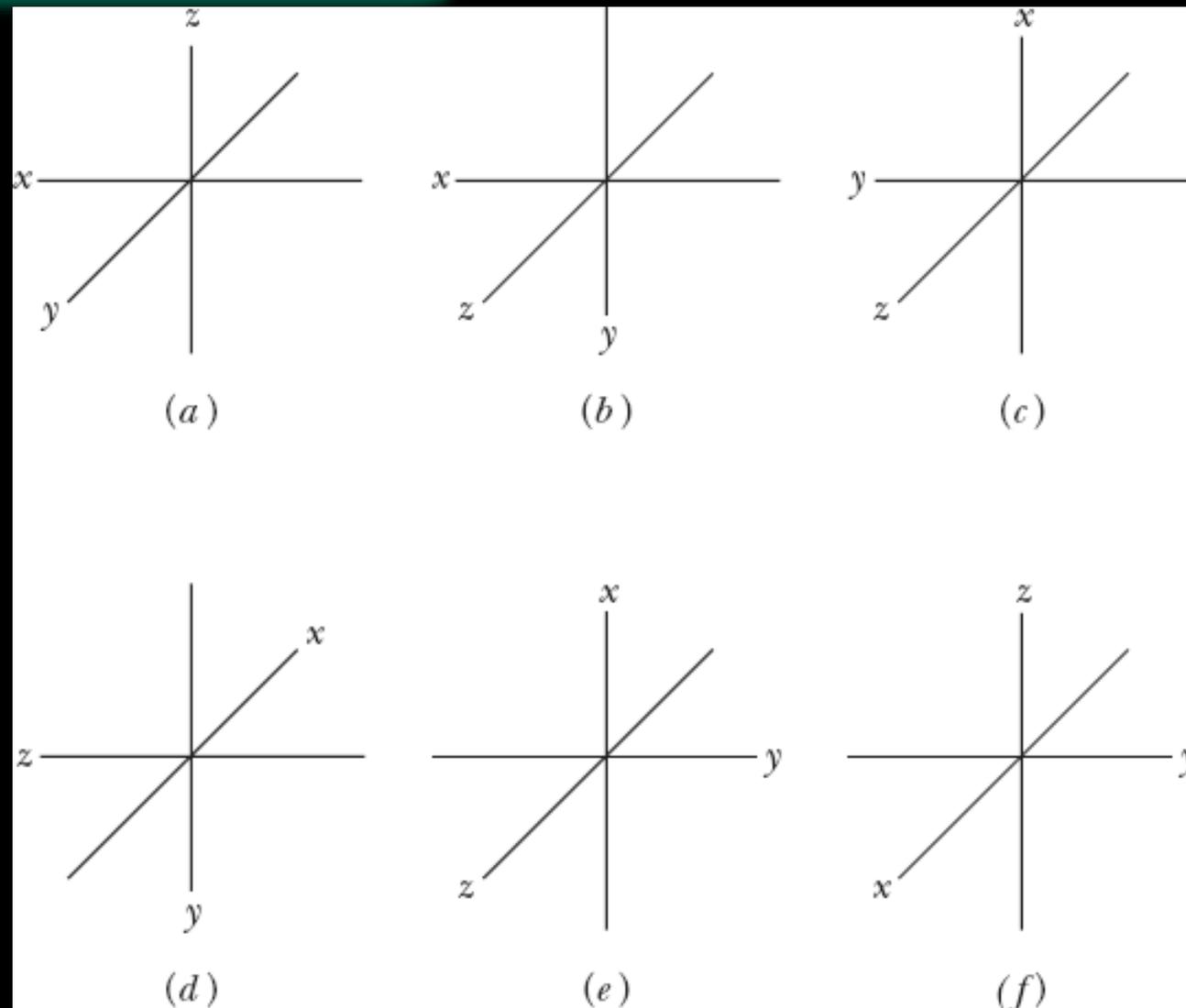
P2. Os dois vetores da figura estão em um plano xy . Determine o sinal das componentes x e y , respectivamente, de (a) $d_2 + d_1$; (b) $d_1 - d_2$; (c) $d_2 - d_1$.



P3. Sabemos que a soma de dois vetores $\vec{a} + \vec{b}$ é comutativa. Isso significa que a subtração também é comutativa, ou seja, que $\vec{a} - \vec{b} = \vec{b} - \vec{a}$? Justifique sua resposta

PERGUNTAS

P4. Quais dos sistemas de eixos da figura são “sistemas de coordenadas dextrogiros”? Como de costume, a letra que identifica o eixo está no semieixo positivo.



