TE231
Capitulo 4 – Interpolação Polinomial

Prof. Mateus Duarte Teixeira

1. Introdução

- A tabela abaixo relaciona calor específico da água com a temperatura:

T (°C)	20	25	30	35
Cp (cal/(g.ºC))	0.99907	0,99852	0,99826	0,99818

Deseja-se, por exemplo, saber:

a) o calor específico da água a 33,7°C;
b) a temperatura para a qual o calor específico é 0,99837.

Solução → Interpolação

1. Introdução

- A interpolação consiste em determinar uma função, que assume valores conhecidos em certos pontos (**nós da interpolação**), **diferente do ajuste de curvas.**

- A classe de funções escolhida para a interpolação é arbitrária, e deve ser adequada às características que pretendemos que a função possua.

- Função a ser considerada:
  - **Polinômios → Interpolação Polinomial**

1. Introdução

- A necessidade de se efetuar esta substituição surge em várias situações, como por exemplo:

a) Quando são conhecidos somente os valores numéricos da função para um conjunto de pontos e é necessário calcular o valor da função em um ponto não tabelado;
b) Quando a função em estudo tem uma expressão tal que operações como a diferenciação e a integração são difíceis (ou mesmo impossíveis) de serem realizadas.

1. Introdução

- Na computação gráfica: Interpretação de um aplicativo de como alguma coisa deve parecer, especialmente quando o software não dispõe de dados suficientes para atender à sua requisição.
- Em engenharia e ciência, geralmente tem-se dados pontuais obtidos a partir de uma amostragem ou experimento. A partir de métodos de interpolação pode-se construir uma função que, aproximadamente, encaixe-se nestes dados pontuais.

1. Introdução

- Embora exista um único polinômio de grau n que passa por n+1 pontos, há diversas fórmulas matemáticas para expressá-lo.
- Formas adequadas para implementação computacional: Newton e Lagrange.

2. Existência e Unicidade

- Seja $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$
- Das condições de interpolação, obtém-se o sistema de (n+1) equações lineares.

$$p(x_0) = a_n x_0^n + a_{n-1} x_0^{n-1} + \ldots + a_1 x_0 + a_0 = y_0$$

$$p(x_1) = a_n x_1^n + a_{n-1} x_1^{n-1} + \ldots + a_1 x_1 + a_0 = y_1$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$p(x_n) = a_n x_n^n + a_{n-1} x_n^{n-1} + \ldots + a_1 x_n + a_0 = y_n$$

- Quais são as variáveis independentes (que desejamos obter)? a_i ou x_i ?

Demonstração do Teorema:

- A matriz dos coeficientes do sistema de equações lineares é:

$$A = \begin{bmatrix} x_0^n & x_0^{n-1} & \dots x_0 & 1 \\ x_1^n & x_1^{n-1} & \dots x_1 & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n^n & x_n^{n-1} & \dots x_n & 1 \end{bmatrix}$$

Matriz de Vandermonde

- **$\mathrm{Det}(A) = (x_0 - x_1)(x_0 - x_2) \dots (x_0 - x_n)(x_1 - x_2)(x_1 - x_3) \dots (x_1 - x_n) \dots (x_{n-1} - x_n)$**
- Como $x_0, x_1, \dots, x_n$ são distintos, tem-se que $\det(A) \neq 0$, logo o sistema de equações lineares admite solução única

- O sistema de equações lineares pode ser resolvido utilizando qualquer um dos métodos (diretos ou iterativos) estudados.
- Entretanto os métodos diretos tem complexidade de ordem cúbica ($O(n^3)$).
- É possível expressar o problema de interpolação polinomial de forma que se obtenham meios de solução menos dispendiosos, com complexidade de ordem quadrática ($O(n^2)$).

- Determinar o polinômio interpolador através da resolução de um sistema de equações lineares é caro computacionalmente. Então surgem outros métodos de obtê-lo.