PERGUNTAS

P5. Descreva dois vetores \vec{a} e \vec{b} tais que:

(a) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$ e $a + b = c$

(b) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{a} - \vec{b}$

(c) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$ e $a^2 + b^2 = c^2$

P6. Se $\vec{d} = \vec{a} + \vec{b} + (-\vec{c})$

a) $\vec{a} + (-\vec{d}) = \vec{c} + (-\vec{b})$?

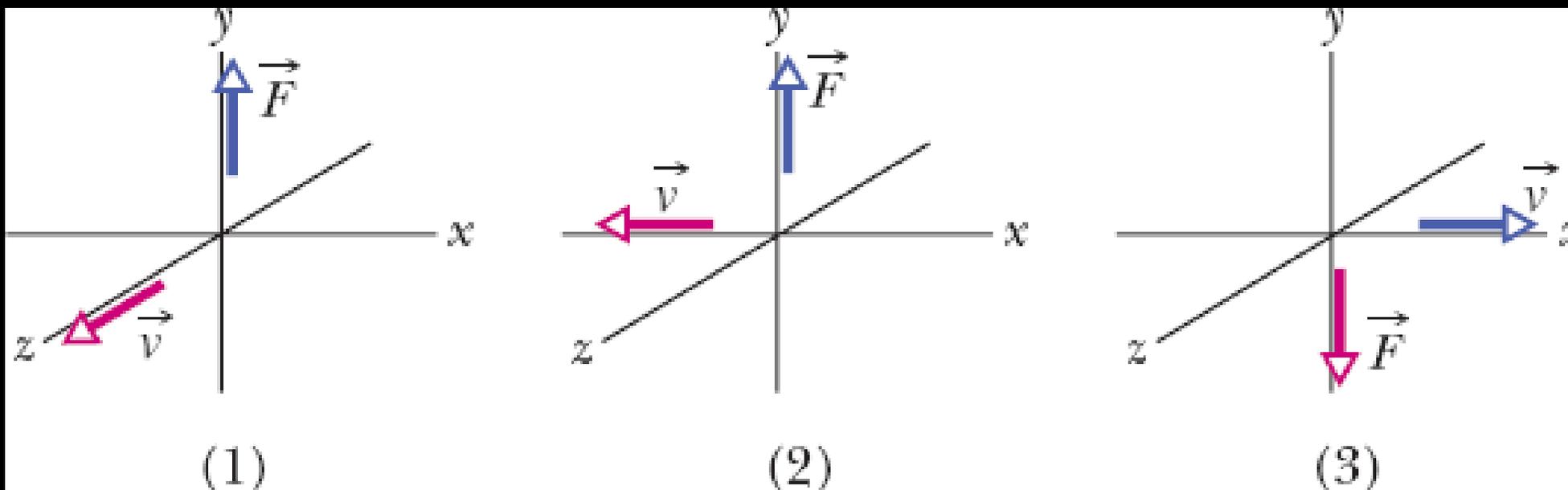
b) $\vec{a} = (-\vec{b}) + \vec{d} + \vec{c}$?

c) $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c} + (-\vec{d})$?

P7. Se $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c}$ implica necessariamente que \vec{a} e \vec{c} são iguais?