  - Lagrange
  - Newton
  - Hermite
  - Spline

3. Interpolação de Lagrange

- Seja um conjunto de n+1 dados $\{x_i, f(x_i)\}$. Encontrar um polinômio interpolador p(x) que passe por todos os pontos

$$p(x) = L_0(x).f(x_0) + L_1(x).f(x_1) + \ldots + L_n(x).f(x_n)$$

$L_k(x)$ são polinômios

Interpolação de Lagrange:

$$L_k(x) = \sum_{\substack{i=0 \\ i \neq k}}^{n} \frac{(x - x_i)}{(x_k - x_i)}$$

$$L_k\left(x_k\right) = 1 \quad e$$

$$L_k\left(x_i\right) = 0 \quad se, i \neq k$$

- Polinômio Interpolador de Lagrange:

Versão linear:

$$f_1(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} f(x_1)$$

- Versão quadrática:

$$f_2(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)} f(x_0) + \frac{(x - x_0)(x - x_2)}{(x_1 - x_0)(x_1 - x_2)} f(x_1)$$
$$+ \frac{(x - x_0)(x - x_1)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} f(x_2)$$

- Considere o seguinte conjunto de pontos:

x_i	0	1	2
$f(x_i)$	-2	4	12

- Pontos: $x_0 = 0$, $x_1 = 1$ e $x_2 = 2$; $f(x_0) = -2$; $f(x_1) = 4$ e $f(x_2) = 12$

$$\boxed{L_0(x) = \frac{(x-1).(x-2)}{(0-1).(0-2)} = \frac{x^2-3x+2}{2}}$$

$$\boxed{L_1(x) = \frac{(x-0).(x-2)}{(1-0).(1-2)} = -x^2+2x}$$

$$\boxed{L_2(x) = \frac{(x-0).(x-1)}{(2-0).(2-1)} = \frac{x^2-x}{2}}$$

$$P(x) = L_0(x).f(x_0) + L_1(x).f(x_1) + L_2(x).f(x_2)$$

$$P(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{2}.(-2) + -x^2 + 2x.(4) + \frac{x^2 - x}{2}.(12)$$

$$P(x) = -x^2 + 3x - 2 - 4.x^2 + 8x + 6x^2 - 6x$$

$$P(x) = x^2 + 5x - 2$$

- Exemplo: Empregar o polinômio interpolador de Lagrange de primeiro e de segundo graus para calcular ln(2) com base nos seguintes dados:

$$x_0 = 1; \quad f(x_0) = 0;$$

$$x_1 = 4; \quad f(x_1) = 1{,}386294$$

$$x_2 = 6; \quad f(x_2) = 1{,}791759$$

- Solução:

Polinômio de primeiro grau:

$$f_1(x) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1} f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0} f(x_1)$$

$$f_1(2) = \frac{2-4}{1-4}(0) + \frac{2-1}{4-1}(1{,}386294) = 0{,}4620981$$

- Solução:

Polinômio de segundo grau:

$$f_2(2)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}f(x_0)+\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}f(x_1)$$

$$+\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}f(x_2)$$

$$=\frac{(2-4)(2-6)}{(1-4)(1-6)}(0)+\frac{(2-1)(2-6)}{(4-1)(4-6)}(1{,}386294)$$

$$+\frac{(2-1)(2-4)}{(6-1)(6-4)}(1{,}791760)=0{,}5658444$$

- Exercício:
  - Ajuste por uma reta os seguintes pontos (x;f(x)): (2; 3,1) e (4; 5,6)

$$p(x) = \left(\frac{x - x_1}{x_0 - x_1}\right) f(x_0) + \left(\frac{x - x_0}{x_1 - x_0}\right) f(x_1)$$

$$p(x) = \left(\frac{x-4}{2-4}\right) 3{,}1 + \left(\frac{x-2}{4-2}\right) 5{,}6 = -1{,}55(x-4) + 2{,}8(x-2)$$

$$p(x) = 1{,}25x + 0{,}6$$

- Exercício:
  - Seja y = f(x) determinar o polinômio que interpola uma função dada nos pontos a seguir utilizando o método de Lagrange e três casas decimais.

i	0	1	2
x_i	-1	0	2
y_i	4	1	-1

$$p(x) = 0{,}667x^2 - 2{,}333x + 1$$

4. Interpolação de Newton

- Diferenças Divididas de Newton:
  - Seja f(x) uma função contínua, (n+1) vezes diferenciável e definida em x_0, x_1, ...x_n (n+1) pontos distintos de um intervalo (a, b).
  - Definimos diferença dividida de ordem n de uma função f(x) definida nos pontos x_i, i = 0, 1,...,n por

$$f[x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n] = \frac{f[x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n] - f[x_0, x_1, x_2, \ldots x_{n-1}]}{x_n - x_0}$$