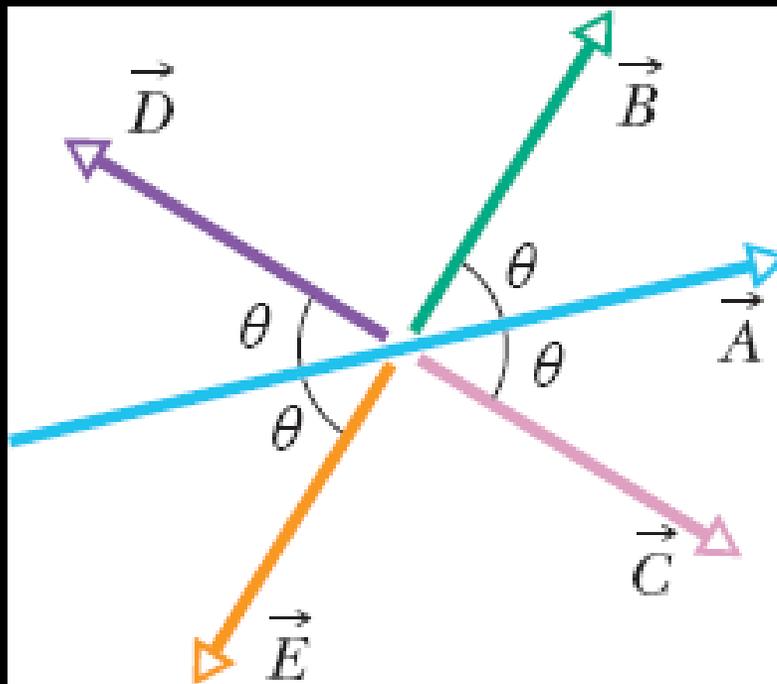
PERGUNTAS

P8. Se $\vec{F} = q (\vec{v} + \vec{B})$ sendo \vec{v} perpendicular \vec{B} , qual é a orientação de \vec{B} nas três situações mostradas na figura se a constante q for (a) positiva (b) negativa ?



PERGUNTAS

- P9. A figura mostra um vetor \vec{A} e outros quatro vetores de mesmo módulo e orientações diferentes.
- Quais dos outros quatro vetores têm o mesmo produto escalar com \vec{A} ?
 - Quais têm um produto escalar com \vec{A} negativo?



PERGUNTAS

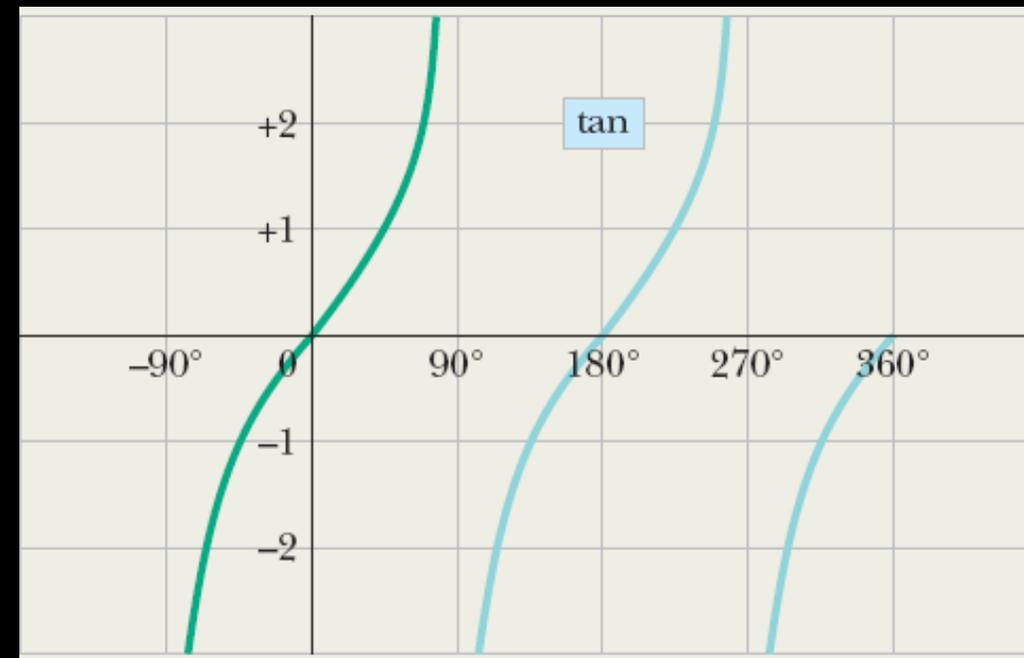
P10. Em um jogo disputado em um labirinto tridimensional, você precisa mover sua peça da partida, nas coordenadas $(0, 0, 0)$, para a chegada, nas coordenadas $(-2 \text{ cm}, 4 \text{ cm}, -4 \text{ cm})$. A peça pode sofrer apenas os deslocamentos (em centímetros) mostrados a seguir. Se, durante o trajeto, a peça parar nas coordenadas $(-5 \text{ cm}, -1 \text{ cm}, -1 \text{ cm})$ ou $(5 \text{ cm}, 2 \text{ cm}, -1 \text{ cm})$, você perde o jogo. Qual é a sequência de deslocamentos correta para levar a peça até a chegada?

$$\begin{aligned}\vec{p} &= -7\hat{i} + 2\hat{j} - 3\hat{k} & \vec{r} &= 2\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k} \\ \vec{q} &= 2\hat{i} - \hat{j} + 4\hat{k} & \vec{s} &= 3\hat{i} + 5\hat{j} - 3\hat{k}.\end{aligned}$$

PERGUNTAS

P11. As componentes x e y de quatro vetores \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} e \vec{d} são dadas a seguir. Para quais desses vetores uma calculadora fornece o ângulo correto quando você usa a calculadora para determinar o ângulo θ a partir da equação $\tan \theta = \frac{a_y}{a_x}$? Observe primeiro a figura da tg para chegar a uma resposta e depois use uma calculadora para verificar se sua resposta está correta.

$a_x = 3$	$a_y = 3$	$c_x = -3$	$c_y = -3$
$b_x = -3$	$b_y = 3$	$d_x = 3$	$d_y = -3$



PERGUNTAS

P12. Quais das expressões vetoriais a seguir estão corretas? O que está errado nas expressões incorretas?

- (a) $\vec{A} \cdot (\vec{B} \cdot \vec{C})$
- (b) $\vec{A} \times (\vec{B} \cdot \vec{C})$
- (c) $\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C})$
- (d) $\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C})$
- (e) $\vec{A} + (\vec{B} \cdot \vec{C})$
- (f) $\vec{A} + (\vec{B} \times \vec{C})$
- (g) $5 + \vec{A}$
- (h) $5 + (\vec{B} \cdot \vec{C})$
- (i) $5 + (\vec{B} \times \vec{C})$
- (j) $(\vec{A} \cdot \vec{B}) + (\vec{B} \cdot \vec{C})$

RESPOSTAS ÀS PERGUNTAS

1. sim, se os vetores forem paralelos
2. (a) $-$, $+$; (b) $-$, $-$; (c) $+$, $+$
- 3 não, mas a soma de \vec{a} e $-\vec{b}$ é comutativa: $\vec{a} + (-\vec{b}) = (-\vec{b}) + \vec{a}$
- 4 todos, menos (e)
- 5 (a) \vec{a} e \vec{b} são paralelos; (b) $\vec{b} = 0$; (c) \vec{a} e \vec{b} são perpendiculares
- 6 (a) sim; (b) sim; (c) não
- 7 não (\vec{b} e \vec{c} podem ter orientações diferentes)
- 8 (a) $+x$ para (1), $+z$ para (2), $+z$ para (3); (b) $-x$ para (1), $-z$ para (2), $-z$ para (3)
- 10 (a) \vec{B} e \vec{C} , \vec{D} e \vec{E} ; (b) \vec{D} e \vec{E}

RESUMO

Escalares e Vetores

- Escalares têm um valor
- Vetores têm um módulo e uma orientação
- Ambos têm unidades!

Componentes de um Vetor

- Dadas por

$$a_x = a \cos \theta \quad e \quad a_y = a \sin \theta$$

- Relações inversas

$$a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \quad e \quad \tan \theta = \frac{a_y}{a_x}$$

Soma de Vetores

- Obedece às leis comutativa e associativa

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$$

Vetores Unitários

- Podemos escrever vetores em termos de vetores unitários

$$\vec{a} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}$$

RESUMO

Soma por Componentes

- Somando por componentes,

$$r_x = a_x + b_x$$

$$r_y = a_y + b_y$$

Eqs. (3-10) a (3-12) $r_z = a_z + b_z$

Produto Escalar

- Produz um escalar

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos \phi$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}) \cdot (b_x \hat{i} + b_y \hat{j} + b_z \hat{k})$$

Escalar Vezes um Vetor

- O produto é um vetor
- O módulo é multiplicado pelo escalar
- O sentido é igual ou oposto

Produto Vetorial

- Produz um vetor perpendicular
- A direção é dada pela regra da mão direita

$$c = ab \sin \phi$$

RESUMO

Soma por Componentes

- Somando por componentes,

$$r_x = a_x + b_x$$

$$r_y = a_y + b_y$$

Eqs. (3-10) a (3-12) $r_z = a_z + b_z$

Produto Escalar

- Produz um escalar

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = ab \cos \phi$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}) \cdot (b_x \hat{i} + b_y \hat{j} + b_z \hat{k})$$

Escalar Vezes um Vetor

- O produto é um vetor
- O módulo é multiplicado pelo escalar
- O sentido é igual ou oposto

Produto Vetorial

- Produz um vetor perpendicular
- A direção é dada pela regra da mão direita

$$c = ab \sin \phi$$

EXERCÍCIOS PROPOSTOS

Lista disponível em:

<http://www.eletrica.ufpr.br/p/professores:patricio:inicial>

Disciplina TE303 (Física I)

Gabaritos disponíveis no mesmo endereço