- Então:

$$\boxed{f[x_0] = f(x_0)}$$ (ordem 0)

$$\boxed{f[x_0, x_1] = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}$$ (ordem 1)

$$\boxed{f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_1, x_2] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_0}}$$ (ordem 2)

$$\boxed{f[x_0, x_1, x_2, x_3] = \frac{f[x_1, x_2, x_3] - f[x_0, x_1, x_2]}{x_3 - x_0}}$$ (ordem 3)

Operadores:

Ordem 0	Ordem 1	Ordem 2	
$f[x_0]$			
	$f[x_0, x_1]$		
$f[x_1]$		$f[x_0, x_1, x_2]$	...
	$f[x_1, x_2]$		
$f[x_2]$		$f[x_1, x_2, x_3]$	
	$f[x_2, x_3]$		
$f[x_3]$			
...			
$f[x_n]$			

- Seja f(x) uma função contínua e definida em x_0, x_1, ...x_n (n+1) pontos distintos de um intervalo (a, b). O polinômio de grau ≤ n baseado nas diferenças divididas dado por:

$$\boxed{\begin{aligned}P_n(x) = f[x_0] + (x - x_0).f[x_0, x_1] + (x - x_0).(x - x_1).f[x_0, x_1, x_2] + \\ ... + (x - x_0).(x - x_1)...(x - x_{n-1}).f[x_0, x_1, x_2, ..., x_n]\end{aligned}}$$

- Operadores:

$$b_0 = f(x_0)$$

$$b_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

$$b_2 = \frac{\dfrac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - \dfrac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}{x_2 - x_0}$$

$$\boxed{P_2(x) = f[x_0] + (x - x_0).f[x_0, x_1] + (x - x_0).(x - x_1).f[x_0, x_1, x_2]}$$

$$f_2(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)(x - x_1)$$

$$f_2(x) = b_0 + b_1 x - b_1 x_0 + b_2 x^2 + b_2 x_0 x_1 - b_2 x\, x_0 - b_2 x\, x_1$$

- Faça uma estimativa de ln(2) empregando um polinômio interpolador de Newton de terceiro grau utilizando os seguintes pontos:

$$x_0 = 1; \quad f(x_0) = 0;$$
$$x_1 = 4; \quad f(x_1) = 1{,}386294$$
$$x_2 = 6; \quad f(x_2) = 1{,}791759$$
$$x_3 = 5; \quad f(x_3) = 1{,}609438$$

Solução:

- O polinômio de terceiro grau a ser obtido possui a forma:

$$f_3(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + b_2(x - x_0)(x - x_1) + b_3(x - x_0)(x - x_1)(x - x_2)$$

- As primeiras diferenças divididas para o problema são:

$$f[x_1, x_0] = \frac{1{,}386294 - 0}{4 - 1} = 0{,}4620981$$

$$f[x_2, x_1] = \frac{1,791759 - 1,386294}{6-4} = 0,2027326$$

$$f[x_3, x_2] = \frac{1,609438 - 1,791759}{5-6} = 0,1823216$$

As segundas diferenças divididas para o problema são:

$$f[x_2, x_1, x_0] = \frac{0,2027326 - 0,4620981}{6-1} = -0,05187311$$

$$f[x_3, x_2, x_1] = \frac{0,1823216 - 0,2027326}{5-4} = -0,02041100$$

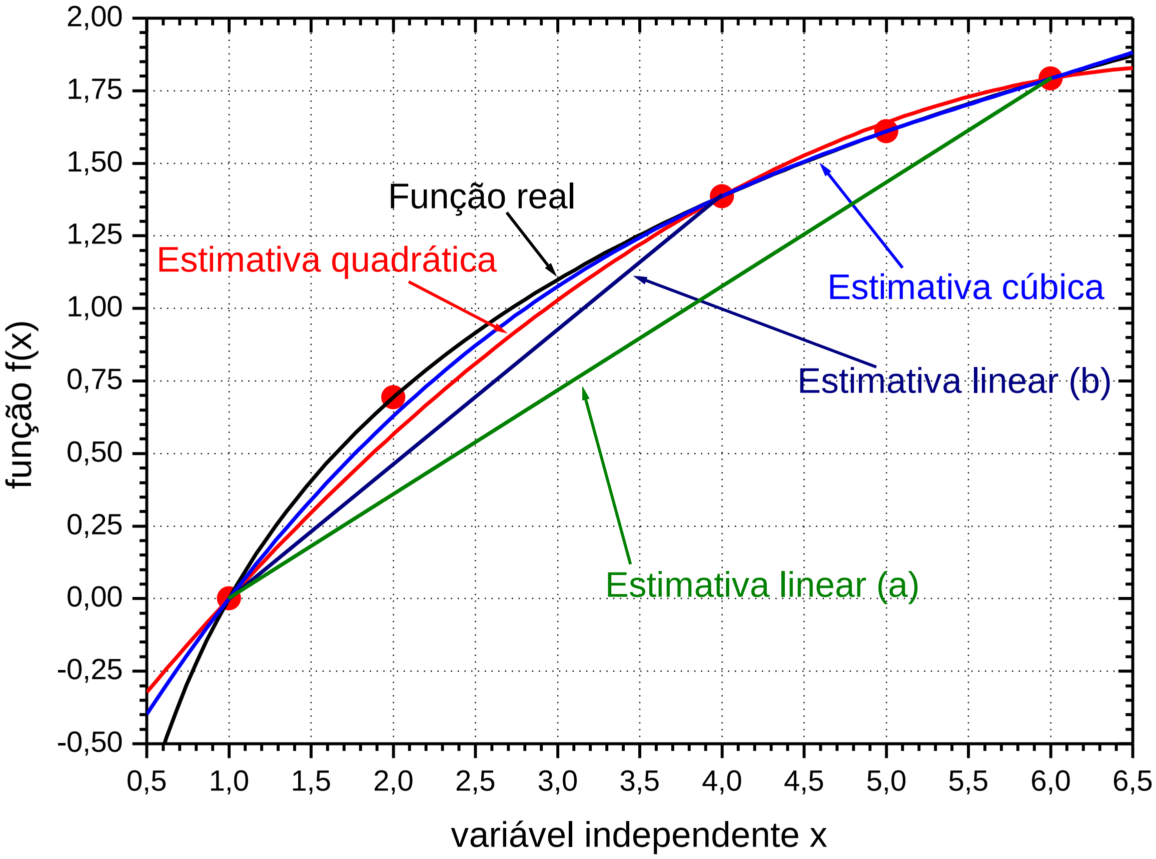
- A terceira diferença dividida é:

$$f[x_3, x_2, x_1, x_0] = \frac{-0{,}02041100}{5-1} = 0{,}007865529$$

- Polinômio interpolador de Newton:

$$f_3(x) = 0 + 0{,}4620981(x-1) - 0{,}05187311(x-1)(x-4)$$
$$+ 0{,}007865529(x-1)(x-4)(x-6)$$

Valor aproximado para ln(2)=0,6287686



Erros relativos (lineares):

(a) 48,3%

(b) 33,3%

Erro relativo (quadrática):

18,4%

Erro relativo (cúbica):

9,3%

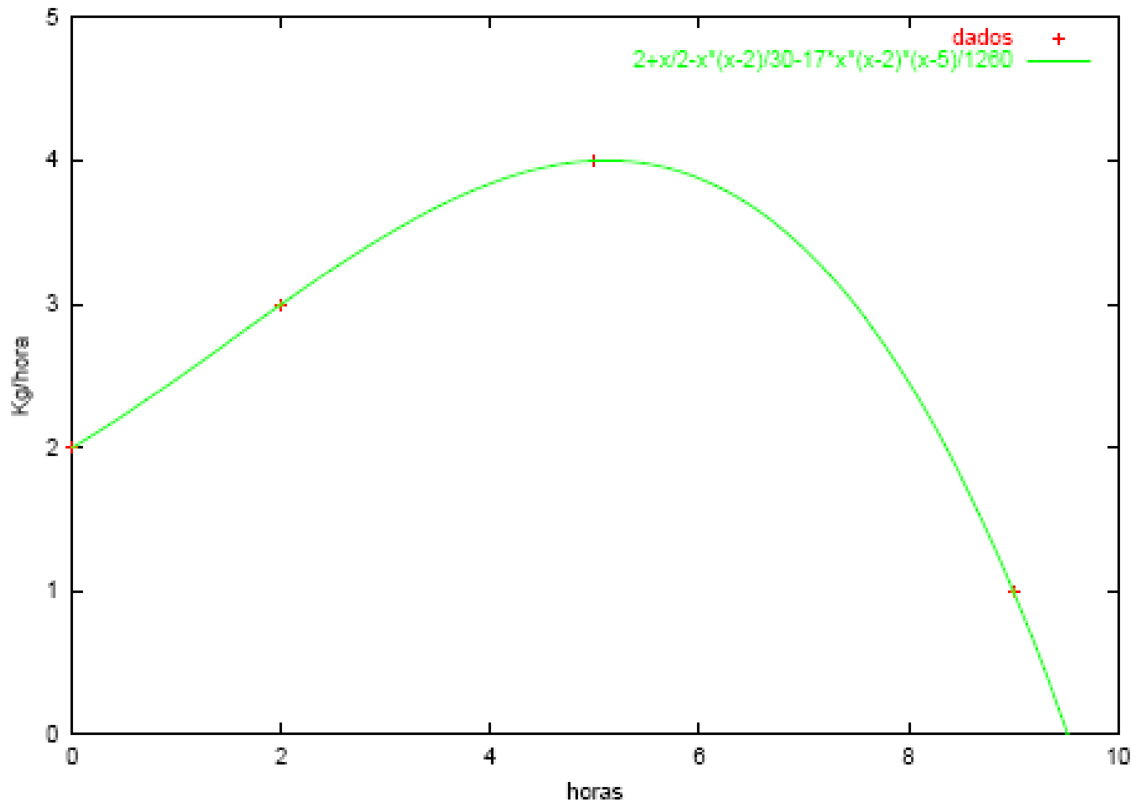
Exemplo

$$
\begin{aligned}
p(x_0) &= a_0 p_0(x_0) + a_1 p_1(x_0) + a_2 p_2(x_0)^2 + a_3 p_3(x_0)^3 = f(x_0) = 2 \\
p(x_1) &= a_0 p_0(x_1) + a_1 p_1(x_1) + a_2 p_2(x_1)^2 + a_3 p_3(x_1)^3 = f(x_1) = 3 \\
p(x_2) &= a_0 p_0(x_2) + a_1 p_1(x_2) + a_2 p_2(x_2)^2 + a_3 p_3(x_2)^3 = f(x_2) = 4 \\
p(x_3) &= a_0 p_0(x_3) + a_1 p_1(x_3) + a_2 p_2(x_3)^2 + a_3 p_3(x_3)^3 = f(x_3) = 1
\end{aligned}
$$

x_i	$f[x_i]$	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	$f[x_i, \ldots, x_{i+3}]$
$x_0 = 0$	$f(x_0) = 2$			
		$f[x_0, x_1] = \frac{1}{2}$		
$x_1 = 2$	$f(x_1) = 3$		$f[x_0, x_1, x_2] = \frac{-1}{30}$	
		$f[x_1, x_2] = \frac{1}{3}$		$f[x_0, \ldots, x_3] = \frac{-17}{1260}$
$x_2 = 5$	$f(x_2) = 4$		$f[x_1, x_2, x_3] = \frac{-13}{84}$	
		$f[x_2, x_3] = \frac{-3}{4}$		
$x_3 = 9$	$f(x_3) = 1$			

- Exemplo

$$p(x) = 2 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{30}x(x-2) - \frac{17}{1260}x(x-2)(x-5)$$



- Considerações Finais:

- Nos métodos que utilizam diferenças divididas a estimativa do erro de truncamento pode ser facilmente integrada ao algoritmo, uma vez que utiliza uma diferença.
- No método de Lagrange, a estimativa do erro de truncamento pode ser obtida apenas se a função interpolada for conhecida analiticamente.
- O método de Lagrange é um pouco mais simples de ser implementado.

Trabalho

- Um automóvel, viajando por uma rodovia é cronometrado em diversas posições. Os dados seguem onde tempo (s) e distância (pés) e velocidade (pés/s).
- Use o polinômio de segundo grau de Lagrange e cúbico de Newton para obter a posição e velocidade do automóvel quando t = 10 s.
- Plote os gráficos e compare com a ferramenta Excel.

t	1	3	5	8	13
d	225	383	623	993	1123
v	77	80	74	72	78